
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01213136 3







LEHRBUCH

DER

THEORIE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

MIT

EINER UNABHÄNGIGEN VARIABELN

VON

LEO KOENIGSBERGER.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1889.

Vorwort.

In dem vorliegenden Lehrbuche habe ich es unternommen, die allgemeine Theorie der Differentialgleichungsysteme mit einer unabhängigen Variabeln und insbesondere der algebraischen im Zusammenhange zu entwickeln, wobei ich mich bestrebt habe, nur die Kenntniss der Elemente der Differentialrechnung vorauszusetzen und die Integralrechnung oder vielmehr die Theorie der Quadraturen wenigstens in allgemeinen Umrissen als einfachsten Fall des Problems der Integration von Differentialgleichungen darzustellen. Auf eine Behandlung specieller Differentialgleichungen, deren Integrale durch verschiedene analytische Kunstgriffe sich herleiten lassen, brauchte ich um so weniger einzugehen, als grade in der letzten Zeit einige recht gute Beispielsammlungen solcher Differentialgleichungen, wie z. B. die von *Forsyth* erschienen sind.

Die Darlegung der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungsysteme beruht wesentlich auf functionentheoretischen Betrachtungen und stützt sich ganz und gar auf die fundamentalen Untersuchungen von *Jacobi, Weierstrass, Briot* und *Bouquet*, und *Fuchs,* welche hauptsächlich in den folgenden Schriften niedergelegt sind:

Jacobi: 1) De investigando ordine systematis differentialium vulgarium cuiuscunque.
(Borchardt's Journal B. 64.)
und 2) De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocanda.
(Vorl. über Dynamik.)

Weierstrass: Zur Theorie der analytischen Facultäten.
(Crelle's Journ. B. 51.)

Briot et *Bouquet:* Étude des fonctions d'une variable imaginaire. (Journal de l'école polyt. cah. 36.)

Fuchs: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. (Borchardt's Journ. B. 66.)

Ausserdem soll noch eine Reihe von Arbeiten angeführt werden, welche neben den eben erwähnten Schriften und den ausgezeichneten Vorlesungen über Integralrechnung von *Camille Jordan* bei der Behandlung einzelner Probleme benutzt worden sind, während bekannte, längst in Lehrbücher übergegangene Einzelheiten nicht besonders hervorgehoben zu werden brauchen; diese sind:

Jacobi: Vorlesungen über Dynamik.

Jacobi: De integratione aequationis differentialis

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = 0.$$

(Crelle's Journ. B. 24.)

Abel: Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes.

(Oeuvres compl. t. I.)

Kummer: Note sur l'intégration de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$$

par des intégrales définies.

(Crelle's Journ. B. 19.)

H. Poincaré: Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles.

(Journ. de l'école polyt. cah. 45.)

E. Picard: Sur la forme des intégrales des équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points critiques.

(Comptes rendus LXXXVII.)

Thomé: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Borchardt's Journ. B. 74, 75.)

Hamburger: Bemerkung über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten.

(Borchardt's Journ. B. 76.)

Frobenius: Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.
(Borchardt's Journ. B. 76.)

Frobenius: Ueber algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen.
(Borchardt's Journ. B. 80.)

Tannery: Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables.
(Ann. de l'école norm. Sér. II. t. 4.)

Appell: Mémoire sur les équations différentielles linéaires.
(Ann. de l'école norm. Sér. II. t. 10.)

Sauvage: Sur les propriétés des fonctions définies par un système d'équations différentielles etc.
(Ann. de l'école norm. Sér. II. t. 11.)

Sauvage: Sur les intégrales régulières d'une système d'équations différentielles.
(Ann. de l'école norm. Sér. III. t. 3.)

Bruns: Ueber die Integrale des Vielkörperproblems.
(Acta mathem. XI. 1.)

Köhler: Ueber die Form der logarithmischen Integrale einer linearen nicht homogenen Differentialgleichung.
(Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXXIII. 4.)

Die Gesichtspunkte, die mich bei der methodischen Darstellung dieser Theorie geleitet haben, werden am deutlichsten aus der folgenden ausführlichen Inhaltsangabe erkennbar sein.

Der Verfasser.

Inhaltsangabe.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften von Systemen algebraischer Differentialgleichungen.

I. Reduction eines allgemeinen algebraischen Differentialgleichungsystems auf ein solches erster Ordnung.

II. Aufstellung der Normalform eines algebraischen Differentialgleichungsystems m^{ter} Klasse.

III. Definition und Existenzbeweis der Integrale von Differentialgleichungsystemen beliebiger Klasse.

IV. Ueber die Multiplicatoren von Differentialgleichungsystemen beliebiger Klasse.

V. Ueber die Irreductibilität eines Systems algebraischer Differentialgleichungen.

VI. Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungsysteme.

Zweites Kapitel.

Charakteristische Eigenschaften specieller Arten von Differentialgleichungsystemen.

I. Eigenschaften der Differentialgleichungen der Mechanik.

Drittes Kapitel.

Ueber die Eigenschaften der linearen Differentialgleichungsysteme.

VII. Ueber die allgemeine Form der Beziehungen zwischen Integralen linearer Differentialgleichungssysteme beliebiger Klasse und Quadraturen algebraischer Functionen.

Viertes Kapitel.

Ueber die analytischen Ausdrücke für die Integrale algebraischer Differentialgleichungssysteme.

I. Ueber Differentialgleichungssysteme erster Klasse von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

II. Ueber Differentialgleichungssysteme erster Klasse von der Form $\frac{dy}{dx} = f(y)$.

III. Ueber quadrirbare Differentialgleichungssysteme beliebiger Klasse.

IV. Ueber integrirbare Differentialgleichungssysteme erster Klasse.

V. Ueber integrirbare Differentialgleichungssysteme höherer Klassen.

IV. Untersuchung der Natur und der Kriterien der nicht eindeutigen Integrale eines Differentialgleichungsystems der Form

$$x\frac{dy_\varrho}{dx} = (x, y_1, \dots y_n)^1 + (x, y_1, \dots y_n)^2 + \cdots \quad (\varrho = 1, 2, \dots n)$$

in der Umgebung des Werthes $x = 0$, dem die Nullwerthe der Integrale entsprechen.

V. Aufstellung der Kriterien für die Eindeutigkeit der Integrale beliebiger algebraischer Differentialgleichungsysteme.

Sechstes Kapitel.

Untersuchung der Eigenschaften der Integrale linearer Differentialgleichungsysteme in der Umgebung eines beliebigen Werthes der unabhängigen Variabeln.

I. Feststellung der Natur der Mehrdeutigkeit und Discontinuität der Integralelemente beliebiger linearer Differentialgleichungsysteme.

II. Ueber die regulären Integrale linearer Differentialgleichungssysteme.

III. Ueber die Substitutionsgruppen linearer Differentialgleichungssysteme und deren Anwendung auf die Ermittlung algebraischer Integralsysteme.

IV. Discussion des hypergeometrischen Differentialgleichungssystems zweiter Klasse.



Erstes Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften von Systemen algebraischer Differentialgleichungen.

I. Reduction eines allgemeinen algebraischen Differentialgleichungssystems auf ein solches erster Ordnung.

1. Man nennt eine *algebraische Differentialgleichung* m^{ter} *Ordnung* mit der unabhängigen Variabeln x und der abhängigen Variabeln z jede algebraische Gleichung zwischen x, z und den Ableitungen von z bis zur m^{ten} Ordnung, also jede Gleichung der Form

$$F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0, \tag{1}$$

in welcher F eine ganze Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet, und ein *System algebraischer Differentialgleichungen* mit der unabhängigen Variabeln x und den abhängigen Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ die Zusammenstellung von n algebraisch von einander unabhängigen Gleichungen der Form

$$\left\{\begin{array}{l} F_1\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots \frac{d^{\lambda_1} z_1}{dx^{\lambda_1}}, z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{\lambda_2} z_2}{dx^{\lambda_2}}, \ldots z_n, \frac{dz_n}{dx}, \ldots \frac{d^{\lambda_n} z_n}{dx^{\lambda_n}}\right) = 0 \\ F_2\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots \frac{d^{\mu_1} z_1}{dx^{\mu_1}}, z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{\mu_2} z_2}{dx^{\mu_2}}, \ldots z_n, \frac{dz_n}{dx}, \ldots \frac{d^{\mu_n} z_n}{dx^{\mu_n}}\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots \frac{d^{\nu_1} z_1}{dx^{\nu_1}}, z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{\nu_2} z_2}{dx^{\nu_2}}, \ldots z_n, \frac{dz_n}{dx}, \ldots \frac{d^{\nu_n} z_n}{dx^{\nu_n}}\right) = 0, \end{array}\right. \tag{2}$$

worin $F_1, F_2, \ldots F_n$ ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen sind.

Eine der wesentlichsten Aufgaben der Integralrechnung besteht nun darin, aus einem Systeme von n Differentialgleichungen die n abhängigen Variabeln als Functionen der unabhängigen Variabeln auszudrücken oder zu charakterisiren, oder, wie man zu sagen pflegt, *die Differentialgleichungen zu integriren.*

2. Um zunächst eine einheitlichere Form für die verschiedenen Arten von Systemen algebraischer Differentialgleichungen herzustellen, bezeichne man die grösste der Zahlen

$$\lambda_\alpha, \mu_\alpha, \ldots \ldots \nu_\alpha \quad \text{mit} \quad m_\alpha,$$

und ersetze mit Einführung neuer abhängiger Variabeln das System (2) durch das folgende, worin $\xi, \eta, \ldots \vartheta$ statt $z_1, z_2, \ldots z_n$ gesetzt sind,

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dx} = \xi_1, \dfrac{d\xi_1}{dx} = \xi_2, \ldots\ldots \dfrac{d\xi_{m_1-2}}{dx} = \xi_{m_1-1} \\ \dfrac{d\eta}{dx} = \eta_1, \dfrac{d\eta_1}{dx} = \eta_2, \ldots\ldots \dfrac{d\eta_{m_2-2}}{dx} = \eta_{m_2-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{d\vartheta}{dx} = \vartheta_1, \dfrac{d\vartheta_1}{dx} = \vartheta_2, \ldots\ldots \dfrac{d\vartheta_{m_n-2}}{dx} = \vartheta_{m_n-1} \\ F_1\left(x, \xi, \xi_1, \cdots \xi_{m_1-1}, \dfrac{d\xi_{m_1-1}}{dx}, \ldots\ldots \vartheta, \vartheta_1, \cdots \vartheta_{m_n-1}, \dfrac{d\vartheta_{m_n-1}}{dx}\right) = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ F_n\left(x, \xi, \xi_1, \cdots \xi_{m_1-1}, \dfrac{d\xi_{m_1-1}}{dx}, \ldots\ldots \vartheta, \vartheta_1, \cdots \vartheta_{m_n-1}, \dfrac{d\vartheta_{m_n-1}}{dx}\right) = 0 \end{cases}$$

mit der unabhängigen Variabeln x und den $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ abhängigen Variabeln

$$\xi, \xi_1, \ldots \xi_{m_1-1}, \eta, \eta_1, \ldots \eta_{m_2-1}, \ldots \vartheta, \vartheta_1, \ldots \vartheta_{mn-1}.$$

Da aber in dem nunmehr erhaltenen Systeme von

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

Differentialgleichungen nur die ersten Ableitungen der abhängigen Variabeln vorkommen, und solche Differentialgleichungen von *der ersten Ordnung* genannt werden, so folgt zunächst,

dass jedes System von algebraischen Differentialgleichungen

ersetzt werden kann durch ein System eben solcher Differentialgleichungen erster Ordnung.

3. Wir können jedoch dem Systeme (3) noch symmetrischere Formen geben. Da wir nämlich die Gleichungen (2), also auch die n letzten Gleichungen des Systemes (3) als algebraisch von einander unabhängig voraussetzten, so wird man im Allgemeinen, von gleich näher zu erörternden Ausnahmefällen abgesehen, aus den letzten n Gleichungen des Systemes (3) $n$mal je $n-1$ der Ableitungen

$$(a) \ldots \frac{d\xi_{m_1-1}}{dx}, \frac{d\eta_{m_2-1}}{dx}, \ldots \frac{d\vartheta_{m_n-1}}{dx}$$

eliminiren, und somit das System (3) ersetzen können durch:

$$(4) \begin{cases} \frac{d\xi}{dx} = \xi_1, \frac{d\xi_1}{dx} = \xi_2, \ldots \frac{d\xi_{m_1-2}}{dx} = \xi_{m_1-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\vartheta}{dx} = \vartheta_1, \frac{d\vartheta_1}{dx} = \vartheta_2, \ldots \frac{d\vartheta_{m_n-2}}{dx} = \vartheta_{m_n-1}, \\ \varphi_1\left(x, \xi, \xi_1, \ldots \xi_{m_1-1}, \ldots \vartheta, \vartheta_1, \ldots \vartheta_{m_n-1}, \frac{d\xi_{m_1-1}}{dx}\right) = 0 \\ \varphi_2\left(x, \xi, \xi_1, \ldots \xi_{m_1-1}, \ldots \vartheta, \vartheta_1, \ldots \vartheta_{m_n-1}, \frac{d\eta_{m_2-1}}{dx}\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n\left(x, \xi, \xi_1, \ldots \xi_{m_1-1}, \ldots \vartheta, \vartheta_1, \ldots \vartheta_{m_n-1}, \frac{d\vartheta_{m_n-1}}{dx}\right) = 0, \end{cases}$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten.

Da jedoch nicht in allen Gleichungen (2) die höchsten Differentialquotienten aller abhängigen Variabeln vorkommen mussten, so könnte der eben angegebene algebraische Eliminationsprocess dadurch unausführbar werden, dass sich im Laufe desselben eine von den Ableitungen (a) völlig freie ganze Beziehung von der Form ergäbe

$$(5)\quad \varphi(x, \xi, \xi_1, \ldots \xi_{m_1-1}, \eta, \eta_1, \ldots \eta_{m_2-1}, \ldots \vartheta, \vartheta_1, \ldots \vartheta_{m_n-1}) = 0;$$

man greife in diesem Falle eine der in (5) vorkommenden Grössen z. B. ϑ_r heraus, und eliminire zunächst ϑ_r zwischen

dieser Gleichung und $n-1$ der letzten n Gleichungen des Systemes (3), so dass sich die Beziehungen

$$(6)\begin{cases}\omega_1\left(x,\xi,\xi_1,\cdots\xi_{m_1-1},\frac{d\xi_{m_1-1}}{dx},\cdots\vartheta,\vartheta_1,\cdots\vartheta_{r-1},\vartheta_{r+1},\cdots\vartheta_{m_n-1},\frac{d\vartheta_{m_n-1}}{dx}\right)=0\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \omega_{n-1}\left(x,\xi,\xi_1,\cdots\xi_{m_1-1},\frac{d\xi_{m_1-1}}{dx},\cdots\vartheta,\vartheta_1,\cdots\vartheta_{r-1},\vartheta_{r+1},\cdots\vartheta_{m_n-1},\frac{d\vartheta_{m_n-1}}{dx}\right)=0\end{cases}$$

ergeben, in denen $\omega_1,\ldots\omega_{n-1}$ wiederum ganze Functionen bedeuten; ersetzt man ferner die Gleichung $\frac{d\vartheta_{r-1}}{dx}=\vartheta_r$ des Systemes (3) nach (5) durch

$$(7)\quad \varphi\left(x,\xi,\xi_1,\cdots\xi_{m_1-1},\eta,\eta_1,\cdots\eta_{m_2-1},\cdots\vartheta,\vartheta_1,\cdots\vartheta_{r-1},\frac{d\vartheta_{r-1}}{dx},\vartheta_{r+1}\cdots\vartheta_{m_n-1}\right)=0,$$

und beachtet, dass sich durch Differentiation von (5) mit Hülfe von (3)

$$(8)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\xi_1+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_{m_1-1}}\frac{d\xi_{m_1-1}}{dx}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\vartheta_1+\cdots$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_{r-1}}\vartheta_r+\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_r}\vartheta_{r+1}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_{m_n-1}}\frac{d\vartheta_{m_n-1}}{dx}=0,$$

oder durch Elimination von ϑ_r zwischen (5) und (8)

$$(9)\quad \omega\left(x,\xi,\xi_1,\cdots\xi_{m_1-1},\frac{d\xi_{m_1-1}}{dx},\cdots\vartheta,\vartheta_1,\cdots\vartheta_{r-1},\vartheta_{r+1},\cdots\vartheta_{m_n-1},\frac{d\vartheta_{m_n-1}}{dx}\right)=0$$

ergiebt, so liefert die Zusammenstellung der Gleichungen

$$(10)\begin{cases}\frac{d\xi}{dx}=\xi_1,\ \frac{d\xi_1}{dx}=\xi_2,\cdots\frac{d\xi_{m_1-2}}{dx}=\xi_{m_1-1}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \frac{d\vartheta}{dx}=\vartheta_1,\cdots\frac{d\vartheta_{r-2}}{dx}=\vartheta_{r-1},\ \frac{d\vartheta_{r+1}}{dx}=\vartheta_{r+2},\cdots\frac{d\vartheta_{m_n-2}}{dx}=\vartheta_{m_n-1}\\ \varphi\left(x,\xi,\xi_1,\cdots\xi_{m_1-1},\eta,\eta_1,\cdots\eta_{m_2-1},\cdots\vartheta,\vartheta_1,\cdots\vartheta_{r-1},\frac{d\vartheta_{r-1}}{dx},\vartheta_{r+1},\cdots\vartheta_{m_n-1}\right)=0\\ \omega\left(x,\xi,\xi_1,\cdots\xi_{m_1-1},\frac{d\xi_{m_1-1}}{dx},\cdots\vartheta,\vartheta_1,\cdots\vartheta_{r-1},\vartheta_{r+1},\cdots\vartheta_{m_n-1},\frac{d\vartheta_{m_n-1}}{dx}\right)=0\\ \omega_1\left(x,\xi,\xi_1,\cdots\xi_{m_1-1},\frac{d\xi_{m_1-1}}{dx},\cdots\vartheta,\vartheta_1,\cdots\vartheta_{r-1}\vartheta_{r+1},\cdots\vartheta_{m_n-1},\frac{d\vartheta_{m_n-1}}{dx}\right)=0\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \omega_{n-1}\left(x,\xi,\xi_1,\cdots\xi_{m_1-1},\frac{d\xi_{m_1-1}}{dx},\cdots\vartheta,\vartheta_1,\cdots\vartheta_{r-1},\vartheta_{r+1},\cdots\vartheta_{m_n-1},\frac{d\vartheta_{m_n-1}}{dx}\right)=0\end{cases}$$

ein System von $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - 1$ Differentialgleichungen erster Ordnung in den $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - 1$ abhängigen Variabeln

$$\xi, \xi_1, \cdots \xi_{m_1-1}, \eta, \eta_1, \cdots \eta_{m_2-1}, \cdots \vartheta, \vartheta_1, \cdots \vartheta_{r-1}, \vartheta_{r+1}, \cdots \vartheta_{m_n-1},$$

welches mit der algebraischen Beziehung (5) zusammen dem Systeme (4) insofern äquivalent ist, dass sämmtliche Functionalbeziehungen, welche (4) genügen, auch (10) befriedigen. Wendet man nun wiederum auf das System (10) den oben angegebenen Eliminationsprocess an, so wird man entweder wieder zu einem System von $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - 1$ Differentialgleichungen gelangen, in welchem jede Differentialgleichung nur *einen* Differentialquotienten erster Ordnung enthält, oder man wird zu einer algebraischen Relation zwischen den abhängigen Variabeln selbst geführt, die dann wiederum die Zahl der das System bildenden Differentialgleichungen um eine Einheit zu erniedrigen gestattet. Fahren wir in diesen Schlüssen fort, so gelangen wir entweder zu einer Zusammenstellung von Gleichungen, die aus algebraischen Beziehungen zwischen den abhängigen Variabeln und aus einem Systeme algebraischer Differentialgleichungen, welche nur je *einen* Differentialquotienten erster Ordnung einer abhängigen Variabeln enthalten, zusammengesetzt ist, oder das gesammte Differentialgleichungsystem (3) ist durch rationale algebraische und Differentiations-Processe in ein algebraisches Gleichungsystem transformirbar. Da wir diesen letzteren Fall selbstverständlich von unserer Betrachtung ausschliessen können, so erhalten wir, wenn wir von nun an *ein System von m algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, von denen jede nur den ersten Differentialquotienten einer der m abhängigen Variabeln enthält, ein Differentialgleichungsystem m^ter Klasse nennen*, den nachfolgenden Satz *von der Reduction eines Differentialgleichungsystems auf die Jacobi'sche Form:*

Jedes System von n algebraischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung in einer unabhängigen und n abhängigen Variabeln lässt sich in ein algebraisches Differentialgleichungsystem m^ter Klasse von der Form

$$(11)\quad \begin{cases} f_1\left(x,\ y_1,\ y_2, \cdots y_m,\ \frac{dy_1}{dx}\right) = 0 \\ f_2\left(x,\ y_1,\ y_2, \cdots y_m,\ \frac{dy_2}{dx}\right) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_m\left(x,\ y_1,\ y_2, \cdots y_m,\ \frac{dy_m}{dx}\right) = 0 \end{cases}$$

transformiren, in welchem $f_1, f_2, \ldots f_m$ *ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten.*

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn man die erste der Gleichungen (11) $m - 2$ mal nacheinander differentiirt, man durch Benutzung der anderen Gleichungen (11) $m - 1$ in $y_2, y_3, \ldots y_m$ algebraische Gleichungen erhält, die ausserdem noch

$$y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}$$

enthalten, und es folgt somit,

dass sich sämmtliche Elemente des Functionalsystems $y_1, y_2, \ldots y_m$, *deren Existenz später erwiesen wird, im Allgemeinen*) algebraisch durch eines derselben und dessen Ableitungen ausdrücken lassen.*

4. Da uns im Folgenden häufig die Untersuchung *einer* algebraischen Differentialgleichung höherer Ordnung

$$(12)\qquad F\left(x,\ z,\ \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^nz}{dx^n}\right) = 0$$

beschäftigen wird, so mag bemerkt werden, dass dieselbe nach den eben angegebenen Transformationen durch das Differentialgleichungsystem n^{ter} Klasse

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y_1,\ \frac{dy_1}{dx} = y_2, \cdots \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \\ F\left(x,\ y,\ y_1, \cdots y_{n-1},\ \frac{dy_{n-1}}{dx}\right) = 0 \end{cases}$$

zu ersetzen sein wird.

---

*) Der Satz erleidet eine Ausnahme, wenn die Differentialgleichungen nicht von einander unabhängig sind, ein Fall, der später zur Erledigung kommt.

II. Aufstellung der Normalform eines algebraischen Differentialgleichungssystems m^{ter} Klasse.

1. Die vorher gefundenen reducirten Formen eines jeden Systems von algebraischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung lassen sich nun mit Hülfe eines von *Abel* in die Analysis eingeführten Princips auf eine für die weiteren Untersuchungen fundamentale Form bringen.

Setzen wir nämlich der Kürze halber

$$(1) \qquad \frac{dy_1}{dx} = Y_1, \frac{dy_2}{dx} = Y_2, \cdots \frac{dy_m}{dx} = Y_m,$$

und bringen die Gleichungen I. (11) in die Form

$$(2) \quad \begin{cases} Y_1^{\nu_1} + f_{11}(x, y_1, \cdots y_m) Y_1^{\nu_1 - 1} + \cdots + f_{1\nu_1}(x, y_1, \cdots y_m) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_m^{\nu_m} + f_{m1}(x, y_1, \cdots y_m) Y_m^{\nu_m - 1} + \cdots + f_{m\nu_m}(x, y_1, \cdots y_m) = 0, \end{cases}$$

von denen wir offenbar ohne Einschränkung des ursprünglichen Problems annehmen dürfen, dass weder eine dieser Gleichungen mehrfache, noch einzelne der Gleichungen unter einander gemeinsame Lösungen haben*), und in denen

$$f_{\varrho\sigma}(x, y_1, \cdot\cdot y_m)$$

rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, so mag die Grösse

$$(3) \qquad t = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \cdots + a_m Y_m,$$

in welcher $a_1, a_2, \ldots a_m$ unbestimmte Constanten bedeuten, wenn man für $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ alle $\nu_1 . \nu_2 \ldots \nu_m = N$ Combinationen der Lösungen der Gleichungen (2) einsetzt, die Werthe

$$t_1, t_2, \ldots t_N$$

annehmen, die wegen der Unbestimmtheit der Constanten a offenbar sämmtlich unter einander verschieden sein werden; bildet man nun die Gleichung

$$(4) \qquad (t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_N) = 0,$$

---

*) indem im entgegengesetzten Falle das Problem in eine Reihe von Einzelproblemen zerfiele, die alle den angegebenen Bedingungen genügen.

so wird sich dieselbe, da die Coefficienten rationale symmetrische Functionen aller Lösungen der einzelnen Gleichungen (2) sind, sich also rational durch die Coefficienten dieser Gleichungen d. h. durch x, y_1, y_2, $\dots y_m$ ausdrücken lassen, in der Form ergeben

$$(5) \quad \psi(t) = g_0(x, y_1, \cdots y_m) t^N + g_1(x, y_1, \cdots y_m) t^{N-1} + \cdots + g_N(x, y_1, \cdots y_m) = 0,$$

worin $g_0, g_1, \dots g_N$ ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen sind.

Bildet man nun eine ähnliche lineare Function mit beliebigen andern constanten Coefficienten

$$(6) \qquad u = b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + \cdots + b_m Y_m,$$

welche für die entsprechenden Substitutionen der Lösungen der Gleichungen (2) die Werthe

$$u_1, u_2, \dots u_N$$

annehmen mag, so wird für beliebige ganzzahlige positive ϱ

$$t_1^\varrho u_1 + t_2^\varrho u_2 + \cdots + t_N^\varrho u_N$$

sich wiederum als rationale symmetrische Function der Lösungen der Gleichungen (2) *rational* durch x, y_1, $y_2 \cdots y_m$ ausdrücken lassen. Setzt man somit

$$(7) \quad \begin{cases} u_1 + u_2 + \cdots + u_N = \omega_0(x, y_1, y_2, \cdots y_m) \\ u_1 t_1 + u_2 t_2 + \cdots + u_N t_N = \omega_1(x, y_1, y_2, \cdots y_m) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_1 t_1^{N-1} + u_2 t_2^{N-1} + \cdots + u_N t_N^{N-1} = \omega_{N-1}(x, y_1, y_2, \cdots y_m), \end{cases}$$

worin $\omega_0, \omega_1, \dots \omega_{N-1}$ rationale Functionen bedeuten, und multiplicirt diese Gleichungen der Reihe nach mit den unbestimmten Factoren $\lambda_{N-1}, \lambda_{N-2}, \dots \lambda_1$, und dem Coefficienten g_0 der Gleichung (5), so ergiebt sich durch Addition derselben, wenn zur Abkürzung

$$(8) \qquad g_0 t^{N-1} + \lambda_1 t^{N-2} + \cdots + \lambda_{N-1} = \Omega(t)$$

gesetzt wird,

$$(9)\quad u_1\Omega(t_1)+u_2\Omega(t_2)+\cdots+u_N\Omega(t_N) = g_0\omega_{N-1}+\lambda_1\omega_{N-2}+\cdots+\lambda_{N-1}\omega_0.$$

Bestimmt man nun die Multiplicatoren λ so, dass

$$(10)\quad \Omega(t_1)=0,\ \Omega(t_2)=0,\cdots\Omega(t_{\alpha-1})=0, \quad \Omega(t_{\alpha+1})=0,\cdots\Omega(t_N)=0,$$

oder, was dasselbe ist, dass

$$(11)\quad \Omega(t)=\frac{\psi(t)}{t-t_\alpha}=g_0t^{N-1}+(g_1+g_0t_\alpha)t^{N-2}+\cdots + (g_{N-1}+g_{N-2}t_\alpha+\cdots+g_0t_\alpha^{N-1}),$$

so ergeben sich aus (8)

$$(12)\quad \lambda_1=g_1+g_0t_\alpha,\quad \lambda_2=g_2+g_1t_\alpha+g_0t_\alpha^2,\cdots \lambda_{N-1}=g_{N-1}+g_{N-2}t_\alpha+\cdots+g_0t_\alpha^{N-1},$$

während (9) in

$$(13)\quad u_\alpha=g_0\omega_{N-1}+\lambda_1\omega_{N-2}+\cdots+\lambda_{N-1}\omega_0:\Omega(t_\alpha)$$

übergeht. Da nun einerseits die λ-Grössen nach (12) ganze Functionen von t_α mit in $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ ganzen Coefficienten sind, andererseits aus (11) und (5)

$$(14)\quad \Omega(t_\alpha)=\psi'(t_\alpha)=Ng_0t_\alpha^{N-1}+(N-1)g_1t_\alpha^{N-2}+\cdots g_{N-1}$$

folgt, so ergiebt sich u_α in der Form

$$(15)\quad u_\alpha=S_1(x,y_1,\cdots y_m)\,t_\alpha^{N-1}+S_2(x,y_1,\cdots y_m)\,t_\alpha^{N-2}+\cdots + S_N(x,y_1,\cdots y_m):\psi'(t_\alpha),$$

worin $S_1, \ldots S_N$ rationale Functionen bedeuten, während $\psi'(t_\alpha)$, wie aus (14) ersichtlich, von den in u_α enthaltenen Constanten $b_1, b_2, \ldots b_m$ unabhängig ist und wegen der völlig willkürlichen Grössen $a_1, a_2, \ldots a_m$ als von Null verschieden vorausgesetzt werden darf, weil die Annahme $\psi'(t_\alpha)=0$ für die Gleichung (5) oder (4) zwei gleiche Lösungen erfordern würde.

Entspricht nun t_α der Combination der Lösungen der Gleichungen (2)

$$Y_{1\alpha},\ Y_{2\alpha}, \ldots Y_{m\alpha},$$

und stellt man nunmehr für willkürlich gewählte

$$b_1, b_2, \ldots b_m,\ c_1, c_2, \ldots c_m, \ldots n_1, n_2, \ldots n_m$$

die m Gleichungen

$$(16)\quad \begin{cases} a_1 Y_{1\alpha} + a_2 Y_{2\alpha} + \cdots + a_m Y_{m\alpha} = t_\alpha \\ b_1 Y_{1\alpha} + b_2 Y_{2\alpha} + \cdots + b_m Y_{m\alpha} = u_\alpha \\ \qquad = S_1 t_\alpha^{N-1} + S_2 t_\alpha^{N-2} + \cdots + S_N : \psi'(t_\alpha) \\ c_1 Y_{1\alpha} + c_2 Y_{2\alpha} + \cdots + c_m Y_{m\alpha} = v_\alpha \\ \qquad = T_1 t_\alpha^{N-1} + T_2 t_\alpha^{N-2} + \cdots + T_N : \psi'(t_\alpha) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_1 Y_{1\alpha} + m_2 Y_{2\alpha} + \cdots + m_m Y_{m\alpha} = w_\alpha \\ \qquad = W_1 t_\alpha^{N-1} + W_2 t_\alpha^{N-2} + \cdots + W_N : \psi'(t_\alpha) \end{cases}$$

zusammen, worin die $S_\alpha, T_\alpha, \ldots W_\alpha$ rationale Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ bedeuten, so ergiebt die Auflösung dieses linearen Gleichungsystems mit Hülfe von (5)

$$(17)\qquad Y_{\varrho\alpha} = A_{1\varrho} t_\alpha^{N-1} + A_{2\varrho} t_\alpha^{N-2} + \cdots + A_{N\varrho} : \psi'(t_\alpha),$$

worin $A_{1\varrho}, A_{2\varrho}, \ldots A_{N\varrho}$ rationale Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ bedeuten, und $\psi'(t_\alpha)$ eine ganze Function $N-1^{\text{ten}}$ Grades in t_α mit Coefficienten, welche ganze Functionen eben dieser Grössen sind, darstellt. Wir finden somit zunächst,

dass die Zweige $Y_{1\alpha}, Y_{2\alpha}, \ldots Y_{m\alpha}$ der von $x, y_1, \ldots y_m$ algebraisch abhängigen Functionen $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ sich sämmtlich als rationale Functionen einer einzigen algebraischen Function t_α eben dieser Grössen mit Coefficienten ausdrücken lassen, die rational aus diesen Grössen zusammengesetzt sind, und jeder der N Combinationen der Zweige der durch (2) *definirten algebraischen Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ gehört eine andere t-Lösung der Gleichung* (4) *oder* (5) *zu, durch welche die einzelnen Zweige sich in einer für alle t allgemein gültigen Form ausdrücken lassen.*

2. Bezeichnet man nun das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Nenner der rationalen Functionen

$$A_{1\varrho},\ A_{2\varrho},\ \cdots A_{N\varrho}$$

für $\varrho = 1, 2, \ldots m$ mit

$$g(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots y_m),$$

so dass

$$A_{\sigma\varrho} = \frac{g_{\sigma\varrho}(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots y_m)}{g(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots y_m)}$$

ist, worin g und $g_{\sigma\varrho}$ ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, und $Y_{\varrho\alpha}$ somit die Form annimmt

$$(18)\quad Y_{\varrho\alpha} = \frac{g_{1\varrho}(x, y_1, \cdots y_m) t_\alpha^{N-1} + g_{2\varrho}(x, y_1, \ldots y_m) t_\alpha^{N-2} + \cdots + g_{N\varrho}(x, y_1, \cdots y_m)}{g(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots y_m)\,\psi'(t_\alpha)},$$

so wird, wenn

$$(19)\qquad g(x, y_1, y_2, \ldots y_m)\,\psi(t) = G(x, t, y_1, y_2, \ldots y_m)$$

gesetzt wird, $Y_{\varrho\alpha}$ die Gestalt haben

$$(20)\qquad Y_{\varrho\alpha} = \frac{G_\varrho(x,\ t_\alpha,\ y_1,\ y_2,\ \cdots y_m)}{\dfrac{\partial G(x,\ t_\alpha,\ y_1,\ y_2,\ \cdots y_m)}{\partial t_\alpha}},$$

worin $G_\varrho(x, t_\alpha, y_1, y_2, \ldots y_m)$ ganze Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ und t_α bedeuten, und zwar in Bezug auf die letztere Grösse vom $N - 1^{\text{ten}}$ Grade; es folgt somit, wenn wir nach (1) die Y wieder durch $\frac{dy}{dx}$ ersetzen,

dass das Differentialgleichungsystem

$$f_1\left(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots y_m,\ \frac{dy_1}{dx}\right) = 0$$

$$f_2\left(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots y_m,\ \frac{dy_2}{dx}\right) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_m\left(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots y_m,\ \frac{dy_m}{dx}\right) = 0,$$

in welchem $f_1, f_2, \ldots f_m$ ganze Functionen bedeuten, die in Bezug auf $\frac{dy_1}{dx}, \cdots \frac{dy_m}{dx}$ resp. vom $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_m{}^{\text{ten}}$ Grade sind, ersetzt werden kann durch die $\nu_1 . \nu_2 \ldots \nu_m$ dem gegebenen völlig äquivalenten Systeme

$$
(21) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= \frac{G_1(x, t_\alpha, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\dfrac{\partial G(x, t_\alpha, y_1, y_2, \ldots y_m)}{d t_\alpha}} \\
\frac{dy_2}{dx} &= \frac{G_2(x, t_\alpha, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\dfrac{\partial G(x, t_\alpha, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\partial t_\alpha}} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dy_m}{dx} &= \frac{G_m(x, t_\alpha, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\dfrac{\partial G(x, t_\alpha, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\partial t_\alpha}},
\end{aligned}
\right.
$$

worin G, G_1, $G_2 \ldots G_m$ *ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, und* t_α *der Reihe nach die* $N = \nu_1 . \nu_2 \ldots \nu_m$ *Lösungen der in der oben angegebenen Weise stets herstellbaren Gleichung* N^{ten} *Grades*

$$
(22) \qquad G(x, t, y_1, y_2, \ldots y_m) = 0
$$

darstellt; G_1, $G_2, \ldots G_m$ *sind in Bezug auf* t_α *vom* $N - 1^{\text{ten}}$ *Grade.*

Wir werden *ein solches System* (21) *von* m *Differentialgleichungen erster Ordnung von nun an ein normales Differentialgleichungsystem* m^{ter} *Klasse*, oder ein *Jacobi-Weierstrass'sches Differentialgleichungsystem* nennen.

3. Die Gleichung (22) kann nun mit Adjungirung der Grössen $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ eine in t algebraisch reductible sein*); mag die Lösung t_α einem irreductiblen Factor

---

*) So wird z. B. die nach den obigen Auseinandersetzungen für die algebraischen Functionen

$$
Y_1^2 = x, \qquad Y_1^4 = x
$$

durch die Substitution

$$
t = a_1 Y_1 + a_2 Y_2
$$

hergeleitete Gleichung in t

$$
t^8 - 4 a_1^2 x t^6 + 2x(3 a_1^4 x - a_2^4) t^4 - 4 a_1^2 x^2 (a_1^4 x + 3 a_2^4) t^2 + (a_1^4 x^2 - a_2^4 x)^2 = 0
$$

mit Adjungirung von x reductibel sein, indem sich dieselbe in die beiden Factoren zerlegt:

$$
\left(t^4 - 2 a_1^2 x t^2 - 4 a_1 a_2^2 x t + (a_1^4 x^2 - a_2^4 x)\right)
\left(t^4 - 2 a_1^2 x t^2 + 4 a_1 a_2^2 x t + (a_1^4 x^2 - a_2^4 x)\right) = 0,
$$

$$(23)\qquad g(x,\ t,\ y_1,\ y_2, \ldots y_m) = 0$$

angehören, so dass

$$(24)\qquad G(x,\ t,\ y_1,\ y_2, \ldots y_m) = g(x,\ t,\ y_1,\ y_2, \ldots y_m)\cdot h(x,\ t,\ y_1,\ y_2 \ldots y_m)$$

ist, so wird vermöge (23)

$$(25)\qquad \frac{\partial G(x, t_\alpha, y_1, y_2 \cdots y_m)}{\partial t_\alpha} = \frac{\partial g(x, t_\alpha, y_1, y_2 \cdots y_m)}{\partial t_\alpha} h(x,\ t_\alpha,\ y_1,\ y_2, \ldots y_m)$$

sein, worin die h-Function von Null verschieden ist, und es würde der Ausdruck (20) in

$$(26)\qquad Y_{\varrho\alpha} = \frac{G_\varrho(x, t_\alpha, y_1, y_2, \cdots y_m)}{h(x, t_\alpha, y_1, y_2, \cdots y_m)} \frac{1}{\frac{\partial g(x, t_\alpha, y_1, y_2, \cdots y_m)}{\partial t_\alpha}}$$

übergehen. Sei nun die Gleichung (23) in Bezug auf t vom Grade n, und seien ihre Lösungen $t_\alpha, t_\beta, \ldots t_\mu$, so wird in dem Ausdrucke

$$\frac{G_\varrho(x, t_\alpha, y_1, y_2, \cdots y_m)}{h(x, t_\alpha, y_1, y_2, \cdots y_m)} = \frac{G_\varrho(x, t_\alpha, y_1, \cdots y_m) h(x, t_\beta, y_1, \cdots y_m) \cdots h(x, t_\mu, y_1, \cdots y_m)}{h(x, t_\alpha, y_1 \cdots y_m) h(x, t_\beta, y_1, \cdots y_m) \cdots h(x, t_\mu, y_1 \cdots y_m)}$$

der Nenner als ganze symmetrische Function der Lösungen der Gleichung (23) sich als rationale Function von $x, y_1, y_2, \cdots y_m$ darstellen lassen, während im Zähler das Product der h-Functionen als ganze symmetrische Function der Lösungen der Gleichung

---

und es ist leicht zu sehen, dass dem einen Factor die vier Werthe

$$t_1 = a_1 \sqrt{x} + a_2 \sqrt[4]{x}, \quad t_2 = -a_1 \sqrt{x} + i a_2 \sqrt[4]{x},$$
$$t_3 = a_1 \sqrt{x} - a_2 \sqrt[4]{x}, \quad t_4 = -a_1 \sqrt{x} - i a_2 \sqrt[4]{x},$$

dem anderen

$$t_5 = -a_1 \sqrt{x} + a_2 \sqrt[4]{x}, \quad t_6 = a_1 \sqrt{x} + i a_2 \sqrt[4]{x},$$
$$t_7 = -a_1 \sqrt{x} - a_2 \sqrt[4]{x}, \quad t_8 = a_1 \sqrt{x} - i a_2 \sqrt[4]{x}$$

zugehören.

$$\frac{g(x, t, y_1, y_2, \ldots y_m)}{t - t_\alpha} = 0$$

sich als ganze Function von t_α darstellt mit in $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ rationalen Coefficienten, und somit der gesammte Zähler eben diesen Charakter behält und sich vermöge (23) noch in seinem Grade in Bezug auf t_α auf den $n - 1^{\text{ten}}$ reduciren lässt; es wird daher (26) die Form annehmen

$$(27) \qquad Y_{\varrho\alpha} = \frac{g^{(\varrho)}(x, t_\alpha, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\dfrac{\partial g(x, t_\alpha, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\partial t_\alpha}}.$$

Stellen wir dieses Resultat mit dem vorher gefundenen Satze zusammen, so ergiebt sich das nachfolgende Theorem:

Zerlegt man das Polynom der Gleichung (22) *in seine mit Adjungirung von* $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ *algebraisch irreductiblen Factoren*

$$(28) \qquad G(x, t, y_1, \ldots y_m)$$
$$= g_1(x, t, y_1, \ldots y_m)\, g_2(x, t, y_1, \ldots y_m) \ldots g_\sigma(x, t, y_1, \ldots y_m),$$

so kann man das System der vorgelegten Differentialgleichungen durch die $N = \nu_1 \cdot \nu_2 \ldots \nu_m$ *dem gegebenen völlig äquivalenten Systeme*

$$(29) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{g_{\lambda 1}(x, t_{\lambda\varrho}, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\dfrac{\partial g_\lambda(x, t_{\lambda\varrho}, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\partial t_{\lambda\varrho}}} \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{g_{\lambda 2}(x, t_{\lambda\varrho}, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\dfrac{\partial g_\lambda(x, t_{\lambda\varrho}, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\partial t_{\lambda\varrho}}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dy_m}{dx} = \dfrac{g_{\lambda m}(x, t_{\lambda\varrho}, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\dfrac{\partial g_\lambda(x, t_{\lambda\varrho}, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\partial t_{\lambda\varrho}}} \end{cases}$$

ersetzen, in welchem $g_\lambda, g_{\lambda 1}, \ldots g_{\lambda m}$ *ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten,* λ *die Werthe* $1, 2, \ldots \sigma$ *annimmt, und* $t_{\lambda\varrho}$ *der Reihe nach alle Lösungen der in* t *mit Adjungirung von* $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ *algebraisch irreductibeln Gleichung*

(30) $$g_\lambda(x, t, y_1, y_2, \ldots y_m) = 0$$

darstellt.

Es ist aber wesentlich hinzuzufügen, dass die Reduction des Differentialgleichungssystems I. (11) auf die Systeme (21) stets ausführbar, dass jedoch die Zurückführung auf die Systeme (29) im Allgemeinen nicht wirklich herstellbar ist, weil wir die Gleichung (22) im Allgemeinen nicht in ihre mit Adjungirung von $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ *irreductiblen* Factoren zerlegen können, und somit nur die Existenz solcher durch (29) und (30) dargestellter, dem Systeme I. (11) völlig äquivalenter Differentialgleichungssysteme durch das Vorige nachgewiesen ist. Bemerkt man aber ferner, dass man in einer irreductibeln Gleichung, wie es (30) sein soll, von einer t-Lösung ausgehend continuirlich zu allen t-Lösungen dieser Gleichung gelangt durch geschlossene Wege der Variabeln $x, y_1, y_2, \ldots y_m$, so wird man die Differentialgleichungssysteme (29), welche den verschiedenen Lösungen *einer* Gleichung (30) entsprechen, durch *ein* solches System repräsentirt denken können, und daher

das System I. (11) *durch die* σ *Differentialgleichungssysteme ersetzen können*

(31) $$\left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \frac{g_{\lambda 1}(x, t_\lambda, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\frac{\partial g_\lambda(x, t_\lambda, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\partial t_\lambda}} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_m}{dx} &= \frac{g_{\lambda m}(x, t_\lambda, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\frac{\partial g_\lambda(x, t_\lambda, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\partial t_\lambda}}, \end{aligned}\right.$$

worin t_λ *irgend eine Lösung der* σ *mit Adjungirung von* $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ *irreductibeln algebraischen Gleichungen* (30) *ist.*

Dass die Lösungen t *der Gleichungen* (30) *ebenso wie die der Gleichung* (22) *selbst wieder als lineare ganze Functionen der Ableitungen in der Form*

(32) $$t = a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + a_m \frac{dy_m}{dx}$$

darstellbar sind, geht aus (3) hervor, worin die verschiedenen

den Gleichungen I. (11), als algebraische Gleichungen in $\frac{dy}{dx}$ aufgefasst, genügenden Werthe der Differentialquotienten die verschiedenen t-Werthe liefern werden.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die Einführung einer solchen Grösse t nicht daran gebunden ist, dass dieselbe eine *lineare* Function von $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ ist, sondern dass alle unsere Schlüsse unverändert bleiben, so lange nur t eine *rationale* Function von $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ ist, und sich diese letzteren Grössen durch eine bestimmte Anzahl dem t gleichgestalteter Ausdrücke $u, v, w, \ldots$ wiederum rational ausdrücken lassen, wobei in alle diese rationalen Functionen auch wieder $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ rational eintreten dürfen. Sei nun t_1 eine solche Grösse, welche eine Lösung der mit Adjungirung von $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ irreductiblen Gleichung ist

$$(33) \qquad t^n + \mathfrak{r}_1(x, y_1, \ldots y_m)t^{n-1} + \cdots \mathfrak{r}_n(x, y_1, \ldots y_m) = 0,$$

in welcher $\mathfrak{r}_1, \ldots \mathfrak{r}_n$ rationale Functionen bedeuten, und für welche

$$(34) \qquad Y_1 = r_1(x, y_1, \cdots y_m, t_1), \cdots Y_m = r_m(x, y_1, \cdots y_m, t_1)$$

und

$$(35) \qquad t_1 = r(x, y_1, \cdots y_m, Y_1, \cdots Y_m),$$

worin $r, r_1, \ldots r_m$ wiederum rationale Functionen sind; seien ferner mit Hülfe einer anderen Grösse τ_1, welche die Lösung einer mit Adjungirung derselben Grössen irreductiblen Gleichung

$$(36) \qquad \tau^\nu + \varrho_1(x, y_1, \ldots y_m)\tau^{\nu-1} + \cdots + \varrho_\nu(x, y_1, \cdots y_m) = 0$$

ist, $Y_1, \ldots Y_m$ wiederum rational in der Form dargestellt

$$(37) \qquad Y_1 = R_1(x, y_1, \cdots y_m, \tau_1), \cdots Y_m = R_m(x, y_1, \cdots y_m, \tau_1),$$

während

$$(38) \qquad \tau_1 = R(x, y_1, \cdots y_m, Y_1, \cdots Y_m)$$

ist, so erhält man durch Einsetzen der Werthe (34) in (38) mit Benutzung der Gleichung (33), indem man die rationale Function von t_1 wie oben in eine ganze und wiederum vermittels der Gleichung (33) in eine solche $n - 1^{\text{ten}}$ Grades verwandelt,

$$(39)\qquad \tau_1 = \mathfrak{R}_0(x, y_1, \cdots y_m) + \mathfrak{R}_1(x, y_1, \cdots y_m)t_1 + \cdots + \mathfrak{R}_{n-1}(x, y_1 \cdots y_m)t_1^{n-1},$$

worin $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_{n-1}$ rationale Functionen bedeuten. Da man aber aus den Gleichungen (39) und (33) durch Elimination von t_1, wie unmittelbar ersichtlich, eine Gleichung n^{ten} Grades in τ_1 erhält, deren Coefficienten rational aus $x, y_1, \ldots y_m$ zusammengesetzt sind, so folgt, dass ν nicht grösser als n sein kann, weil die irreductible Gleichung (36) sonst mit der Gleichung niederen Grades die Lösung τ_1 gemein hätte, was nicht angeht; ebensowenig kann n grösser als ν sein, was genau so folgt, wenn man die Werthe (37) in (35) einsetzt — es muss also $n = \nu$ sein, und wir finden somit,

dass, wenn man die m algebraischen Functionen $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ von $x, y_1, \ldots y_m$ als rationale Functionen von zwei verschiedenen Grössen t_1 und τ_1 so darstellt, dass jede dieser sich auch wieder mit Adjungirung jener Grössen $x, y_1, \ldots y_m$ als rationale Function von $Y_1, \ldots Y_m$ ausdrücken lässt, die beiden die Grössen t_1 und τ_1 definirenden, mit Adjungirung von $x, y_1, \ldots y_m$ irreductiblen Gleichungen stets von demselben Grade n sind; wir können daher in dem angegebenen Sinne sagen, die algebraischen Functionen $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ gehören zum Grade n.

Mit Rücksicht hierauf werden wir das Differentialgleichungsystem (31), wenn die irreductible Gleichung (30) vom μ^{ten} Grade in Bezug auf t ist, *ein System m^{ter} Klasse und μ^{ten} Grades* nennen.

4. Hat man es wieder mit *einer* Differentialgleichung *höherer Ordnung*

$$(40)\qquad F\left(x, z, \frac{dz}{dx} \cdots \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0$$

zu thun, welche in $\frac{d^n z}{dx^n}$ vom k^{ten} Grade sein mag, so wird das Differentialgleichungsystem I. (13) nach der oben aufgestellten *Normalform* (21), (22) den folgenden k Differentialgleichungsystemen äquivalent sein:

$$(41)\qquad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3 \cdots \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \quad \frac{dy_n}{dx} = t,$$

worin t alle Lösungen der Gleichung

$$F(x, y_1, y_2, \cdots y_n, t) = 0 \tag{42}$$

bedeuten wird, und durch Zerlegung von (42) in die mit Adjungirung von $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ irreductibeln Factoren erhält man die den Systemen (31) entsprechenden Darstellungen, wobei man wegen der Analogie mit den Normalsystemen die Gleichungen (41) noch auf beiden Seiten mit

$$\frac{\partial F(x, y_1, y_2, \ldots y_n, t)}{\partial t}$$

multiplicirt denken muss.

III. Definition und Existenzbeweis der Integrale von Differentialgleichungsystemen beliebiger Klasse.

1. Sei nun ein Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse in der Normalform vorgelegt:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \cdots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_1}{dx} = G_1(x, t_1, y_1, \cdots y_m) \\ \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \cdots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_2}{dx} = G_2(x, t_1, y_1, \cdots y_m) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \cdots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_m}{dx} = G_m(x, t_1, y_1, \cdots y_m), \end{cases}$$

worin t_1 eine Lösung der Gleichung

$$G(x, t_1, y_1, \cdots y_m) = 0 \tag{2}$$

oder

$$(3)\quad \mathfrak{G}_0(x, y_1, \cdots y_m)\, t^n + \mathfrak{G}_1(x, y_1, \cdots y_m)\, t^{n-1} + \cdots + \mathfrak{G}_n(x, y_1, \cdots y_m) = 0$$

ist, in der $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_n$ ganze Functionen bedeuten, so ist zunächst klar, dass, wenn wir irgend einem bestimmt gewählten Werthe ξ von x die beliebig gewählten Werthe $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ von $y_1, y_2, \ldots y_m$ zuordnen, die nur der Bedingung unterliegen, dass die dem Zweige t_1 entsprechende Lösung τ_1 der Gleichung

$$G(\xi, t_1, \eta_1, \ldots \eta_m) = 0 \tag{4}$$

eine endliche — was stets der Fall sein wird, wenn

$$\mathfrak{G}_0(\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m)$$

von Null verschieden — und zugleich eine einfache ist, den Differentialgleichungen gemäss die nächsten einem Incremente dx von ξ entsprechenden y-Werthe fest bestimmt sind. Denn da für den dem Werthesystem $\xi, \eta_1, \ldots \eta_m$ zugehörigen endlichen Werth τ_1 der zweiten Bedingung gemäss bekanntlich

$$\left(\frac{\partial G(\xi, t_1, \eta_1, \ldots \eta_m)}{\partial t_1}\right)_{t_1=\tau_1}$$

von Null verschieden sein muss, so folgt aus den Differentialgleichungen (1)

$$(5)\begin{cases} dy_1 = G_1(\xi, \tau_1, \eta_1, \cdots \eta_m)\, dx : \left(\dfrac{\partial G(\xi, t_1, \eta_1, \ldots \eta_m)}{\partial t_1}\right)_{t_1=\tau_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dy_m = G_m(\xi, \tau_1, \eta_1, \cdots \eta_m)\, dx : \left(\dfrac{\partial G(\xi, t_1, \eta_1, \ldots \eta_m)}{\partial t_1}\right)_{t_1=\tau_1}, \end{cases}$$

und es ist somit den Differentialgleichungen entsprechend das dem Werthe $\xi + dx$ zugehörige Werthesystem der abhängigen Variabeln $\eta_1 + dy_1, \eta_2 + dy_2, \cdots \eta_m + dy_m$ gefunden. Nehmen wir an, dass für diese neue Werthecombination ebenfalls die beiden oben angegebenen Bedingungen erfüllt sind, so wird man zu einem nächsten benachbarten x-Punkte wiederum die den Differentialgleichungen gemäss bestimmten entsprechenden Werthe von $y_1, \ldots y_m$ finden können u. s. w. Zieht man also von ξ aus in der x-Ebene irgend eine Curve, so werden unter der Voraussetzung, dass jene beiden Bedingungen längs dieser Linie erfüllt sind oder dass, wie wir es von nun an ausdrücken werden, *die sich ergebenden Werthesysteme von $x, y_1, \ldots y_m$ längs dieser Linie nicht singuläre sind,* die Werthe der Grössen $y_1, y_2, \ldots y_m$ den Differentialgleichungen entsprechend für alle Punkte dieser Linie bestimmt werden können. *Aber das Problem der Integration eines Differentialgleichungsystems besteht nicht in der längs einer Linie punktweise ausgeführten Werthebestimmung der abhängigen Variabeln, sondern sucht $y_1, y_2, \ldots y_m$ so als Functionen der complexen Variabeln x zu bestimmen, dass dem Systeme* (1), (2) *für alle x innerhalb bestimmter Flächenräume identisch Genüge geschieht.*

Ob und wie dies möglich ist, wird zu untersuchen sein.

2. Wir schicken der nachfolgenden Auseinandersetzung einen Hülfsatz voraus. Sei eine algebraische Gleichung

(6) $$G(t, z_1, z_2, \cdots z_n) = 0$$

zwischen der abhängigen Variabeln t und den unabhängigen Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ gegeben, und mag den Werthen $z_1 = \zeta_1, \cdots z_n = \zeta_n$ als eine der Lösungen der algebraischen Gleichung der *endliche* Werth $t = \tau_1$ entsprechen, — τ_1 wird stets endlich sein, wenn der Coefficient der höchsten Potenz von t für das Werthesystem $\zeta_1, \ldots \zeta_n$ von Null verschieden ist, — werde ferner angenommen, dass

$$\frac{\partial G(t, z_1, \ldots z_n)}{\partial t}$$

für das Werthesystem $\tau_1, \zeta_1, \ldots \zeta_n$ von Null verschieden sei. d. h. dass die Gleichung

(7) $$G(t, \zeta_1, \cdots \zeta_n) = 0$$

die Lösung τ_1 nur einfach habe, so soll untersucht werden, welches die analytische Entwicklung derjenigen Lösung der algebraischen Gleichung (6) ist, welche für $z_1 = \zeta_1, \cdots z_n = \zeta_n$ den Werth τ_1 annimmt.

Setzt man die ganze Function (6) in die Form

(8) $$\begin{aligned} & a_0(t-\tau_1) + a_1(z_1-\zeta_1) + a_2(z_2-\zeta_2) + \cdots + a_n(z_n-\zeta_n) \\ & + a_{00}(t-\tau_1)^2 + a_{11}(z_1-\zeta_1)^2 + \cdots + a_{nn}(z_n-\zeta_n)^2 \\ & + a_{01}(t-\tau_1)(z_1-\zeta_1) + \cdots + a_{n-1\,n}(z_{n-1}-\zeta_{n-1})(z_n-\zeta_n) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{0\ldots0}(t-\tau_1)^\nu + a_{1\ldots1}(z_1-\zeta_1)^\nu + \cdots = 0, \end{aligned}$$

worin ν die höchste Dimension der Gleichung (6) bedeutet, und sei A der grösste der Moduln der Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$, unter denen

(9) $$\operatorname{mod} a_0 = \operatorname{mod}\left(\frac{\partial G(t, z_1, z_2, \ldots z_n)}{\partial t}\right)_{\tau_1, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n} = a$$

der Annahme nach von Null verschieden ist, so soll es sich darum handeln, die durch (8) definirte Function t von $z_1, z_2, \ldots z_n$ mit derjenigen Function u von $z_1, z_2, \ldots z_n$ zu vergleichen, welche durch die Beziehung

(10) $$\begin{aligned} & a(u-\tau_1) - A(z_1-\zeta_1) - A(z_2-\zeta_2) - \cdots - A(z_n-\zeta_n) \\ & - A(u-\tau_1)^2 - A(z_1-\zeta_1)^2 - \cdots - A(z_n-\zeta_n)^2 \\ & - A(u-\tau_1)(z_1-\zeta_1) - \cdots - A(z_{n-1}-\zeta_{n-1})(z_n-\zeta_n) \\ & - A(u-\tau_1)^3 - \cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots \text{ in inf.} = 0 \end{aligned}$$

definirt ist, deren linke Seite in's Unendliche fortläuft, und die wir durch die Gleichung

$$(11)\quad (a+A)(u-\tau_1)-A\{(1+(u-\tau_1)+(u-\tau_1)^2+\cdots)\cdot (1+(z_1-\zeta_1)+(z_1-\zeta_1)^2+\cdots)\cdot \cdots(1+(z_n-\zeta_n)+(z_n-\zeta_n)^2+\cdots)-1\}=0$$

ersetzen können, welche um $\tau_1, \zeta_1, \ldots \zeta_n$ herum convergent ist.

Bildet man nun die partiellen Differentialquotienten von t resp. u nach $z_1, z_2, \ldots z_n$, so folgt aus (8)

$$(12)\quad \begin{cases} a_0\frac{\partial t}{\partial z_1}+a_1+2a_{00}(t-\tau_1)\frac{\partial t}{\partial z_1}+2a_{11}(z_1-\zeta_1) \\ \qquad +a_{01}(z_1-\zeta_1)\frac{\partial t}{\partial z_1}+a_{01}(t-\tau_1)+\cdots=0 \\ a_0\frac{\partial^2 t}{\partial z_1^2}+2a_{00}\left(\frac{\partial t}{\partial z_1}\right)^2+2a_{00}(t-\tau_1)\frac{\partial^2 t}{\partial z_1^2}+2a_{11} \\ \qquad +a_{01}\frac{\partial t}{\partial z_1}+a_{01}(z_1-\zeta_1)\frac{\partial^2 t}{\partial z_1^2}+a_{01}\frac{\partial t}{\partial z_1}+\cdots=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0\frac{\partial^2 t}{\partial z_1\partial z_2}+2a_{00}\frac{\partial t}{\partial z_1}\frac{\partial t}{\partial z_2}+2a_{00}(t-\tau_1)\frac{\partial^2 t}{\partial z_1\partial z_2} \\ \qquad +a_{01}(z_1-\zeta_1)\frac{\partial^2 t}{\partial z_1\partial z_2}+a_{01}\frac{\partial t}{\partial z_2}+a_{12}+\cdots=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und analog aus (10)

$$(13)\quad \begin{cases} a\frac{\partial u}{\partial z_1}-A-2A(u-\tau_1)\frac{\partial u}{\partial z_1}-2A(z_1-\zeta_1)-A(z_1-\zeta_1)\frac{\partial u}{\partial z_1} \\ \qquad -A(u-\tau_1)+\cdots=0 \\ a\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}-2A\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)^2-2A(u-\tau_1)\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}-2A-A\frac{\partial u}{\partial z_1} \\ \qquad -A(z_1-\zeta_1)\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}-A\frac{\partial u}{\partial z_1}-\cdots=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a\frac{\partial^2 u}{\partial z_1\partial z_2}-2A\frac{\partial u}{\partial z_1}\frac{\partial u}{\partial z_2}-2A(u-\tau_1)\frac{\partial^2 u}{\partial z_1\partial z_2} \\ \qquad -A(z_1-\zeta_1)\frac{\partial^2 u}{\partial z_1\partial z_2}-A\frac{\partial u}{\partial z_2}-A-\cdots=0, \end{cases}$$

und somit nach der Definition der Grösse A und mit Rücksicht auf die Beziehung (9), wenn der Werth einer Grösse P für $t=\tau_1$, $u=\tau_1$, $z_1=\zeta_1$, $\cdots z_n=\zeta_n$ durch die Klammer $(P)_1$ angedeutet werden soll,

$$a \bmod \left(\frac{\partial t}{\partial z_1}\right)_1 = \bmod a_1 < A < a\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)_1$$

$$a \bmod \left(\frac{\partial^2 t}{\partial z_1{}^2}\right)_1 < 2 \bmod a_{00} \bmod \left(\frac{\partial t}{\partial z_1}\right)_1^2 + 2 \bmod a_{11}$$

$$+ \bmod a_{01} \bmod \left(\frac{\partial t}{\partial z_1}\right)_1$$

$$+ \bmod a_{01} \bmod \left(\frac{\partial t}{\partial z_1}\right)_1$$

$$< 2A\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)_1^2 + 2A + A\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)_1 + A\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)_1$$

$$< a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_1{}^2}\right)_1$$

. . . .

$$a \bmod \left(\frac{\partial^2 t}{\partial z_1 \partial z_2}\right)_1 < 2 \bmod a_{00} \bmod \left(\frac{\partial t}{\partial z_1}\right)_1 \bmod \left(\frac{\partial t}{\partial z_2}\right)_1$$

$$+ \bmod a_{01} \bmod \left(\frac{\partial t}{\partial z_2}\right)_1 + \bmod a_{12}$$

$$< 2A\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z_2}\right)_1 + A\left(\frac{\partial u}{\partial z_2}\right)_1 + A$$

$$< a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial z_2}\right)_1,$$

u. s. w., allgemein

$$\bmod \left(\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n} t}{\partial z_1{}^{\nu_1} \partial z_2{}^{\nu_2} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}\right)_1 < \left(\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n} u}{\partial z_1{}^{\nu_1} \partial z_2{}^{\nu_2} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}\right)_1. \tag{14}$$

Bildet man nun mittels der aus den Gleichungen (13) abgeleiteten Werthe der partiellen Differentialquotienten die Reihe

$$U = \tau_1 + (z_1 - \zeta_1)\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)_1 + \cdots + (z_n - \zeta_n)\left(\frac{\partial u}{\partial z_n}\right)_1 \tag{15}$$

$$+ \frac{1}{2!}\left((z_1 - \zeta_1)\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)_1 + \cdots + (z_n - \zeta_n)\left(\frac{\partial u}{\partial z_n}\right)_1\right)^2 + \cdots$$

mit Benutzung der gebräuchlichen symbolischen Bezeichnung, so folgt, weil aus (15) sich

$$\left(\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n} U}{\partial z_1{}^{\nu_1} \partial z_2{}^{\nu_2} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}\right)_1 = \left(\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n} u}{\partial z_1{}^{\nu_1} \partial z_2{}^{\nu_2} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}\right)_1 \tag{16}$$

ergiebt, und die letzteren Differentialquotienten durch successive Differentiation aus der Gleichung (10) abgeleitet worden, also nichts anderes ausdrücken, als dass u nicht bloss für $z_1 = \zeta_1, \cdots z_n = \zeta_n$, sondern auch für die weitere Fortsetzung

dieser Variabeln der Gleichung (10) genügen soll, dass U in der Umgebung von $\zeta_1, \ldots \zeta_n$ die Gleichung (10) befriedigen wird, wenn nur noch die Convergenz der Reihe

$$(17)\quad u = \tau_1 + (z_1 - \zeta_1)\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)_1 + \cdots + (z_n - \zeta_n)\left(\frac{\partial u}{\partial z_n}\right)_1 + \frac{1}{2!}\left((z_1 - \zeta_1)\left(\frac{\partial u}{\partial z_1}\right)_1 + \cdots + (z_n - \zeta_n)\left(\frac{\partial u}{\partial z_n}\right)_1\right)^2 + \cdots$$

in der Umgebung dieser Werthe festgestellt sein wird. Da sich aber (11) in die Form setzen lässt

$$(18)\quad (a + A)(u - \tau_1) + A - \frac{A}{1 - (u - \tau_1)}\big(1 + (z_1 - \zeta_1) + \cdots + (z_n - \zeta_n) + (z_1 - \zeta_1)^2 + \cdots + (z_1 - \zeta_1)(z_2 - \zeta_2) + \cdots\big) = 0$$

für hinreichend den Werthen $\tau_1, \zeta_1, \ldots \zeta_n$ benachbarte Werthe von $u, z_1, \ldots z_n$, oder

$$(19)\quad u - \tau_1 = \frac{a}{2(a+A)}\left\{1 - \left(1 - \frac{4A(a+A)}{a^2}\Big[z_1 - \zeta_1 + \cdots + z_n - \zeta_n + (z_1 - \zeta_1)^2 + \cdots + (z_1 - \zeta_1)(z_2 - \zeta_2) + \cdots\Big]\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

und sich bekanntlich

$$(1 - v)^{\frac{1}{2}}$$

für alle v, deren Modul < 1 ist, in eine nach ganzen positiven steigenden Potenzen von v fortschreitende Reihe entwickeln lässt, so wird u in der Umgebung von $\zeta_1, \ldots \zeta_n$ in eine Potenzreihe nach $z_1 - \zeta_1, \cdots z_n - \zeta_n$ entwickelbar sein und dann, wie bekannt, die Form (17) haben müssen, so dass diese letztere Reihe als convergent nachgewiesen ist. Bildet man nunmehr mit Hülfe der aus (12) abgeleiteten Werthe der partiellen Differentialquotienten von t nach $z_1, \ldots z_n$ genommen die Reihe

$$(20)\quad T = \tau_1 + (z_1 - \zeta_1)\left(\frac{\partial t}{\partial z_1}\right)_1 + \cdots + (z_n - \zeta_n)\left(\frac{\partial t}{\partial z_n}\right)_1 + \frac{1}{2!}\left((z_1 - \zeta_1)\left(\frac{\partial t}{\partial z_1}\right)_1 + \cdots + (z_n - \zeta_n)\left(\frac{\partial t}{\partial z_n}\right)_1\right)^2 + \cdots,$$

so wird vermöge der Ungleichheiten (14), weil Potenzreihen zugleich mit der Reihe ihrer Moduln convergiren, mit (17) auch die Reihe (20) jedenfalls in der früher festgestellten Umgebung convergent sein, und zugleich wieder wegen der succes-

sive aus (8) abgeleiteten Differentialquotienten, genau wie oben, $T = t$ sein, so dass für die Gleichung (8) oder (6) die in der Umgebung von $\zeta_1, \ldots \zeta_n$ convergirende Reihe

$$(21) \quad t = \tau_1 + (z_1 - \zeta_1)\left(\frac{\partial t}{\partial z_1}\right)_1 + \cdots + (z_n - \zeta_n)\left(\frac{\partial t}{\partial z_n}\right)_1$$
$$+ \frac{1}{2!}\left((z_1 - \zeta_1)\left(\frac{\partial t}{\partial z_1}\right)_1 + \cdots + (z_n - \zeta_n)\left(\frac{\partial t}{\partial z_n}\right)_1\right)^2 + \cdots$$

die Entwicklung derjenigen Lösung t ist, welche für $z_1 = \zeta_1, \cdots z_n = \zeta_n$ den Wert τ_1 annimmt. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Wenn in der algebraischen Gleichung

$$G(t, z_1, z_2, \cdots z_n) = 0$$

dem Werthesystem $z_1 = \zeta_1, z_2 = \zeta_2, \ldots z_n = \zeta_n$ *ein endlicher Werth* τ_1 *von* t *entspricht von der Beschaffenheit, dass nicht auch*

$$\frac{\partial G(t, z_1, z_2, \ldots z_n)}{\partial t}$$

für das Werthesystem $t = \tau_1, z_1 = \zeta_1, \cdots z_n = \zeta_n$ *verschwindet, also* τ_1 *eine einfache endliche Lösung der Gleichung*

$$G(t, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n) = 0$$

ist, so lässt sich dieser Zweig t *der algebraischen Function von* $z_1, z_2, \ldots z_n$ *in der Umgebung von* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ *in eine nach positiven ganzen steigenden Potenzen von* $z_1 - \zeta_1, z_2 - \zeta_2, \cdots z_n - \zeta_n$ *fortschreitende Reihe entwickeln.*

Man sieht zugleich unmittelbar, dass, wenn wir nicht von der algebraischen Gleichung (6) ausgegangen wären, sondern t als Function von $z_1, z_2, \ldots z_n$ in der Umgebung von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ durch die Gleichung (8) definirt hätten, wir für diese letztere auch eine in's Unendliche fortlaufende convergente Reihe von ganzen Potenzen von

$$t - \tau_1, \; z_1 - \zeta_1, \; z_2 - \zeta_2, \cdots z_n - \zeta_n$$

hätten wählen können, ohne dass die weiteren Schlüsse irgend welche Aenderung erfahren hätten*), und

*) weil man, wie wir gleich nachher sehen werden, ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen darf, dass die Coefficienten dieser unendlichen Reihe sämmtlich unter einer bestimmten endlichen Grenze liegen.

es gilt also der eben ausgesprochene Satz auch dann, wenn die algebraische Gleichung (6) *durch eine nach positiven steigenden ganzen Potenzen der bezeichneten Grössen fortlaufende unendliche Reihe, d. h. durch eine in der Umgebung der Werthe* $\tau_1, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ *eindeutige Function von* $t, z_1, z_2, \ldots z_n$ *ersetzt wird, die für diese Werthe selbst verschwindet.*

3. Gehen wir nunmehr zu dem Differentialgleichungsystem (1) zurück und suchen festzustellen, ob für einen willkürlich gegebenen Werth $x = \xi$ functionale Ausdrücke für $y_1, y_2, \ldots y_m$ existiren, welche in (1), (2) eingesetzt diesen Gleichungen in der Umgebung von ξ für einen ganzen Flächentheil der complexen Variabeln x Genüge leisten. Zunächst konnte ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Untersuchung angenommen werden, dass die Gleichung (2) nicht gleiche Lösungen habe, oder dass nicht mit (2) zugleich für willkürliche $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ die Gleichung bestehe

$$\frac{\partial G(x, t, y_1, \ldots y_m)}{\partial t} = 0, \tag{22}$$

da wir im entgegengesetzten Falle durch rationale algebraische Operationen die Gleichung (2) von der Vielfachheit der Lösungen befreien konnten. Mögen nun dem willkürlichen Werthe $x = \xi$ die ebenfalls willkürlichen Werthe $y_1 = \eta_1, y_2 = \eta_2, \cdots y_m = \eta_m$ zugeordnet werden, die nur der Beschränkung unterliegen sollen, dass der in Betracht kommende Zweig t_1 der durch die Gleichung (2) definirten Function t von $x, y_1, \ldots y_m$ für $x = \xi, y_1 = \eta_1, \cdots y_m = \eta_m$ den *endlichen* und *einfachen* Wurzelwerth τ_1 der Gleichung

$$G(\xi, t_1, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m) = 0 \tag{23}$$

annehme, so dass also

$$\left(\frac{\partial G(\xi, t_1, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m)}{\partial t_1}\right)_{t_1 = \tau_1}$$

von Null verschieden ist.

Nach dem eben bewiesenen Hülfsatze wird sich der zugehörige Zweig t_1 der Gleichung (2) in Folge der gemachten Annahme in eine um $\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ innerhalb bestimmter Kreise mit den resp. Radien $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_m$ convergirende Potenzreihe von der Form entwickeln lassen

$$(24)\quad \begin{aligned} t_1 = \tau_1 &+ a_0(x-\xi) + a_1(y_1-\eta_1) + \cdots + a_m(y_m-\eta_m) \\ &+ a_{00}(x-\xi)^2 + a_{11}(y_1-\eta_1)^2 + \cdots + a_{mm}(y_m-\eta_m)^2 \\ &+ a_{01}(x-\xi)(y_1-\eta_1) + \cdots \\ &+ a_{m-1\,m}(y_{m-1}-\eta_{m-1})(y_m-\eta_m) + a_{000}(x-\xi)^3 \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \end{aligned}$$

und somit, wenn diese Entwicklung von t_1 in die dem Systeme (1) zugehörigen Functionen

$$G_\alpha(x, t_1, y_1, y_2, \ldots y_m) \text{ und } \frac{\partial G(x, t_1, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\partial t_1}$$

eingesetzt wird, sich

$$(25)\quad \frac{G_\alpha(x, t_1, y_1, y_2, \cdots y_m)}{\frac{\partial G(x, t_1, y_1, y_2, \cdots y_m)}{\partial t_1}} = \frac{A_\alpha + R_\alpha(x-\xi, y_1-\eta_1, y_2-\eta_2, \cdots y_m-\eta_m)}{a + r(x-\xi, y_1-\eta_1, y_2-\eta_2, \cdots y_m-\eta_m)}$$

ergeben, worin R_α und r nach positiven ganzen steigenden Potenzen der eingeschlossenen Grössen fortschreitende, für $x=\xi, y_1=\eta_1, \cdots y_m=\eta_m$ verschwindende Reihen, und A_α, a Constanten sind, von denen die letztere durch den Ausdruck

$$(26)\qquad a = \left(\frac{\partial G(x, t_1, y_1, y_2, \ldots y_m)}{\partial t_1}\right)_{\xi, \tau_1, \eta_1, \ldots \eta_m}$$

bestimmt ist. Da aber der Annahme nach a von Null verschieden ist, so lässt sich wiederum nach dem vorigen Hülfsatze die rechte Seite der Gleichung (25) in eine nach steigenden positiven ganzen Potenzen von $x-\xi, y_1-\eta_1, \cdots y_m-\eta_m$ fortschreitende, in der Umgebung von $\xi, \eta_1, \ldots \eta_m$ in Kreisen convergirende Reihe entwickeln, so dass die Gleichungen (1) in der Umgebung dieser Punkte durch das Differentialgleichungsystem

$$(27)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = r_1(x-\xi, y_1-\eta_1, \cdots y_m-\eta_m) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = r_2(x-\xi, y_1-\eta_1, \cdots y_m-\eta_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_m}{dx} = r_m(x-\xi, y_1-\eta_1, \cdots y_m-\eta_m) \end{cases}$$

ersetzt werden können, worin $r_1, r_2, \ldots r_m$ wieder Potenzreihen bedeuten, die innerhalb der mit den resp. Radien $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \ldots \mathfrak{r}_m$

um $\xi, \eta_1, \ldots \eta_m$ gelegten Kreise convergiren mögen. Transformiren wir, um eine kürzere Schreibweise für den nachfolgenden Beweis zu ermöglichen, das Differentialgleichungsystem (27) durch die Substitution

$$(28) \quad x - \xi = \varrho X, \quad y_1 - \eta_1 = \varrho Y_1, \cdots y_m - \eta_m = \varrho Y_m,$$

worin ϱ kleiner als die kleinste der Grössen $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \ldots \mathfrak{r}_m$ sein soll, so erhalten wir

$$(29) \quad \begin{cases} \dfrac{dY_1}{dX} = \mathfrak{R}_1(X, Y_1, Y_2, \cdots Y_m) \\ \dfrac{dY_2}{dX} = \mathfrak{R}_2(X, Y_1, Y_2, \cdots Y_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dY_m}{dX} = \mathfrak{R}_m(X, Y_1, Y_2, \cdots Y_m), \end{cases}$$

worin $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots \mathfrak{R}_m$ nach positiven ganzen Potenzen von $X, Y_1, \ldots Y_m$ fortschreitende Reihen bedeuten, deren Convergenzkreise nach (28) um die Nullpunkte dieser Variabeln gelegt sind, und deren Convergenzradien der Grössenbestimmung von ϱ zufolge grösser als die Einheit sind. Daraus folgt aber, dass diese Reihen auch convergent sind, wenn $X = Y_1 = \cdots = Y_m = 1$ gesetzt wird, d. h. dass die Reihen der Coefficienten an sich convergiren, und deren Moduln also sämmtlich unter einer bestimmten endlichen positiven Zahl A liegen müssen. Stellt man nun das System (29) mit den Differentialgleichungen

$$(30) \quad \begin{cases} \dfrac{dZ_1}{dX} = A\{1 + X + Z_1 + \cdots + Z_m + X^2 + Z_1^2 + \cdots \\ \qquad\qquad + Z_m^2 + XZ_1 + \cdots + Z_{m-1}Z_m + \cdots\} \\ \dfrac{dZ_2}{dX} = A\{1 + X + Z_1 + \cdots + Z_m + X^2 + Z_1^2 + \cdots \\ \qquad\qquad + Z_m^2 + XZ_1 + \cdots + Z_{m-1}Z_m + \cdots\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dZ_m}{dX} = A\{1 + X + Z_1 + \cdots + Z_m + X^2 + Z_1^2 + \cdots \\ \qquad\qquad + Z_m^2 + XZ_1 + \cdots + Z_{m-1}Z_m + \cdots\} \end{cases}$$

zusammen, so sieht man unmittelbar durch den auf die beiden

Systeme (29) und (30) wiederholt ausgeführten Differentiationsprocess, genau wie oben für algebraische Gleichungen gezeigt worden, dass

$$\text{(31)} \qquad \operatorname{mod}\left(\frac{d^r Y_\lambda}{dX^r}\right)_0 < \left(\frac{d^r Z_\lambda}{dX^r}\right)_0;$$

da aber aus (30)

$$\frac{dZ_1}{dX} = \frac{dZ_2}{dX} = \cdots = \frac{dZ_m}{dX},$$

also, da die Nullwerthe sich entsprechen sollen,

$$\text{(32)} \qquad Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_m = Z$$

folgt, so wird Z durch die Differentialgleichung definirt sein

$$\text{(33)} \quad \frac{dZ}{dX} = A(1 + X + X^2 + \cdots)(1 + Z + Z^2 + \cdots)^m$$

oder durch

$$\text{(34)} \qquad \frac{dZ}{dX} = \frac{A}{(1-Z)^m}(1 + X + X^2 + \cdots).$$

Da nun mit Zuordnung von $X = 0$, $Z = 0$ die Beziehung

$$\text{(35)} \quad (1-Z)^{m+1} = 1 - A(m+1)(X + \tfrac{1}{2}X^2 + \tfrac{1}{3}X^3 + \cdots),$$

wie durch Differentiation ersichtlich, der Gleichung (34) Genüge leistet, diese aber auch in die Form gesetzt werden kann

$$\text{(36)} \quad Z = 1 - \{1 - A(m+1)(X + \tfrac{1}{2}X^2 + \tfrac{1}{3}X^3 + \cdots)\}^{\frac{1}{m+1}},$$

und somit für hinreichend kleine X die Function Z in eine Potenzreihe von X, also in eine Reihe von der Form

$$\text{(37)} \qquad Z = \frac{X}{1!}\left(\frac{dZ}{dX}\right)_0 + \frac{X^2}{2!}\left(\frac{d^2Z}{dX^2}\right)_0 + \cdots$$

verwandelt werden kann, so folgt zunächst wieder aus der Ungleichheit (31), dass jedenfalls auch die Reihe

$$\text{(38)} \qquad H_\lambda = \frac{X}{1!}\left(\frac{dY_\lambda}{dX}\right)_0 + \frac{X^2}{2!}\left(\frac{d^2Y_\lambda}{dX^2}\right)_0 + \cdots$$

um $X = 0$ herum convergent sein wird.

Da aber in dieser Reihe unter

$$\left(\frac{dY_\lambda}{dX}\right)_0, \left(\frac{d^2Y_\lambda}{dX^2}\right)_0, \cdots$$

diejenigen Werthe verstanden sind, welche aus dem Systeme (29) durch successive Differentiation entstehen, so wird H_λ

eine Function von X definiren, für welche die *sämmtlichen* Differentialquotienten für $X = 0$, also sämmtliche *erste* Differentialquotienten für beliebige X in der Umgebung dieses Punktes dem Systeme von Differentialgleichungen (29) genügen, und somit

$$(39) \qquad Y_\lambda = \frac{X}{1!}\left(\frac{dY_\lambda}{dX}\right)_0 + \frac{X^2}{2!}\left(\frac{d^2Y_\lambda}{dX^2}\right)_0 + \cdots$$

λ um $X = 0$ convergente Reihen darstellen, welche das Differentialgleichungsystem (29) befriedigen und *Integrale dieses Systemes* genannt werden. Wäre

$$(40) \qquad \left(\frac{dY_\lambda}{dX}\right)_0 = \left(\frac{d^2Y_\lambda}{dX^2}\right)_0 = \left(\frac{d^3Y_\lambda}{dX^3}\right)_0 = \cdots = 0,$$

so würde Y_λ constant gleich Null sein, und sich dann aus der Differentialgleichung

$$\frac{dY_\lambda}{dX} = \Re_\lambda(X, Y_1, Y_2, \cdots Y_m)$$

für willkürliche in der Umgebung des Nullpunktes gelegene Werthe des X zwischen den übrigen Integralen $Y_1, Y_2, \ldots Y_{\lambda-1}, Y_{\lambda+1}, \cdots Y_m$ die Beziehung

$$(41) \qquad R_\lambda(X, Y_1, \cdots Y_{\lambda-1}, 0, Y_{\lambda+1}, \cdots Y_m) = 0$$

ergeben; verschwinden jedoch die Grössen (40) für jedes λ, so dass

$$(42) \qquad Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_m = 0$$

ist in der Umgebung von $X = 0$, so wird

$$(43) \qquad \Re_\lambda(X, 0, 0, \cdots 0) = 0$$

sein für $\lambda = 1, 2, \cdots m$, d. h. *es dürfen in der Entwicklung* $\Re_\lambda$ *gar keine von* $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ *freien Glieder vorkommen, und umgekehrt sieht man unmittelbar, dass, wenn dies der Fall ist, die Beziehungen* (42) *ein Integralsystem bilden.*

Stellen wir nunmehr das für das System (29) gewonnene Resultat mit den Substitutionen (28) und den Differentialgleichungsystemen (27) oder (1) zusammen, so erhalten wir den folgenden Fundamentalsatz für die Existenz und Form von Integralen eines Systems algebraischer Differentialgleichungen:

Für das System von Differentialgleichungen

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \cdots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_1}{dx} = G_1(x, t_1, y_1, \cdots y_m) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \cdots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_m}{dx} = G_m(x, t_1, y_1, \cdots y_m), \end{cases}$$

in welchem t_1 *eine Lösung der von gleichen Wurzeln befreiten algebraischen Gleichung*

$$(45)\qquad G(x, t, y_1, \cdots y_m) = 0$$

ist, giebt es zu jedem willkürlich gewählten Werthe ξ *von* x *stets nach positiven ganzen steigenden Potenzen von* $x - \xi$ *fortschreitende, in der Umgebung dieses Punktes* ξ *convergirende Reihen, welche dem Differentialgleichungsysteme genügen, also eindeutige, endliche und stetige* Integrale, *welche für* $x = \xi$ *die beliebig gegebenen Werthe* $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ *annehmen und somit die Form haben*

$$(46)\qquad y_\lambda = \eta_\lambda + \frac{x-\xi}{1!}\left(\frac{dy_\lambda}{dx}\right)_\xi + \frac{(x-\xi)^2}{2!}\left(\frac{d^2y_\lambda}{dx^2}\right)_\xi + \cdots,$$

vorausgesetzt dass der dem Werthesystem $\xi, \eta_1, \ldots \eta_m$ *zugeordnete Werth* τ_1 *der Lösung* t_1 *der Gleichung*

$$(47)\qquad G(\xi, t_1, \eta_1, \cdots \eta_m) = 0$$

ein endlicher, und dass nicht

$$\left(\frac{\partial G(\xi, t_1, \eta_1 \ldots \eta_m)}{\partial t_1}\right)_{t_1 = \tau_1}$$

verschwindet. Für den Fall, dass in der Entwicklung von

$$\frac{G_\lambda(x, t_1, y_1, \ldots y_m)}{\dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \ldots y_m)}{\partial t_1}}$$

für $\lambda = 1, 2, \ldots m$ *in der Umgebung von* $\xi, \eta_1, \ldots \eta_m$ *nach ganzen positiven Potenzen von* $x - \xi, y_1 - \eta_1, \cdots y_m - \eta_m$ *keine von* $y_1 - \eta_1, \cdots y_m - \eta_m$ *freien Glieder vorkommen, wird das Integralsystem* (46) *in das constante*

$$y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_2, \cdots y_m = \eta_m$$

übergehen.

Aber das in (46) *gefundene Integralsystem ist auch das einzige Functionalsystem, welches dem Systeme der Differential-*

gleichungen (44), (45) *Genüge leistet und für* $x = \xi$ *die Werthe* $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ *annimmt.*

Denn existirte noch ein anderes, also auch ein anderes Integralsystem für die Differentialgleichungen (29), welches ebenfalls für $X = 0$ in allen seinen m Elementen den Werth Null annimmt, so würde man, wenn die durch die Gleichungen (39) bestimmten Integrale mit $\overline{Y}_\lambda$ bezeichnet werden, das zweite Integralsystem in die Form setzen können

$$Y_\lambda = \overline{Y}_\lambda + u_\lambda, \tag{48}$$

worin der gemachten Annahme gemäss $u_1, u_2, \ldots u_m$ für $X = 0$ verschwinden müssten, und danach das Differentialgleichungsystem (29) in

$$\frac{d(\overline{Y}_\lambda + u_\lambda)}{dX} = \mathfrak{R}_\lambda(X, \overline{Y}_1 + u_1, \cdots \overline{Y}_m + u_m) \quad (\lambda = 1, 2, \cdots m) \tag{49}$$

oder vermöge (29) selbst in

$$\begin{aligned} \frac{du_\lambda}{dX} &= \mathfrak{R}_\lambda(X, \overline{Y}_1 + u_1, \cdots \overline{Y}_m + u_m) \\ &\quad - \mathfrak{R}_\lambda(X, \overline{Y}_1, \cdots \overline{Y}_m) \quad (\lambda = 1, 2, \cdots m) \end{aligned} \tag{50}$$

übergehen. Denkt man sich nunmehr auf der rechten Seite dieser Gleichungen die Entwicklungen (39) für $\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \ldots \overline{Y}_m$ eingesetzt, so erhält man nach positiven ganzen Potenzen von $X, u_1, u_2, \ldots u_m$ fortschreitende, um $X = 0, u_1 = 0, \cdots u_m = 0$ convergirende Reihen, die, weil die rechten Seiten von (50) für $u_1 = u_2 = \cdots = u_m = 0$ verschwinden, keine von $u_1, u_2, \ldots u_m$ freien Glieder haben dürfen, so dass sich zur Bestimmung der Functionen $u_1, \ldots u_m$ das nachfolgende System von Differentialgleichungen ergiebt:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{du_1}{dX} = (u_1, u_2, \cdots u_m)_1 + (u_1, u_2, \cdots u_m)_2 + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{du_m}{dX} = (u_1, u_2, \cdots u_m)_1 + (u_1, u_2, \cdots u_m)_2 + \cdots, \end{array}\right. \tag{51}$$

in welchem $(u_1, u_2, \ldots u_m)_\alpha$ eine ganze homogene Function α^{ten} Grades von $u_1, \ldots u_m$ bezeichnet, deren Coefficienten Potenzreihen von X sind. Da aber die Existenz der Functionen $u_1, u_2, \cdots u_m$ um $X = 0$ herum vorausgesetzt war, so können

wir uns dieselbe punktweise auf einer von $X = 0$ ausgehenden Linie, so lange dieselbe in dem zugehörigen Convergenzbereiche verläuft, berechnen; nun sieht man aber aus (51) unmittelbar, dass

$$\left(\frac{du_1}{dX}\right)_0 = \left(\frac{du_2}{dX}\right)_0 = \cdots = \left(\frac{du_m}{dX}\right)_0 = 0,$$

und allgemein, dass, wie aus successiver Differentiation der Gleichungen (51) hervorgeht, für beliebige ϱ

$$\left(\frac{d^\varrho u_1}{dX^\varrho}\right)_0 = \left(\frac{d^\varrho u_2}{dX^\varrho}\right)_0 = \cdots = \left(\frac{d^\varrho u_m}{dX^\varrho}\right)_0 = 0$$

ist, woraus folgt, dass die Functionen $u_1, u_2, \ldots u_m$ längs jeder beliebigen von $X=0$ ausgehenden Linie im Convergenzbereiche um $X = 0$ herum identisch Null sind, und somit nach (48) die neuen Integralsysteme von (29), also auch von (44) mit den früheren zusammenfallen.

Sind einzelne dem $x = \xi$ zugeordnete Werthe von $y_1, y_2, \ldots y_m$ z. B. $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\delta$ unendlich gross, so wird man die Differentialgleichungen (1) und (2) durch die Substitutionen

$$y_1 = \frac{1}{v_1}, \quad y_2 = \frac{1}{v_2}, \cdots y_\delta = \frac{1}{v_\delta}$$

zu transformiren und die Werthe

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_\delta = 0$$

dem $x = \xi$ zuzuordnen haben; sind dann in dem neuen Differentialgleichungsystem für die abhängigen Variabeln $v_1, v_2, \ldots v_\delta,\ y_{\delta+1}, \ldots y_m$ bei Zuordnung der Werthe

$$x = \xi, \quad v_1 = 0, \cdots v_\delta = 0, \quad y_{\delta+1} = \eta_{\delta+1}, \ldots y_m = \eta_m$$

die Bedingungen des Fundamentalsatzes erfüllt, so dass sich

$$v_\lambda = a_{\lambda 1}(x - \xi) + a_{\lambda 2}(x - \xi)^2 + \cdots \quad (\text{für } \lambda = 1, 2, \cdots \delta)$$

$$y_\mu = \eta_\mu + b_{\mu 1}(x - \xi) + b_{\mu 2}(x - \xi)^2 + \cdots$$

$$(\text{für } \mu = \delta + 1, \delta + 2, \cdots m)$$

ergiebt, so folgt, wenn der erste nicht verschwindende Coefficient der v_λ-Reihe mit $a_{\lambda r_\lambda}$ bezeichnet wird, vermöge der obigen Substitutionen

$$y_\lambda = a_{\lambda r_\lambda}^{-1}(x - \xi)^{-r_\lambda}(1 + b_1(x - \xi) + \cdots)^{-1}$$

oder

$$y_\lambda = A_{\lambda 0}(x-\xi)^{-r_\lambda} + A_{\lambda 1}(x-\xi)^{-r_\lambda+1} + \cdots,$$

es enthalten somit *diese um* $x = \xi$ *eindeutigen Functionalausdrücke eine endliche Anzahl negativer ganzer Potenzen von* $x - \xi$.

Ist endlich der betrachtete x-Werth selbst unendlich, so hat man in das Differentialgleichungsystem die Substitution

$$x = \frac{1}{w}$$

zu machen und dann nachzusehen, ob die Bedingungen des Fundamentalsatzes für $w = 0$ und die zugehörigen y-Werthe erfüllt sind; ist dies der Fall, und hat y_λ die Form

$$y_\lambda = \eta_\lambda + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots,$$

so wird vermöge der gemachten Substitution sich

$$y_\lambda = \eta_\lambda + A_1 x^{-1} + A_2 x^{-2} + \cdots,$$

also eine nach negativen steigenden ganzen Potenzen von x *fortschreitende Reihe ergeben*,

während, wenn das zugehörige y_λ selbst unendlich ist, also nach dem Obigen die Entwicklung die Gestalt hat

$$y_\lambda = A_0 w^{-r} + A_1 w^{-r+1} + \cdots,$$

sich y_λ in der Form

$$y_\lambda = A_0 x^r + A_1 x^{r-1} + \cdots + A_r + A_{r+1} x^{-1} + A_{r+2} x^{-2} + \cdots$$

ergiebt, und somit *eine endliche Anzahl positiver und eine unendliche Anzahl negativer ganzzahliger Potenzen von* x *enthält*.

4. Sei nun $\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ ein den Bedingungen des oben ausgesprochenen Fundamentalsatzes genügendes Werthesystem, für welches also ein *Integralsystem* von der Form existirt

$$y_\lambda = \eta_\lambda + a_\lambda (x-\xi) + b_\lambda (x-\xi)^2 + \cdots, \tag{52}$$

welches die Gleichungen (44), (45) für die in der Umgebung von ξ liegenden Werthe von x identisch befriedigt, so ist zunächst aus dem Umstande, dass die Differentialgleichungen identisch befriedigt werden, zu ersehen, dass die Reihen (52), so lange sie überhaupt convergiren, Integrale des Systemes (44) bleiben; nehmen wir nun in der Umgebung von ξ einen Punkt ξ_1 an, berechnen aus (52) und den durch successive Differentiation erhaltenen Gleichungen

$$(53)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_\lambda}{dx} = a_\lambda + 2b_\lambda(x-\xi) + 3c_\lambda(x-\xi)^2 + \cdots \\ \dfrac{d^2y_\lambda}{dx^2} = 2b_\lambda + 3\cdot 2c_\lambda(x-\xi) + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

die Werthe

$$(y_\lambda)_{\xi_1}, \quad \left(\frac{dy_\lambda}{dx}\right)_{\xi_1}, \quad \left(\frac{d^2y_\lambda}{dx^2}\right)_{\xi_1}, \cdots,$$

und bilden die Potenzreihen

$$(54)\quad \bar{y}_\lambda = (y_\lambda)_{\xi_1} + \left(\frac{dy_\lambda}{dx}\right)_{\xi_1}(x-\xi_1) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2y_\lambda}{dx^2}\right)_{\xi_1}(x-\xi_1)^2 + \cdots,$$

so werden dieselben jedenfalls in einem Bereiche um ξ_1 herum convergent, und in dem den beiden Bereichen gemeinsamen Raume $\bar{y}_\lambda = y_\lambda$ sein; denn setzt man die Reihe (52) in die Form

$$(55)\quad \begin{aligned} y_\lambda = \eta_\lambda &+ a_\lambda[(x-\xi_1) + (\xi_1-\xi)] \\ &+ b_\lambda[(x-\xi_1) + (\xi_1-\xi)]^2 + \cdots, \end{aligned}$$

so ergiebt sich nach bekannten Eigenschaften der Potenzreihen

$$(56)\quad \begin{aligned} y_\lambda = \eta_\lambda &+ a_\lambda(\xi_1-\xi) + b_\lambda(\xi_1-\xi)^2 + \cdots \\ &+ [a_\lambda + 2b_\lambda(\xi_1-\xi) + 3c_\lambda(\xi_1-\xi)^2 + \cdots]\,\frac{x-\xi_1}{1!} \\ &+ [2\cdot 1\cdot b_\lambda + 3\cdot 2\cdot c_\lambda(\xi_1-\xi) + 4\cdot 3\cdot d_\lambda(\xi_1-\xi)^2 + \cdots]\,\frac{(x-\xi_1)^2}{2!} \\ &+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot, \end{aligned}$$

oder nach (52) und (53)

$$(57)\quad y_\lambda = (y_\lambda)_{\xi_1} + \left(\frac{dy_\lambda}{dx}\right)_{\xi_1}(x-\xi_1) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2y_\lambda}{dx^2}\right)_{\xi_1}(x-\xi_1)^2 + \cdots,$$

und es folgt somit einerseits, dass die Reihe (54) eine in der Umgebung von ξ_1 convergente ist, andererseits für die den beiden Bereichen gemeinsamen Punkte in ihrem Werthe mit dem von y_λ zusammenfällt.

Im Allgemeinen wird nun der um ξ_1 gelegte Convergenzkreis über den um ξ gelegten hinausgreifen, und es ist leicht einzusehen, dass die als Fortsetzungen von y_λ erhaltenen Functionen $\bar{y}_\lambda$ ebenfalls, so wie es die Functionen y_λ der Voraussetzung nach thaten, dem Differentialgleichungsystem (44), (45) identisch genügen werden, da $\bar{y}_\lambda$ und y_λ sich in

einem Flächenstück deckten, und also beim Einsetzen dieser Werthe in die Differentialgleichungen dieselben für den gemeinsamen Bereich identisch, also auch für den weiteren Theil befriedigt werden müssen, so lange die Reihen $\bar{y}_{\lambda}$ überhaupt noch convergent sind. Nehmen wir jetzt wieder einen Punkt ξ_2 in dem neu hinzugekommenen Bereiche an, bilden für diesen genau wie oben für ξ_1 die zugehörigen Reihen nach Potenzen von $x - \xi_2$ fortschreitend, so haben wir weitere Fortsetzungen der Integrale des Differentialgleichungsystemes u. s. w., wobei die Fortsetzungen sich möglicherweise nur auf einen begrenzten Raum der x-Ebene erstrecken, — in welchem Falle man von einem ausserhalb dieses Raumes gelegenen x-Werthe aus ein neues Integralsystem construiren kann, — oder auch über die unendliche Ebene hin sich verbreiten können. Kommt man mit den in Kreisen bewerkstelligten Fortsetzungen zu einem Gebiete zurück, in welchem wiederum der Ausgangspunkt ξ enthalten ist, so können die Werthe, welche $y_1, y_2, \ldots y_m$ in diesem Punkte vermöge der letzterhaltenen Potenzreihen annehmen, den Ausgangswerthen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ gleich, aber auch von diesen verschieden sein, wobei zu bemerken, dass, wenn bei der Umkreisung in dem eingeschlossenen Raume Verzweigungspunkte von t liegen, auch die Differentialgleichungen selbst in andere ihrer algebraischen Zweige übergegangen sein können.

Dass man in der Ebene der x nicht von vornherein die Räume absondern kann, innerhalb deren derartige Fortsetzungen wieder zu den Ausgangswerthen zurückführen, die Integralfunctionen also eindeutig sind, hat darin seinen Grund, dass die Existenz eines Systems durch Potenzreihen darstellbarer eindeutiger Integrale im Allgemeinen nicht bloss von dem Werthe ξ, sondern auch von den beliebig dazu geordneten $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ abhängt, wie aus dem obigen Fundamentalsatze von der Existenz eindeutiger Integrale hervorgeht; doch giebt es grosse Klassen von Differentialgleichungen, die, wie wir später sehen werden, von besonderer Wichtigkeit sind, und für welche sich diese Räume näher fixiren lassen. Da nämlich die oben gemachten Einschränkungen jenes Satzes lediglich vom Charakter der Gleichung (45) abhingen, in welcher einer-

seits dem gewählten Werthesystem ein endlicher Werth τ_1 von t_1 entsprechen sollte, andererseits die nach t_1 genommene Ableitung der Gleichung mit dieser für jenes Werthesystem nicht die gemeinsame Lösung τ_1 haben durfte, so wird, wenn verlangt wird, dass die Ausnahmestellen, welche die Existenz in ihrer Umgebung eindeutiger Integrale entweder nicht auf Grund jenes Fundamentalsatzes erkennen lassen oder für welche solche gar nicht vorhanden sind, lediglich durch die Werthe der x-Variabeln und nicht auch die zugeordneten Werthe der Variabeln $y_1, y_2, \dots y_m$ bedingt werden sollen, nur anzunehmen sein, dass die Gleichung (45) von $y_1, y_2, \dots y_m$ frei ist und also die Form hat

$$g_0(x)t^n + g_1(x)t^{n-1} + \cdots + g_n(x) = 0 = G(x, t), \tag{58}$$

worin $g_0(x)$, $g_1(x)$, ... $g_n(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, so dass das vorgelegte simultane Differentialgleichungsystem nunmehr lautet:

$$\text{(59)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial G(x, t_1)}{\partial t_1} \dfrac{dy_1}{dx} = G_1(x, t_1, y_1, \cdots y_m) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial G(x, t_1)}{\partial t_1} \dfrac{dy_m}{dx} = G_m(x, t_1, y_1, \cdots y_m), \end{cases}$$

für welches die Bereiche eindeutiger Integrale folgendermassen festgestellt werden können. Sei das Eliminationsresultat von t zwischen den beiden Gleichungen

$$G(x, t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} = 0 \tag{60}$$

die Gleichung

$$F(x) = 0, \tag{61}$$

so werden die Lösungen derselben $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ jedenfalls Werthe von x liefern, welche in dem oben bewiesenen Fundamentalsatze Ausnahmepunkte bildeten; greifen wir von diesen alle die Punkte $x_1, x_2, \dots x_\delta$ heraus, in deren Umgebung sich t nicht nach positiven steigenden ganzen Potenzen entwickeln lässt*), tragen diese in der x-Ebene auf, schneiden ferner irgend einen einfach zusammenhängenden Theil T der unendlichen

*) Die Methoden, diese Punkte zu ermitteln, lehrt die Theorie der algebraischen Functionen einer Variabeln.

Ebene heraus, in dem sich keiner der Punkte $x_1, x_2, \ldots x_\delta$ befindet, und tragen diejenigen Lösungen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\sigma$ der Gleichung

$$(62) \qquad g_0(x) = 0,$$

sowie diejenigen der Punkte $x_{\delta+1}, x_{\delta+2}, \ldots x_\varrho$, welche in dem Raume T liegen, in denselben ein, ziehen endlich von diesen singulären Punkten weder sich selbst noch untereinander sich schneidende Linien nach der Begrenzung der T-Fläche,

so wird die so entstehende, wiederum einfach zusammenhängende Fläche T', für welche die Begrenzung der T-Fläche und die je zwei Seiten der zuletzt gezogenen Querschnitte Grenzen bilden, die Eigenschaft haben, dass um jeden ihrer Punkte herum für beliebig zugeordnete Werthe von $y_1, y_2, \ldots y_m$ ein eindeutiges Integralsystem von der Form (46) *existirt, und dass die innerhalb der Fläche T' in der oben angegebenen Weise hergestellten Fortsetzungen für eine willkürliche Wahl der Richtung dieser Fortsetzungen bei der Rückkehr zu dem Ausgangswerthe des x auch wieder dieselben Ausgangswerthe von $y_1, y_2, \ldots y_m$ liefern, die so erzeugten Integralsysteme also eindeutige Functionen von x innerhalb der Fläche T' sein werden.*

Ueberschreiten wir jedoch mit unseren Fortsetzungen die von den singulären Punkten aus nach dem Rande der Fläche T gezogenen Querschnitte, so können wir durch die angegebenen Fortsetzungen mit anderen Werthen der Integrale als den Ausgangswerthen derselben zum Punkte ξ zurückkommen.

Da aber in den durch die Differentialgleichungen (59) charakterisirten Fällen, in denen die singulären Punkte nur von den x-Werthen und nicht von den zugehörigen Werthen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ der Integrale abhingen, die Form der analytischen Entwicklung der Integrale in der Umgebung nicht singulärer Stellen unabhängig von den Werthen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ dieselbe bleibt, so treten diese m Grössen als willkürliche *Integrationsconstanten* in die Integralausdrücke ein, die man dann die zu dem betreffenden Punkte ξ zugehörigen *allgemeinen* Integrale nennt, während diese Integrale für eine specielle Wahl numerischer Werthe für $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ *particuläre* Integrale genannt werden.

5. Nachdem im Vorhergehenden gezeigt worden, dass jedes Differentialgleichungsystem (44), (45) im Allgemeinen um jeden Punkt herum — nur die singulären Stellen ausgenommen — Integralsysteme $y_1, y_2, \dots y_m$ besitzt, welche unendlich viele in convergente Potenzreihen entwickelbare Zweige haben, bleibt noch eine *besondere* Gattung von Integralen solcher Differentialgleichungsysteme zu betrachten übrig. Bei der im zweiten Abschnitte durchgeführten Reduction des allgemeinen Differentialgleichungsystems I. (11) auf die *Jacobi-Weierstrass*'sche Normalform war vorausgesetzt worden, dass das dortige $\psi'(t_\alpha)$ oder

$$(63)\qquad \frac{\partial G(x, t_\alpha, y_1, y_2, \cdots y_m)}{\partial t_\alpha}$$

nicht verschwindet, und nur unter dieser Voraussetzung, die stets als erfüllt angenommen werden durfte, so lange $x, y_1, \dots y_m$ als von einander unabhängig betrachtet wurden, war die Reduction auf die Normalform durchführbar. Aber es könnte das gegebene Differentialgleichungsystem ein Integralsystem $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots \bar{y}_m$ besitzen, für welches neben der Gleichung

$$(64)\quad G(x, t_1, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots \bar{y}_m) = 0 \text{ auch } \frac{\partial G(x, t_1, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots \bar{y}_m)}{\partial t_1} = 0$$

erfüllt wäre, und

wir wollen ein System von Integralen des gegebenen Differentialgleichungsystems, welches den beiden Gleichungen (64) *zugleich genügt, ein singuläres Integralsystem nennen.*

Zur Auffindung der singulären Integralsysteme bemerke man zunächst, dass, wenn man t_1 zwischen den beiden Gleichungen (64) eliminirt, sich eine stets herstellbare algebraische Beziehung

$$(65)\qquad \omega(x, y_1, y_2, \cdots y_m) = 0$$

zwischen den zu bestimmenden Elementen $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots \bar{y}_m$ des singulären Integralsystems ergiebt; setzt man nun den aus (65) folgenden Werth von $\bar{y}_m$ algebraisch durch $x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots \bar{y}_{m-1}$ ausgedrückt in das Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse ein, so erhält man ein algebraisches Differentialgleichungsystem $m-1^{\text{ter}}$ Klasse, das wiederum in die Normalform umgesetzt lautet:

$$(66)\begin{cases}\dfrac{\partial g(x,\mathfrak{t}_1,y_1,\cdots y_{m-1})}{\partial \mathfrak{t}_1}\dfrac{dy_1}{dx}=g_1(x,\mathfrak{t}_1,y_1,\cdots y_{m-1})\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \dfrac{\partial g(x,\mathfrak{t}_1,y_1,\cdots y_{m-1})}{\partial \mathfrak{t}_1}\dfrac{dy_{m-1}}{dx}=g_{m-1}(x,\mathfrak{t}_1,y_1,\cdots y_{m-1}),\end{cases}$$

wenn $\mathfrak{t}_1$ durch die algebraische Gleichung

$$(67)\qquad g(x,\mathfrak{t}_1,y_1,\cdots y_{m-1})=0$$

bestimmt ist, und welches die $m-1$ Elemente $y_1, y_2, \ldots y_{m-1}$ des gesuchten singulären Integralsystemes jedenfalls zu einem Systeme von Integralen haben wird; ist dieses wiederum ein singuläres Integralsystem der reducirten Differentialgleichungen (66), ist also ausser

$$g(x,\mathfrak{t}_1,\bar{y}_1,\bar{y}_2,\cdots\bar{y}_{m-1})=0 \quad\text{auch}\quad \frac{\partial g(x,\mathfrak{t}_1,\bar{y}_1,\bar{y}_2,\cdots\bar{y}_{m-1})}{\partial \mathfrak{t}_1}=0$$

erfüllt, so würde auch zwischen $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots \bar{y}_{m-1}$ und x eine algebraische Beziehung statthaben, vermöge deren dann das System (66) von neuem auf ein solches $m-2^{\text{ter}}$ Klasse reducirt werden könnte; fahren wir so fort, so kommen wir entweder zu einem Systeme von Differentialgleichungen, für welches ein nicht singuläres Integralsystem einen Theil der Elemente des singulären Systems von (44) liefert, während die anderen Elemente aus diesen vermöge der successive sich ergebenden algebraischen Relationen (65) u. ä. hervorgehen, oder wir kommen schliesslich zu einem aus *einer* Differentialgleichung bestehenden Systeme:

$$(68)\qquad \frac{\partial h(x,u_1,y_1)}{\partial u_1}\frac{dy_1}{dx}=h_1(x,u_1,y_1),$$

worin u_1 der algebraischen Gleichung

$$(69)\qquad h(x,u_1,y_1)=0$$

genügt; für diese kann y_1 ein nicht singuläres Integral sein, es können jedoch auch zu gleicher Zeit die beiden Gleichungen bestehen

$$h(x,u_1,y_1)=0 \quad\text{und}\quad \frac{\partial h(x,u_1,\bar{y}_1)}{\partial u_1}=0,$$

so dass durch Elimination von u_1 zwischen diesen sich y_1, also auch all' die früheren Elemente $y_2, \ldots y_m$ als algebraische Functionen von x ergeben. Daraus folgt somit der Satz:

Die Bestimmung der singulären Integrale des Differentialgleichungssystemes m^{ter} Klasse (44) führt entweder auf dem angegebenen Wege zu algebraischen Functionen von x für die m Elemente $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots \bar{y}_m$ des singulären Integralsystemes oder sie erfordert die Auffindung eines Systemes von nicht singulären Integralen eines Differentialgleichungssystems niederer Klasse, während die übrigen Integralelemente durch bekannte algebraische Relationen mit diesen Integralen verbunden sind; in allen Fällen muss nachträglich verificirt werden, dass die gefundenen Elemente auch wirklich ein System von Integralen des gegebenen Differentialgleichungssystemes (44) *bilden.*

Es wird somit die Untersuchung des Charakters der singulären Integralsysteme in der Umgebung der einzelnen Punkte der x-Variablen auf die analoge Untersuchung für nicht singuläre Integrale von Differentialgleichungssystemen niedrigerer Klasse zurückgeführt, und ausserdem die Bedingung für die Existenz singulärer Integralsysteme ermittelt sein.

Wie nun der Charakter eines jeden Integralsystems, das zu einem *beliebigen* Werthe von x gehört, zu untersuchen ist, soll in diesem Kapitel noch nicht erörtert werden, da es hier vielmehr darauf ankam, nachzuweisen, dass es überhaupt Functionalsysteme giebt, welche als Integrale des Differentialgleichungssystems betrachtet werden dürfen, und dass für jeden Werth ξ von x im Allgemeinen, d. h. gewisse singuläre Werthe von x ausgenommen, immer nur bestimmten Bedingungen unterworfene Werthesysteme der abhängigen Variabeln existiren, für welche die in der Umgebung dieses Werthes ξ geltenden Integrale *nicht* in Reihen entwickelbar sein müssen, welche nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x - \xi$ fortschreiten. Die allgemeine Untersuchung des Charakters der Integrale in der Umgebung eines beliebigen Punktes ohne jede Beschränkung des zugehörigen Werthesystems von $y_1, \ldots y_m$ wird später durchgeführt werden.

6. Wenden wir nunmehr die in diesem Abschnitte bewiesenen Sätze auf die von gleichen Factoren in Bezug auf $\frac{d^n z}{dx^n}$ befreite Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0 \tag{70}$$

an, welche durch das System von Gleichungen II. (41), (42) ersetzt werden konnte, so folgt, wie unmittelbar ersichtlich, der nachstehende Satz:

Ist ξ irgend ein Werth der Variabeln x, so giebt es stets eine nach ganzen positiven steigenden Potenzen von $x - \xi$ fortschreitende, in der Umgebung dieses Punktes convergente Reihe für z in der Form

$$z = \zeta + \frac{x-\xi}{1!}\zeta_1 + \frac{(x-\xi)^2}{2!}\zeta_2 + \dots + \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\zeta_{n-1}$$
$$+ \frac{(x-\xi)^n}{n!}\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)_\xi + \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n+1!}\left(\frac{d^{n+1} z}{dx^{n+1}}\right)_\xi + \dots,$$

also eine in der Umgebung von ξ stetige, endliche und eindeutige Function von x, welche der Differentialgleichung (70) *Genüge leistet, und für $x = \xi$ nebst ihren $n - 1$ ersten Ableitungen die willkürlich gegebenen Werthe $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_{n-1}$ annimmt, vorausgesetzt, dass der Coefficient der höchsten Potenz von $\frac{d^n z}{dx^n}$ für das specielle Werthesystem*

$$x = \xi,\ (z)_\xi = \zeta,\ \left(\frac{dz}{dx}\right)_\xi = \zeta_1,\ \dots \left(\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}\right)_\xi = \zeta_{n-1}$$

nicht verschwindet), und der für dieses Werthesystem sich ergebende Ausdruck von $\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)_\xi$ nicht eine mehrfache Lösung der Gleichung* (70) *ist; und dieser Functionalwerth von z ist in der Umgebung von ξ der einzige, welcher der Differentialgleichung Genüge leistet und nebst seinen Ableitungen die vorgeschriebenen Werthe annimmt. Die Bestimmung der singulären Integrale*

*) Es genügt nach dem Früheren, einen Zweig der durch die algebraische Gleichung (70) für $\frac{d^n z}{dx^n}$ definirten Function zu betrachten, der für das Werthesystem $\xi, \zeta, \zeta_1, \dots \zeta_{n-1}$ nicht unendlich wird, und es mag der oben gewählten Form (70) wegen noch hinzugefügt werden, dass die höheren Ableitungen von z von der $n + 1^{\text{ten}}$ Ordnung an sich sämmtlich rational also eindeutig durch

$$x,\ z,\ \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$$

und den fest gewählten Zweig der n^{ten} Ableitung ausdrücken lassen.

der Differentialgleichung (70) *liefert entweder z als algebraische Function von x oder als ein nicht singuläres Integral einer Differentialgleichung von niederer Ordnung als der n^{ten}.*

7. Wir wollen von dem oben bewiesenen Fundamentalsatze über die Existenz eindeutiger Integrale noch eine Anwendung auf einen Hülfsatz machen, den wir im Folgenden häufig brauchen werden.

Seien n Gleichungen

$$(71)\quad \begin{cases} F_1(u_1, u_2, \cdots u_n, v) = 0 \\ F_2(u_1, u_2, \cdots u_n, v) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_n(u_1, u_2, \cdots u_n, v) = 0 \end{cases}$$

zwischen den n abhängigen Variabeln $u_1, u_2, \ldots u_n$ und der unabhängigen Variabeln v gegeben, und mag dem Werthe $v = v_0$ eine Werthecombination $u_1^0, u_2^0, \ldots u_n^0$ entsprechen, während das System (71) der Bedingung unterliegt, dass $F_1, F_2, \ldots F_n$ eindeutige Functionen von $u_1, \ldots u_n, v$ in der Umgebung von $u_1^0, u_2^0, \ldots u_n^0, v_0$ bedeuten, und die Determinante

$$(72)\quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{d u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

für $v = v_0$, $u_1 = u_1^0, \cdots u_n = u_n^0$ von Null verschieden ist. Differentiirt man die Gleichungen (71) nach v, so dass man

$$(73)\quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{du_1}{dv} + \frac{\partial F_1}{\partial u_2}\frac{du_2}{dv} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial u_n}\frac{du_n}{dv} = -\frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1}\frac{du_1}{dv} + \frac{\partial F_2}{\partial u_2}\frac{du_2}{dv} + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial u_n}\frac{du_n}{dv} = -\frac{\partial F_2}{\partial v} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1}\frac{du_1}{dv} + \frac{\partial F_n}{\partial u_2}\frac{du_2}{dv} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial u_n}\frac{du_n}{dv} = -\frac{\partial F_n}{\partial v} \end{cases}$$

erhält, so ergiebt sich

$$(74) \quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dv} = \dfrac{f_1(u_1, u_2, \ldots u_n, v)}{D} \\ \dfrac{du_2}{dv} = \dfrac{f_2(u_1, u_2, \ldots u_n, v)}{D} \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{du_n}{dv} = \dfrac{f_n(u_1, u_2, \ldots u_n, v)}{D}, \end{cases}$$

und da den gemachten Voraussetzungen zufolge sich die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen in nach ganzen positiven steigenden Potenzen von

$$u_1 - u_1^0, \; u_2 - u_2^0, \; \cdots u_n - u_n^0, \; v - v_0$$

fortschreitende, convergente Reihen entwickeln lassen, so werden $u_1, u_2, \ldots u_n$ nach dem obigen Fundamentalsatze sich in der Umgebung von $u_1^0, \ldots u_n^0, v_0$ in eben solche Potenzreihen von $v - v_0$ entwickeln lassen, und wir finden daher folgenden *Hülfsatz:*

Wenn in dem Gleichungsysteme (71) *dem* $v = v_0$ *ein Werthesystem* $u_1^0, \ldots u_n^0$ *entspricht, in dessen Umgebung* $F_1, \ldots F_n$ *eindeutige Functionen der Variabeln sind, und für welches die Determinante* D *von Null verschieden ist, so lassen sich* u_1, $u_2, \ldots u_n$ *in der Umgebung von* $v = v_0$ *in Potenzreihen von der Form entwickeln*

$$(75) \quad \begin{cases} u_1 - u_1^0 = a_1^{(1)}(v - v_0) + a_2^{(1)}(v - v_0)^2 + \cdots \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n - u_n^0 = a_1^{(n)}(v - v_0) + a_2^{(n)}(v - v_0)^2 + \cdots \end{cases}$$

8. Nachdem oben gezeigt worden, dass *im Allgemeinen* für beliebig gegebene Werthe $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ von $y_1, y_2, \ldots y_m$ in einem Punkte $x = \xi$ zu diesem Punkte gehörige analytische Functionen (46) existiren, welche dem Differentialgleichungsysteme identisch genügen, werden wir auch umgekehrt, weil nach dem vorigen Hülfsatz die nach $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ genommene Determinante D der Gleichungen (46) für $x = \xi$ den Werth 1 annimmt, $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ als Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ betrachten dürfen, und

wir erhalten somit neben der Form der Integrale (46) *für das Differentialgleichungsystem* (1), (2) *auch die nachfolgende:*

$$(76)\quad \begin{cases} \eta_1 = \omega_1(x, y_1, \ldots y_m) \\ \eta_2 = \omega_2(x, y_1, \ldots y_m) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \eta_m = \omega_m(x, y_1, \ldots y_m), \end{cases}$$

worin $\eta_1, \ldots \eta_m$ *willkürliche, einem bestimmten Werthe* ξ *entsprechende Werthe von* $y_1, \ldots y_m$ *bedeuten; wir wollen die* ω *selbst zum Unterschiede von den vorher definirten Integralen* $y_1, y_2, \ldots y_m$ *Integralfunctionen nennen.*

Hat man aber die Integrale des Systems auf die Form (76) gebracht, in welcher die m von einander unabhängigen Constanten $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ nur auf der *einen* Seite dieser resp. Gleichungen enthalten sind, so ist klar, dass, *wenn man irgend eine der Gleichungen*

$$(77)\qquad \eta_r = \omega_r(x, y_1, y_2, \ldots y_m)$$

nach x *differentiirt und statt der Differentialquotienten* $\frac{dy_1}{dx}, \ldots \frac{dy_m}{dx}$ *die durch die Gleichungen* (1) *gegebenen Werthe einsetzt, die sich ergebende Gleichung*

$$(78)\qquad \frac{\partial \omega_r}{\partial x} + \frac{\partial \omega_r}{\partial y_1} \frac{G_1}{\frac{\partial G}{\partial t_1}} + \cdots + \frac{\partial \omega_r}{\partial y_m} \frac{G_m}{\frac{\partial G}{\partial t_1}} = 0,$$

wenn der Werth von t_1 *aus der Gleichung* (2) *substituirt wird, eine in* $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ *identische sein muss,* da sich die sonst folgende analytische Beziehung zwischen $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ nicht mit der die willkürliche Constante η_r enthaltenden Relation (77) vereinigen liesse.

Es ist endlich noch unmittelbar zu sehen, dass

in dem angegebenen Sinne auch jede aus $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ *gebildete Function eine Integralfunction des Differentialgleichungsystems* (1) *ist,*

indem

$$(79)\qquad \Omega(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m) = C$$

gesetzt durch Differentiation nach x mit Benutzung der Diffe-

rentialgleichungen (1), (2) eine in $x, y_1, \dots y_m$ identische Gleichung liefert, da

$$(80)\qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_1}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x}+\frac{\partial \omega_1}{\partial y_1}\frac{G_1}{\frac{\partial G}{\partial t_1}}+\cdots\right)+\cdots + \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_m}\left(\frac{\partial \omega_m}{\partial x}+\frac{\partial \omega_m}{\partial y_1}\frac{G_1}{\frac{\partial G}{\partial t_1}}+\cdots\right)=0$$

vermöge der Gleichungen (78) identisch befriedigt wird; hierbei ergiebt sich C nothwendig als eine Function der willkürlichen Constanten $\eta_1, \dots \eta_m$, welche nach (79) durch die Beziehung bestimmt ist

$$(81)\qquad C = \Omega(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m).$$

IV. Ueber die Multiplicatoren von Differentialgleichungssystemen beliebiger Klasse.

1. Seien die einem Werthe $x = \xi$ entsprechenden Werthe $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ der abhängigen Variabeln $y_1, y_2, \dots y_m$ des Differentialgleichungssystems (1) und (2) des vorigen Abschnittes von der Art, dass die Bedingungen des Fundamentalsatzes erfüllt werden, so können wir nach den im vorigen Abschnitte gemachten Auseinandersetzungen für das kürzer in der Form

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1, \dots y_m) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = F_2(x, y_1, \dots y_m) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{dy_m}{dx} = F_m(x, y_1, \dots y_m) \end{cases}$$

geschriebene Differentialgleichungsystem, in welchem $F_1, F_2, \dots F_m$ algebraische Functionen von $x, y_1, y_2, \dots y_m$ bedeuten, die um $x = \xi$ gültigen Integrale in der Form darstellen

$$(2)\qquad \begin{cases} \eta_1 = \omega_1(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots y_m) \\ \eta_2 = \omega_2(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots y_m) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \eta_m = \omega_m(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots y_m), \end{cases}$$

woraus die durch Differentiation hergeleiteten Gleichungen

$$(3)\qquad \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x} + \sum_1^m {}_\varrho \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial y_\varrho} F_\varrho = 0 \quad (\text{für } \alpha = 1, 2, \ldots m)$$

sich in $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ identisch ergeben.

Eine Function M von $x, y_1, \ldots y_m$ soll ein Multiplicator des Differentialgleichungsystems (1) *genannt werden, wenn die Gleichung*

$$(4)\qquad \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial (MF_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial (MF_2)}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial (MF_m)}{\partial y_m} = 0$$

identisch für alle $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ befriedigt wird, oder da vermöge (1)

$$(5)\qquad \frac{\partial (MF_\lambda)}{\partial y_\lambda} = \frac{\partial M}{\partial y_\lambda} F_\lambda + M \frac{\partial F_\lambda}{\partial y_\lambda} = \frac{\partial M}{\partial y_\lambda} \frac{dy_\lambda}{dx} + M \frac{\partial F_\lambda}{\partial y_\lambda}$$

und

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial M}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial M}{\partial y_m}\frac{dy_m}{dx} = \frac{dM}{dx}$$

ist,

wenn M als Function von $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ aufgefasst der Gleichung

$$(6)\qquad \frac{dM}{dx} + M\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\right) = 0$$

*identisch genügt**).

Es sollen zunächst einige einfache Beziehungen zwischen den Integralfunctionen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ und den Multiplicatoren entwickelt werden. Setzen wir nämlich eine Integralfunction ω in die Form

$$(7)\qquad \eta = \omega(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots y_m) = \frac{M_1}{M},$$

worin M ein Multiplicator des Systems (1) sein soll, so folgt vermöge (3)

*) Die Definition des Multiplicators ist offenbar unabhängig von der Annahme, dass das Differentialgleichungsystem (1) ein algebraisches ist.

$$(8)\qquad \frac{\partial\left(\frac{M_1}{M}\right)}{\partial x}+\sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial\left(\frac{M_1}{M}\right)}{\partial y_\varrho}F_\varrho=0,$$

und diese Gleichung geht, da offenbar

$$M\sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial(M_1F_\varrho)}{\partial y_\varrho}-M_1\sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial(MF_\varrho)}{\partial y_\varrho}=M^2\sum_1^m{}_\varrho F_\varrho \frac{\partial\left(\frac{M_1}{M}\right)}{\partial y_\varrho}$$

identisch erfüllt ist, in

$$(9)\quad M\frac{\partial M_1}{\partial x}-M_1\frac{\partial M}{\partial x}+M\sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial(M_1F_\varrho)}{\partial y_\varrho}-M_1\sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial(MF_\varrho)}{\partial y_\varrho}=0$$

über, woraus folgt, dass, weil M als Multiplicator der Gleichung (4) genügt, auch

$$\frac{\partial M_1}{\partial x}+\sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial(M_1F_\varrho)}{\partial y_\varrho}=0$$

eine in $x, y_1, \ldots y_m$ identische Gleichung, d. h. auch M_1 ein Multiplicator ist; wir finden somit,

dass jede Integralfunction sich als Quotient zweier Multiplicatoren darstellen lässt.

Umgekehrt folgt aber auch leicht,

dass jeder Quotient zweier Multiplicatoren eine Integralfunction des Systems von Differentialgleichungen liefert;

denn, wenn M und M_1 Multiplicatoren sind, so bestehen nach (4) die identischen Gleichungen

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial x}+\displaystyle\sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial M}{\partial y_\varrho}F_\varrho+M\sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial F_\varrho}{\partial y_\varrho}=0 \\ \dfrac{\partial M_1}{\partial x}+\displaystyle\sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial M_1}{\partial y_\varrho}F_\varrho+M_1\sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial F_\varrho}{\partial y_\varrho}=0, \end{cases}$$

und somit, wenn oben mit M_1, unten mit M multiplicirt, und die beiden Gleichungen von einander abgezogen werden, durch Division mit M^2, wie unmittelbar zu sehen,

$$(11)\qquad \frac{\partial\left(\frac{M_1}{M}\right)}{\partial x}+\sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial\left(\frac{M_1}{M}\right)}{\partial y_\varrho}F_\varrho=0,$$

es ist somit nach der in Gleichung (3) gegebenen Definition
$\frac{M_1}{M}$ eine Integralfunction.

Der Beweis von der Existenz eines Multiplicators für ein Differentialgleichungsystem beliebiger Klasse wird in dem folgenden *Jacobi*'schen Satze mit enthalten sein.

2. Nach der Feststellung der Beziehungen zwischen Integralfunctionen und Multiplicatoren soll ein wichtiger Satz vom *letzten Multiplicator* hergeleitet werden.

Zunächst ist leicht einzusehen, dass, wenn man eine Integralfunction des Differentialgleichungsystemes (1) kennt, d. h. einen analytischen Zusammenhang ω_1 zwischen $x, y_1, \dots y_m$ anzugeben weiss von der Art, dass, wenn η_1 eine willkürliche Constante bedeutet,

$$\omega_1(x, y_1, \dots y_m) = \eta_1 \tag{12}$$

nach x total differentiirt mit Benutzung der aus den Differentialgleichungen sich ergebenden Werthe von $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots \frac{dy_m}{dx}$ identisch verschwindet, das Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse dadurch, dass man aus (12)

$$y_m = \Omega_1(x, y_1, \dots y_{m-1}, \eta_1) \tag{13}$$

in die ersten $m - 1$ Differentialgleichungen (1) einsetzt, in ein solches $m - 1^{\text{ter}}$ Klasse übergeht, welches wir in der Form darstellen wollen:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots y_{m-1}, \eta_1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_{m-1}}{dx} = f_{m-1}(x, y_1, \dots y_{m-1}, \eta_1), \end{array}\right. \tag{14}$$

wobei wir uns jetzt die rechten Seiten nicht mehr als algebraische Functionen, sondern in Form von unendlichen Reihen denken müssen;

die Kenntniss einer Integralfunction gestattet somit die Reduction der Klasse eines Differentialgleichungsystems um eine Einheit.

Sei nun ausser dieser Integralfunction ω_1 noch ein Multiplicator M des Systemes (1) bekannt, und werde eine Function N von $x, y_1, \ldots y_m$, wenn y_m mit Hülfe der Gleichung (13) herausgeschafft wird, mit (N) bezeichnet, welche somit nur noch von $x, y_1, \ldots y_{m-1}, \eta_1$ abhängt, so soll jetzt die Bedeutung des Ausdruckes

$$(15) \qquad \frac{(M)}{\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y_m}\right)} = M_1$$

für das Differentialgleichungsystem (14) festgestellt werden.

Da M ein Multiplicator, und ω_1 eine Integralfunction des Systemes (1) sind, so gelten die Gleichungen

$$(16) \qquad \frac{\partial M}{\partial x} + \sum_1^m \varrho \frac{\partial (M F_\varrho)}{\partial y_\varrho} = 0$$

$$(17) \qquad \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \sum_1^m \varrho \frac{\partial \omega_1}{\partial y_\varrho} F_\varrho = 0,$$

und setzt man zur Abkürzung

$$(18) \qquad \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} = v,$$

so dass nach (15)

$$(19) \qquad M_1 = \frac{(M)}{(v)}$$

wird, so soll gezeigt werden, dass M_1 *ein Multiplicator des reducirten Systemes* (14) *ist*, oder dass nach Gleichung (4)

$$(20) \qquad \frac{\partial M_1}{\partial x} + \sum_1^{m-1} \varrho f_\varrho \frac{\partial M_1}{\partial y_\varrho} + M_1 \sum_1^{m-1} \varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial y_\varrho} = 0$$

identisch für alle $x, y_1, \ldots y_{m-1}$ erfüllt ist.

Bemerkt man aber, dass nach (13)

$$(21) \qquad \frac{\partial (M)}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y_m} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial (v)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y_m} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x}$$

$$(22) \qquad \frac{\partial (M)}{\partial y_\varrho} = \frac{\partial M}{\partial y_\varrho} + \frac{\partial M}{\partial y_m} \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_\varrho}, \qquad \frac{\partial (v)}{\partial y_\varrho} = \frac{\partial v}{\partial y_\varrho} + \frac{\partial v}{\partial y_m} \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_\varrho}$$

$$(\text{für } \varrho = 1, 2, \cdots m-1),$$

dass ferner aus

$$(23)\qquad F_\varrho(x,\, y_1,\, \ldots y_{m-1},\, \Omega_1) = f_\varrho(x,\, y_1,\, \ldots y_{m-1})$$
$$(\text{für } \varrho = 1,\, 2,\, \cdots m-1)$$

durch Differentiation

$$(24)\qquad \frac{\partial f_\varrho}{\partial y_\varrho} = \frac{\partial F_\varrho}{\partial y_\varrho} + \frac{\partial F_\varrho}{\partial \Omega_1}\frac{\partial \Omega_1}{\partial y_\varrho} = \frac{\partial F_\varrho}{\partial y_\varrho} + \frac{\partial F_\varrho}{\partial y_m}\frac{\partial \Omega_1}{\partial y_\varrho},$$

ferner aus

$$\frac{dy_m}{dx} = \frac{d\Omega_1}{dx} = F_m(x,\, y_1,\, \ldots y_{m-1},\, y_m)$$

die nothwendig in $x,\, y_1,\, \ldots y_{m-1}$ identische Gleichung

$$(25)\qquad \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_2} f_2 + \cdots + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_{m-1}} f_{m-1}$$
$$= F_m(x,\, y_1,\, \ldots y_{m-1},\, \Omega_1)$$

folgt, dass sich endlich durch Differentiation der in $x,\, y_1,\, \ldots y_{m-1},\, y_m$ identischen Gleichung (17) nach y_m mit Berücksichtigung von (18)

$$(26)\qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial v}{\partial y_\varrho} F_\varrho + \sum_1^m{}_\varrho \frac{\partial \omega_1}{\partial y_\varrho}\frac{\partial F_\varrho}{\partial y_m} = 0$$

ergiebt, so folgt unmittelbar durch Einsetzen der durch die Gleichungen (21), (22), (23), (24) gegebenen Werthe der linken Seiten derselben mit Berücksichtigung der identischen Beziehungen (25), (26) und der Identitäten (16), (17) in die linke Seite der Gleichung (20) oder, was nach (19) dasselbe ist, in

$$(v)\frac{\partial (M)}{\partial x} - (M)\frac{\partial (v)}{\partial x} + \sum_1^{m-1}{}_\varrho f_\varrho\left((v)\frac{\partial (M)}{\partial y_\varrho} - (M)\frac{\partial (v)}{\partial y_\varrho}\right)$$
$$+ (M)(v)\sum_1^{m-1}{}_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial y_\varrho} = 0,$$

dass dieselbe identisch gleich Null wird, und es ist somit die obige Behauptung erwiesen.

Wir erhalten daher den folgenden Satz:

Kennt man eine Integralfunction $\omega_1(x,\, y_1,\, \ldots y_{m-1},\, y_m)$ *des Systemes* (1) *der* m^{ten} *Klasse und einen Multiplicator* M *desselben, so wird man auch stets für das durch das Integral*

$$\omega_1(x,\, y_1,\, \ldots y_{m-1},\, y_m) = \eta_1$$

durch Elimination von y_m reducirte Differentialgleichungssystem $m-1^{\text{ter}}$ Klasse (14) einen Multiplicator kennen, der sich in der Form

$$M_1 = \left(\frac{M}{\frac{\partial \omega_1}{\partial y_m}}\right) \tag{27}$$

ergiebt, wenn die rechte Seite vermöge des gegebenen Integrales durch Elimination von y_m als Function von $x, y_1, \ldots y_{m-1}$ dargestellt ist.

Seien nun ausser dem Multiplicator des ursprünglichen Systems von Differentialgleichungen *zwei* Integralfunctionen desselben gegeben

$$\omega_1(x, y_1, \ldots y_{m-1}, y_m) = \eta_1, \quad \omega_2(x, y_1, \ldots y_{m-1}, y_m) = \eta_2, \tag{28}$$

so werden, wenn aus der ersten Integralgleichung

$$y_m = \Omega_1(x, y_1, \ldots y_{m-1}, \eta_1) \tag{29}$$

ausgerechnet und in die Differentialgleichungen eingesetzt wird, einerseits nach dem eben bewiesenen Satze

$$M_1 = \left(\frac{M}{\frac{\partial \omega_1}{\partial y_m}}\right) \tag{30}$$

ein Multiplicator des reducirten Systems, andererseits aber auch

$$\omega_2(x, y_1, \ldots y_{m-1}, \Omega_1) = \eta_2 \quad \text{oder} \quad (\omega_2) = \eta_2 \tag{31}$$

ein Integral dieses Systems sein; denn als Integralfunction des ursprünglichen befriedigt es die Gleichung

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y_1} F_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial y_2} F_2 + \cdots + \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-1}} F_{m-1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y_m} F_m = 0 \tag{32}$$

identisch, und da

$$\frac{\partial (\omega_2)}{\partial x} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \Omega_1}\frac{\partial \Omega_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial (\omega_2)}{\partial y_\varrho} = \frac{\partial \omega_2}{\partial y_\varrho} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \Omega_1}\frac{\partial \Omega_1}{\partial y_\varrho} \tag{33}$$

$$(\text{für } \varrho = 1, 2, \cdots m-1),$$

so folgt nach (23) und (32)

$$\frac{\partial (\omega_2)}{\partial x} + \frac{\partial (\omega_2)}{\partial y_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial (\omega_2)}{\partial y_{m-1}} f_{m-1} \tag{34}$$

$$= \frac{\partial \omega_2}{\partial \Omega_1}\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \sum_1^{m-1}{}_\varrho \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_\varrho} f_\varrho\right) - \frac{\partial \omega_2}{\partial y_m} F_m,$$

oder vermöge (25) und (29) die in $x, y_1, \ldots y_{m-1}$ identische Gleichung

$$(35) \qquad \frac{\partial(\omega_2)}{\partial x} + \sum_1^{m-1}{}^{\varrho} \frac{\partial(\omega_2)}{\partial y_\varrho} f_\varrho = 0,$$

d. h. die Gleichung (31) ist eine Integralgleichung des reducirten Differentialgleichungsystems (14). Da nun jetzt aber vermöge (30) und (31) ein Multiplicator und ein Integral des reducirten Differentialgleichungsystems (14) bekannt sind, so wird sich, wenn vermöge der Gleichung (31)

$$(36) \qquad y_{m-1} = \Omega_2(x, y_1, \ldots y_{m-2}, \eta_1, \eta_2)$$

in die ersten $m-2$ Differentialgleichungen von (14) substituirt wird, ein Differentialgleichungsystem $m-2^{\text{ter}}$ Klasse

$$(37) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x, y_1, \ldots y_{m-2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_{m-2}}{dx} = \varphi_{m-2}(x, y_1, \ldots y_{m-2}) \end{cases}$$

ergeben, für welches ein Multiplicator bekannt sein wird in der Form

$$(38) \qquad M_2 = \left(\frac{M_1}{\dfrac{\partial(\omega_2)}{\partial y_{m-1}}}\right) = \left(\frac{M}{\dfrac{\partial \omega_1}{\partial y_m} \dfrac{\partial(\omega_2)}{\partial y_{m-1}}}\right),$$

worin der Ausdruck rechts so zu verstehen ist, dass man aus der ersten Integralgleichung (28) y_m ausrechnet, in die zweite Integralgleichung einsetzt, so dass sich $(\omega_2) = \eta_2$ ergiebt, aus dieser wieder den Werth für y_{m-1} herleitet, und diese Werthe von y_m und y_{m-1}, welche beide nur durch $x, y_1, \ldots y_{m-2}, \eta_1, \eta_2$ ausgedrückt sind, sowohl in M_1 als auch in $\frac{\partial \omega_1}{\partial y_m}$ und in $\frac{\partial(\omega_2)}{\partial y_{m-1}}$ substituirt.

Fahren wir in diesen Schlüssen fort, so gelangen wir zu folgendem Theorem:

Seien k Integralgleichungen des Differentialgleichungsystems m^{ter} Klasse (1)

$$(39) \qquad \omega_1(x, y_1, \ldots y_m) = \eta_1, \quad \omega_2(x, y_1, \ldots y_m) = \eta_2, \quad \ldots \omega_k(x, y_1, \ldots y_m) = \eta_k$$

und ein Multiplicator M dieses Systems bekannt, so kennt man

auch stets einen Multiplicator M_k *des Differentialgleichungsystems* $m - k^{\text{ter}}$ *Klasse, welches man erhält, wenn man in die ersten* $m-k$ *Differentialgleichungen* (1) *die aus den Gleichungen* (39) *hervorgehenden Werthe von* $y_m, y_{m-1}, \ldots y_{m-k+1}$ *durch* $x, y_1, y_2 \ldots y_{m-k}, \eta_1, \ldots \eta_k$ *ausgedrückt einsetzt, d. h. des mit Hülfe von* k *Integralgleichungen reducirten Differentialgleichungsystems* $m - k^{\text{ter}}$ *Klasse.*

Man findet diesen Multiplicator in folgender Weise; man berechne aus

$$(40) \qquad \omega_1(x, y_1, \ldots y_m) = \eta_1$$

zunächst y_m und setze diesen Werth in die anderen Gleichungen (39) ein, die dann in

$$(41) \quad \omega_{21}(x, y_1, \ldots y_{m-1}, \eta_1) = \eta_2, \ \omega_{31}(x, y_1, \ldots y_{m-1}, \eta_1) = \eta_3, \ldots \omega_{k1}(x, y_1, \ldots y_{m-1}, \eta_1) = \eta_k$$

übergehen mögen; berechne weiter aus

$$(42) \qquad \omega_{21}(x, y_1, \ldots y_{m-1}, \eta_1) = \eta_2$$

y_{m-1} und setze den Werth in die übrigen Gleichungen (41) ein, welche die Form

$$(43) \quad \omega_{32}(x, y_1, \ldots y_{m-2}, \eta_1, \eta_2) = \eta_3, \ \omega_{42}(x, y_1, \ldots y_{m-2}, \eta_1, \eta_2) = \eta_4, \ldots \omega_{k2}(x, y_1, \ldots y_{m-2}, \eta_1, \eta_2) = \eta_k$$

annehmen mögen, leite aus

$$(44) \qquad \omega_{32}(x, y_1, \ldots y_{m-2}, \eta_1, \eta_2) = \eta_3$$

y_{m-2} her, setze diesen Werth in die übrigen Gleichungen ein u. s. w., *so ergiebt sich nach der oben gegebenen Herleitung der Multiplicator* M_k *in der Form*

$$(45) \qquad M_k = \frac{(M)}{\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y_m}\right)\left(\frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-1}}\right)\left(\frac{\partial \omega_{32}}{\partial y_{m-2}}\right)\cdots\left(\frac{\partial \omega_{k\,k-1}}{\partial y_{m-k+1}}\right)},$$

worin die eingeklammerten Ausdrücke anzeigen sollen, dass die Grössen $y_m, y_{m-1}, \ldots y_{m-k+1}$ *mit Hülfe der* k *gegebenen Integralgleichungen* (39) *eliminirt sind.*

Wir können aber dem Nenner der Gleichung (45) noch eine einfachere Form geben, wenn wir den algebraischen Eliminationsprocess der einzelnen Grössen $y_m, y_{m-1}, \ldots y_{m-k+1}$ etwas genauer verfolgen.

Da nämlich nach den Gleichungen (39) bis (44) u. f. die in $x, y_1, y_2, \ldots$ identischen Beziehungen bestehen,

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial y_m} = \frac{\partial \omega_{21}}{\partial \eta_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial y_m}, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-1}} = \frac{\partial \omega_{21}}{\partial \eta_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-1}},$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-2}} = \frac{\partial \omega_{21}}{\partial \eta_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-2}} + \frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-2}}, \ldots$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial y_m} = \frac{\partial \omega_{32}}{\partial \eta_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial y_m}, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial y_{m-1}} = \frac{\partial \omega_{32}}{\partial \eta_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial \omega_{32}}{\partial \eta_2}\frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-1}},$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial y_{m-2}} = \frac{\partial \omega_{32}}{\partial \eta_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-2}} + \frac{\partial \omega_{32}}{\partial \eta_2}\frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-2}} + \frac{\partial \omega_{32}}{\partial y_{m-2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

so entspringt die aus der Regel der Multiplication zweier Determinanten unmittelbar ersichtliche Beziehung

$$(46) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \frac{\partial \omega_{21}}{\partial \eta_1} & 1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \frac{\partial \omega_{32}}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \omega_{32}}{\partial \eta_2} & 1 \cdots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \omega_{k\,k-1}}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \omega_{k\,k-1}}{\partial \eta_2} & \cdots \frac{\partial \omega_{k\,k-1}}{\partial \eta_{k-1}} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} & 0 & 0 \cdots 0 \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-1}} & 0 \cdots 0 \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-2}} & \frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-2}} & \frac{\partial \omega_{32}}{\partial y_{m-2}} \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-k+1}} & \frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-k+1}} & \cdots \frac{\partial \omega_{k\,k-1}}{\partial y_{m-k+1}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} & \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-2}} & \cdots & \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-k+1}} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial y_m} & \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-2}} & \cdots & \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-k+1}} \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial y_m} & \frac{\partial \omega_3}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_3}{\partial y_{m-2}} & \cdots & \frac{\partial \omega_3}{\partial y_{m-k+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \omega_k}{\partial y_m} & \frac{\partial \omega_k}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_k}{\partial y_{m-2}} & \cdots & \frac{\partial \omega_k}{\partial y_{m-k+1}} \end{vmatrix},$$

welche, weil jede der Determinanten der linken Seite in das Product ihrer Diagonalglieder übergeht, sich, wenn die sogenannte *Functionaldeterminante* der k Functionen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k$ in Bezug auf die Variabeln

$$y_m, \; y_{m-1}, \; y_{m-2}, \; \ldots \; y_{m-k+1}$$

$$(47) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} & \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-2}} & \cdots & \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-k+1}} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial y_m} & \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-2}} & \cdots & \frac{\partial \omega_2}{\partial y_{m-k+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \omega_k}{\partial y_m} & \frac{\partial \omega_k}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \omega_k}{\partial y_{m-2}} & \cdots & \frac{\partial \omega_k}{\partial y_{m-k+1}} \end{vmatrix} = F(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k)$$

gesetzt wird, in die Form bringen lässt:

$$(48) \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} \frac{\partial \omega_{21}}{\partial y_{m-1}} \frac{\partial \omega_{32}}{\partial y_{m-2}} \cdots \frac{\partial \omega_{k\,k-1}}{\partial y_{m-k+1}} = F(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k).$$

Wir finden somit nach Gleichung (45), dass

der Multiplicator des mit Hülfe von k Integralen reducirten Systems von $m - k$ Differentialgleichungen die Form hat

$$(49) \qquad M_k = \left(\frac{M}{F(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k)}\right),$$

worin die Klammer wieder anzeigt, dass der Ausdruck mit Hülfe der k Integrale (39) *auf eine Function von y_1, y_2, $\ldots y_{m-k}$ reducirt werden soll.*

Daraus folgt aber,

dass, wenn man für ein Differentialgleichungssystem m^{ter} Klasse einen Multiplicator und $m - 1$ Integralfunctionen ω_1, ω_2, $\ldots \omega_{m-1}$ kennt, auch ein Multiplicator des mit Hülfe der $m - 1$ Integrale

$$(50) \qquad \omega_1 = \eta_1, \quad \omega_2 = \eta_2, \cdots \omega_{m-1} = \eta_{m-1}$$

reducirten Systemes von einer Differentialgleichung

$$(51) \qquad \frac{dy_1}{dx} = \vartheta(x, y_1, \eta_1, \ldots \eta_{m-1})$$

bekannt sein wird, und zwar in der Form

$$(52) \qquad M_{m-1} = \left(\frac{M}{F(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{m-1})}\right);$$

dieser Multiplicator wird der letzte Multiplicator von Jacobi genannt.

3. Untersuchen wir nun zunächst die Bedeutung eines Multiplicators μ *einer* Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \Theta(x, y), \tag{53}$$

welcher nach (4) der Gleichung genügt

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \Theta)}{\partial y} = 0, \tag{54}$$

so wird die Gleichung (53) mit μ multiplicirt lauten

$$\mu dy - \mu \Theta(x, y) \cdot dx = 0. \tag{55}$$

Hat man aber eine Differentialgleichung von der Form

$$L(x, y)\, dy + M(x, y)\, dx = 0, \tag{56}$$

für welche L und M solche Functionen von x und y sind, dass

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}, \tag{57}$$

wie dies für die Gleichung (55) nach (54) der Fall ist, identisch für alle x und y befriedigt wird, so wird diese Differentialgleichung eine *vollständige* genannt, und es lässt sich die Auffindung der dieser Differentialgleichung zugehörigen Integralfunction auf die entsprechende Aufgabe für die einfachste Form von Differentialgleichungen

$$\frac{dt}{dx} = F(x) \tag{58}$$

zurückführen, deren allgemeines Integral, wenn c eine willkürliche Constante, mit

$$t = \int F(x)\, dx + c \tag{59}$$

bezeichnet, und auf dessen wirkliche Auswerthung später eingegangen wird; man nennt die Integralformen (59) *Quadraturen.* Um die Reduction der für (56) zu lösenden Aufgabe durchzuführen, sei zunächst bemerkt, dass, wenn es uns gelingt, eine Function u von x und y zu bestimmen so, dass zugleich

$$\frac{\partial u}{\partial y} = L(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \tag{60}$$

befriedigt wird, dann offenbar

$$u = c \tag{61}$$

gesetzt, worin c eine willkürliche Constante bedeutet, die gesuchte Integralgleichung von (56) sein wird, da sich durch Differentiation von (61) nach (60)

$$(62)\quad du = \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial x}dx = L(x,y)\,dy + M(x,y)\,dx = 0$$

ergiebt. Um nun u aus (60) wirklich herzuleiten, betrachte man in der ersten dieser Gleichungen y als Variable und x als Parameter, und erhält sodann durch Vergleichung mit (58) und (59)

$$(63)\qquad u = \int L(x,y)\,dy + P(x)\,,$$

worin $P(x)$ constant in Bezug auf y, aber noch abhängig vom Parameter x sein wird; differentiirt man nunmehr (63) nach x, so folgt nach (60)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) = \int \frac{\partial L(x,y)}{\partial x}dy + \frac{dP(x)}{dx}$$

oder

$$(64)\qquad \frac{dP(x)}{dx} = M(x,y) - \int \frac{\partial L(x,y)}{\partial x}dy\,,$$

und da die rechte Seite dieser Gleichung nur von x abhängt, weil vermöge (57)

$$\frac{\partial\left[M(x,y) - \int \frac{\partial L(x,y)}{\partial x}dy\right]}{\partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial L(x,y)}{\partial x} = 0$$

ist, so wird die Differentialgleichung (64) wieder die Form von (58) haben, und die zugehörige Integralgleichung also lauten

$$(65)\qquad P(x) = \int\left[M(x,y) - \int \frac{\partial L(x,y)}{\partial x}dy\right]dx + C,$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet; es nimmt somit nach (63) u die Gestalt an

$$(66)\quad u = \int L(x,y)\,dy + \int\left[M(x,y) - \int \frac{\partial L(x,y)}{\partial x}dy\right]dx + C.$$

Da nun nach der obigen Auseinandersetzung u einer constanten Grösse gleichzusetzen ist, so erhalten wir die allgemeine Integralgleichung von (56) in der Form

$$(67)\ \int L(x,y)\,dy + \int\left[M(x,y) - \int \frac{\partial L(x,y)}{\partial x}dy\right]dx = k\,,$$

worin k eine willkürliche Constante bedeutet, und sehen somit,

dass sich die Auffindung der Integralgleichung einer vollständigen Differentialgleichung auf Quadraturen zurückführen lässt.

Da nun die Gleichung (55) vermöge der Beziehung (54) ebenfalls eine vollständige Differentialgleichung ist, die man, wenn der Multiplicator μ der Differentialgleichung (53) bekannt ist, durch Multiplication dieser mit μ aufstellen kann, so folgt der Satz,

dass, wenn man einen Multiplicator einer Differentialgleichung erster Ordnung kennt, die Auffindung der Integralfunction auf Quadraturen zurückführbar ist.

4. Beachtet man nun, indem wir wieder zu einem Differentialgleichungsysteme m^{ter} Klasse zurückkehren, dass die Gleichung (52) einen Multiplicator der Differentialgleichung (51) lieferte, wenn *ein* Multiplicator und $m-1$ Integrale des Differentialgleichungsystems m^{ter} Klasse bekannt waren, so können wir mit Benutzung der voranstehenden Sätze das folgende Theorem aussprechen:

Kennt man für ein Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse einen Multiplicator und $m-1$ Integralfunctionen, so lässt sich die Auffindung der letzten Integralfunction auf Quadraturen zurückführen.

5. Wir wollen die Untersuchung über die Multiplicatoren eines Systems von Differentialgleichungen noch mit einer Bemerkung über die Beziehung dieser zu den singulären Integralen solcher Systeme beschliessen.

Sei nämlich $\omega_1(x, y_1, y_2, \ldots y_m)$ eine Integralfunction des Systemes (1), so dass

$$\omega_1(x, y_1, y_2, \cdots y_{m-1}, y_m) = \eta_1 \tag{68}$$

gesetzt, worin η_1 eine Constante bedeutet, nach der Definition der Gleichung

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} F_1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_2} F_2 + \cdots + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} F_{m-1} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} F_m = 0$$

oder

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} F_1 + \cdots + \frac{\partial \omega_1}{\partial y_{m-1}} F_{m-1}\right) : \frac{\partial \omega_1}{\partial y_m} + F_m = 0 \tag{69}$$

identisch genügt, so wird jede Function von $x, y_1, y_2, \ldots y_{m-1}, y_m$

$$\varphi(x, y_1, y_2, \cdots y_{m-1}, y_m)$$

auf die Form $\omega_1(x, y_1, y_2, \cdots y_{m-1}, y_m) - H_1$ gebracht werden können, wenn man nur H_1 als Function von $x, y_1, y_2, \cdots y_{m-1}, y_m$ aus der Gleichung

$$(70)\quad \omega_1(x, y_1, y_2, \cdots y_{m-1}, y_m) - H_1 = \varphi(x, y_1, y_2, \cdots y_{m-1}, y_m)$$

so bestimmt, dass dieselbe in $x, y_1, y_2, \ldots y_{m-1}, y_m$ identisch erfüllt wird. Nehmen wir nun an, dass

$$(71)\qquad \varphi(x, y_1, y_2, \cdots y_{m-1}, y_m) = 0$$

ein *singuläres* Integral des Differentialgleichungsystems (1) ist, dass also jedenfalls die Gleichung

$$(72)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}F_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}F_2 + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}}F_{m-1} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_m}F_m = 0$$

durch die Beziehung (71) in $x, y_1, y_2, \ldots y_{m-1}, y_m$ erfüllt wird, so ergiebt sich aus (70) durch Einsetzen in (72)

$$(73)\quad \frac{\partial\omega_1}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y_1} - \frac{\partial H_1}{\partial y_1}\right)F_1 + \cdots$$
$$+ \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y_{m-1}} - \frac{\partial H_1}{\partial y_{m-1}}\right)F_{m-1} + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y_m} - \frac{\partial H_1}{\partial y_m}\right)F_m = 0,$$

oder durch Division mit $\frac{\partial\omega_1}{\partial y_m}$

$$\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_1}{\partial y_1}F_1 + \cdots + \frac{\partial\omega_1}{\partial y_{m-1}}F_{m-1}\right) : \frac{\partial\omega_1}{\partial y_m} + F_m$$
$$- \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y_1}F_1 + \cdots + \frac{\partial H_1}{\partial y_m}F_m\right) : \frac{\partial\omega_1}{\partial y_m} = 0,$$

woraus nach (69) folgt, dass die Gleichung

$$(74)\quad \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y_1}F_1 + \cdots + \frac{\partial H_1}{\partial y_{m-1}}F_{m-1} + \frac{\partial H_1}{\partial y_m}F_m\right) : \frac{\partial\omega_1}{\partial y_m} = 0$$

für alle $x, y_1, \ldots y_{m-1}, y_m$ des singulären Integrales erfüllt sein muss. Dies kann aber offenbar nicht dadurch geschehen, dass die Klammer oder $\frac{dH_1}{dx}$ verschwindet, weil sonst H_1 eine Constante η_1 sein müsste, und somit die φ-Function unter den durch (68) dargestellten Integralen enthalten wäre, was selbstverständlich von vornherein ausgeschlossen war; der Gleichung (74), also auch den Gleichungen (73) und (72) kann aber auch

dadurch genügt werden, dass zwischen $x, y_1, y_2, \dots y_{m-1}, y_m$ ein solcher Zusammenhang besteht, dass

$$(75) \qquad \frac{\partial \omega_1(x, y_1, y_2, \dots y_{m-1}, y_m)}{\partial y_m} = \infty$$

wird, d. h. der durch die Gleichung (71) oder durch das singuläre Integral definirte Zusammenhang zwischen $x, y_1, y_2, \dots y_{m-1}, y_m$, welcher dem System von Differentialgleichungen (1) genügt, wird durch die Gleichung (75) gegeben, oder

$$(76) \qquad \frac{1}{\dfrac{\partial \omega_1(x, y_1, \dots y_{m-1}, y_m)}{\partial y_m}} = 0$$

bildet eine singuläre Integralgleichung, vorausgesetzt, dass sie nicht in anderen particulären Integralgleichungen enthalten ist.

Sei nun $\omega_2(x, y_1, y_2, \dots y_{m-1}, y_m)$ eine zweite Integralfunction des Differentialgleichungssystems (1), so wird nach der früheren Bezeichnungsweise

$$\omega_{21}(x, y_1, y_2, \dots y_{m-1}, \eta_1)$$

eine Integralfunction des reducirten Systemes von Differentialgleichungen (14) sein, und somit wieder

$$(77) \qquad \frac{1}{\dfrac{\partial \omega_{21}(x, y_1, \dots y_{m-1}, \eta_1)}{\partial y_{m-1}}} = 0$$

eine singuläre Integralgleichung des Systemes (14), also auch des gegebenen sein. Schliessen wir so weiter, so folgt aus der durch die Gleichung (45) ausgedrückten Beziehung,

dass die singulären Integrale eines Differentialgleichungsystems beliebiger Klasse gefunden werden, wenn man den Multiplicator desselben gleich unendlich setzt,

wobei jedoch immer nachher durch Einsetzen in das Differentialgleichungsystem erst festzustellen ist, ob die gefundenen Ausdrücke auch wirklich dem Systeme genügen.

V. Ueber die Irreductibilität eines Systems algebraischer Differentialgleichungen.

1. Sei ein Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse in der Form vorgelegt

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \ldots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_1}{dx} = G_1(x, t_1, y_1, \cdots y_m) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \ldots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_m}{dx} = G_m(x, t_1, y_1, \cdots y_m), \end{cases}$$

worin t_1 eine bestimmte Lösung der Gleichung

$$(2)\qquad G(x, t, y_1, \cdots y_m) = 0$$

ist, und werde angenommen, dass unter ν Elementen eines Integralsystems von (1)

$$Y_1, Y_2, \ldots Y_m$$

eine algebraische Beziehung bestehe

$$(3)\qquad f(x, Y_1, Y_2, \cdots Y_\nu) = 0,$$

dann ist sogleich ersichtlich, dass, wenn man aus den Gleichungen (1), (2) und

$$(4)\qquad f(x, y_1, y_2, \cdots y_\nu) = 0$$

eine der Grössen z. B. y_ν eliminirt, man ein Differentialgleichungsystem $m - 1^{\text{ter}}$ Klasse erhält, welches in die Normalform umgesetzt lautet:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g(x, u_1, y_1, \cdots y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \cdots y_m)}{\partial u_1} \dfrac{dy_1}{dx} = g_1(x, u_1, y_1, \cdots y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \cdots y_m) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial g(x, u_1, y_1, \cdots y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \cdots y_m)}{\partial u_1} \dfrac{dy_{\nu-1}}{dx} = g_{\nu-1}(x, u_1, y_1, \cdots y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \cdots y_m) \\ \dfrac{\partial g(x, u_1, y_1, \cdots y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \cdots y_m)}{\partial u_1} \dfrac{dy_{\nu+1}}{dx} = g_{\nu+1}(x, u_1, y_1, \cdots y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \cdots y_m) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial g(x, u_1, y_1, \cdots y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \cdots y_m)}{\partial u_1} \dfrac{dy_m}{dx} = g_m(x, u_1, y_1, \cdots y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \cdots y_m), \end{cases}$$

worin u_1 eine Lösung der Gleichung

$$(6) \qquad g(x, u, y_1, \ldots y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \ldots y_m) = 0$$

ist, und für welche

$$Y_1, \ldots Y_{\nu-1}, Y_{\nu+1}, \ldots Y_m$$

ein *vollständiges* d. h. aus $m-1$ Integralelementen bestehendes Integralsystem darstellen.

Es bildet somit unter der Annahme einer algebraischen Beziehung (3) *ein Theil eines vollständigen Integralsystems des Differentialgleichungssystems* m^{ter} *Klasse ein vollständiges Integralsystem eines Differentialgleichungssystems niederer Klasse.*

Mag nun umgekehrt von einem vollständigen Integralsysteme von (1), (2)

$$Y_1, Y_2, \ldots Y_m$$

ein Theil $Y_1, Y_2, \ldots Y_\nu$, *worin* $\nu < m$ *ist, ein vollständiges Integralsystem eines Differentialgleichungssystems* ν^{ter} *Klasse bilden*

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial h(x, v_1, y_1, \ldots y_\nu)}{\partial v_1} \dfrac{dy_1}{dx} = h_1(x, v_1, y_1, \cdots y_\nu) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial h(x, v_1, y_1, \ldots y_\nu)}{\partial v_1} \dfrac{dy_\nu}{dx} = h_\nu(x, v_1, y_1, \cdots y_\nu), \end{cases}$$

worin v_1 eine Lösung der mit Adjungirung von $x, y_1, \ldots y_m$ algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(8) \qquad h(x, v, y_1, \cdots y_\nu) = 0$$

ist, so werden, wenn man die den $Y_1, \ldots Y_m$ entsprechenden Werthe von t_1 und v_1 mit $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{v}_1$ bezeichnet, wie durch Vergleichung von (1) und (7) hervorgeht, die Relationen bestehen

$$(9) \begin{cases} \dfrac{\partial G(x, \mathfrak{t}_1, Y_1, \ldots Y_m)}{\partial \mathfrak{t}_1} h_1(x, \mathfrak{v}_1, Y_1, \cdots Y_\nu) = \dfrac{\partial h(x, \mathfrak{v}_1, Y_1, \ldots Y_\nu)}{\partial \mathfrak{v}_1} G_1(x, \mathfrak{t}_1, Y_1, \cdots Y_m) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial G(x, \mathfrak{t}_1, Y_1, \ldots Y_m)}{\partial \mathfrak{t}_1} h_\nu(x, \mathfrak{v}_1, Y_1, \cdots Y_\nu) = \dfrac{\partial h(x, \mathfrak{v}_1, Y_1, \ldots Y_\nu)}{\partial \mathfrak{v}_1} G_\nu(x, \mathfrak{t}_1, Y_1, \cdots Y_m) \end{cases}$$

es existiren somit wieder algebraische Beziehungen zwischen den Integralelementen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$,

wenn nicht sämmtliche Gleichungen (9) identisch sind, d. h. die ersten ν Gleichungen des Systemes (1) nur $y_1, y_2, \dots y_\nu$ enthalten, also ein selbständiges Differentialgleichungsystem ν^{ter} Klasse bilden.

Schliesst man diesen letzteren Fall aus und eliminirt aus einer der algebraischen Beziehungen

$$(10) \qquad \frac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots y_m)}{\partial t_1} h_\alpha(x, r_1, y_1, \cdots y_\nu)$$
$$= \frac{\partial h(x, r_1, y_1, \dots y_\nu)}{\partial r_1} G_\alpha(x, t_1, y_1, \cdots y_m)$$

und den Differentialgleichungen (1), (2) die Grösse y_m, so erhält man ein ähnliches Differentialgleichungsystem $m - 1^{\text{ter}}$ Klasse, welches das vollständige Integralsystem $Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}$ hat, und von dem der Theil $Y_1, Y_2, \dots Y_\nu$ wieder ein vollständiges Integralsystem von (7) bilden wird; stellen wir dieses Differentialgleichungsystem $m - 1^{\text{ter}}$ Klasse in derselben Weise wie vorher mit (7) zusammen, so kann man in ähnlicher Weise ein solches $m - 2^{\text{ter}}$ Klasse herleiten u. s. w., bis man zu einem Differentialgleichungsystem ν^{ter} Klasse von der Form

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H(x, T_1, y_1, \dots y_\nu)}{\partial T_1} \dfrac{dy_1}{dx} = H_1(x, T_1, y_1, \cdots y_\nu) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial H(x, T_1, y_1, \dots y_\nu)}{\partial T_1} \dfrac{dy_\nu}{dx} = H_\nu(x, T_1, y_1, \cdots y_\nu) \end{cases}$$

gelangt, worin T_1 eine Lösung der Gleichung

$$(12) \qquad H(x, T, y_1, \cdots y_\nu) = 0$$

bedeutet. Da dieses Differentialgleichungsystem mit (7) ein gemeinsames Integralsystem $Y_1, Y_2, \dots Y_\nu$ besitzt, so würde sich wiederum aus (11) und (7)

$$(13) \qquad \frac{\partial H(x, \mathfrak{T}_1, Y_1, \dots Y_\nu)}{\partial \mathfrak{T}_1} h_\alpha(x, \mathfrak{v}_1, Y_1, \cdots Y_\nu)$$
$$= \frac{\partial h(x, \mathfrak{v}_1, Y_1, \dots Y_\nu)}{\partial \mathfrak{v}_1} H_\alpha(x, \mathfrak{T}_1, Y_1, \cdots Y_\nu) \quad (\text{für } \alpha = 1, 2, \cdots \nu)$$

ergeben, wenn $\mathfrak{T}_1$ eine Lösung der Gleichung

$$(14) \qquad H(x, \mathfrak{T}, Y_1, \cdots Y_\nu) = 0$$

ist. Wäre nun die Gleichung (13) keine in $Y_1, Y_2, \ldots Y_\nu$ identische, so würde man wiederum die Klasse des Differentialgleichungsystems (11) um eine Einheit erniedrigen können, und es würde somit ein Theil des vollständigen Integralsystems $Y_1, Y_2, \ldots Y_\nu$ der Differentialgleichungen (7) das vollständige Integralsystem eines Differentialgleichungsystems von niedrigerer Klasse als der ν^{ten} sein, — *nehmen wir also an, dass die Integrale $Y_1, Y_2, \ldots Y_\nu$ des Differentialgleichungsystems* (7) *nicht schon zum Theil ein vollständiges Integralsystem eines Differentialgleichungsystems niederer Klasse als der ν^{ten} bilden*, so werden die Gleichungen (13) identische sein müssen, d. h. sämmtliche vollständige Integralsysteme der Differentialgleichungen (7) werden Theile von vollständigen Integralsystemen von (1) sein müssen, und es ist klar, dass die Identität der Gleichungen (13) erhalten bleibt, wenn man für $\mathfrak{v}_1$ jeden Zweig der irreductibeln Gleichung (8) setzt, indem man in (13), worin $Y_1, \ldots Y_m$ durch $y_1, \ldots y_m$ zu ersetzen sind, nur $x, y_1, \ldots y_m$ solche geschlossene Umläufe machen lässt, dass $\mathfrak{v}_1$ in die einzelnen Zweige übergeht. Es konnte jedoch auch, wie wir vorher sahen, schon von vornherein der Fall eintreten, dass das gegebene Differentialgleichungsystem (1) aus ν Differentialgleichungen besteht, welche nur ν abhängige Variable enthalten und aus $m - \nu$ Differentialgleichungen, welche alle m Variabeln einschliessen.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass für den Fall $\nu = m$ aus den obigen Folgerungen sich zugleich ergiebt, dass der Grad des die Lösung t_1 definirenden irreductibeln Factors von (2) gleich oder grösser sein muss als der Grad der irreductibeln Gleichung (8), und wir erhalten somit, wenn wir noch daran erinnern, *dass ein Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse vom n^{ten} Grade genannt werden sollte, wenn die mit Adjungirung von $x, y_1, \ldots y_m$ algebraisch irreductible Gleichung in t vom n^{ten} Grade war*, den folgenden Satz:

Wenn zwischen m Integralelementen eines Differentialgleichungsystems m^{ter} Klasse eine algebraische Beziehung statt-

findet, so lässt sich ein algebraisches Differentialgleichungsystem niederer Klasse als der m^{ten} *aufstellen, von welchem ein Theil jenes Integralsystems ein vollständiges Integralsystem bildet; wenn umgekehrt ein Differentialgleichungsystem* m^{ter} *Klasse ein vollständiges Integralsystem besitzt, von welchem ein Theil* ν $(\nu < m)$ *ein vollständiges Integralsystem eines Differentialgleichungsystems* ν^{ter} *Klasse und* n^{ten} *Grades bildet, wobei angenommen wird, dass von diesen* ν *Integralen nicht schon ein Theil* ν_1 *ein vollständiges Integralsystem eines Differentialgleichungsystems* ${\nu_1}^{ter}$ *Klasse bildet, so werden alle vollständigen Integralsysteme des Differentialgleichungsystems* ν^{ter} *Klasse Theilintegrale des Differentialgleichungsystems* m^{ter} *Klasse bilden, und es wird das gegebene Differentialgleichungsystem entweder aus jenem Differentialgleichungsystem* ν^{ter} *Klasse und* $m - \nu$ *Differentialgleichungen bestehen, welche noch alle* m *abhängigen Variabeln enthalten können, oder es werden zwischen den Elementen eines Integralsystems solche algebraische Beziehungen stattfinden, dass das gegebene Differentialgleichungsystem vermöge derselben in zwei Systeme der angegebenen Art zerfällt, ohne dass deren Integralsysteme jedoch alle des vorgelegten Differentialgleichungsystems erschöpfen.*

2. Nachdem dieser Hülfsatz vorausgeschickt worden, werden wir an die Aufstellung eines für die Theorie der algebraischen Differentialgleichungen wichtigen Begriffes gehen können.

Im zweiten Abschnitte war nachgewiesen worden, dass alle algebraischen Differentialgleichungsysteme in selbständige Differentialgleichungsysteme m^{ter} Klasse und n^{ten} Grades von der Form sich auflösen

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \cdots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_1}{dx} = G_1(x, t_1, y_1, \cdots y_m) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \cdots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_m}{dx} = G_m(x, t_1, y_1, \cdots y_m), \end{cases}$$

worin t_1 eine Lösung der mit Adjungirung von $x, y_1, \ldots y_m$ algebraisch irreductiblen Gleichung vom Grade n in Bezug auf t

$$(16)\qquad G(x, t, y_1, \cdots y_m) = 0$$

ist, und sich, wie II. (35) zeigte, zugleich als rationale Function von $x, y_1, \cdots y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots \frac{dy_m}{dx}$ in der Form

$$(17) \qquad t_1 = R\left(x, y_1, \cdots y_m, \frac{dy_1}{dx}, \cdots \frac{dy_m}{dx}\right)$$

darstellen lässt.

Das Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse und n^{ten} Grades (15), (16) *soll ein irreductibles genannt werden, wenn keine Zusammenstellung von weniger als m Elementen irgend eines Integralsystems ein vollständiges Integralsystem eines Differentialgleichungsystems niederer Klasse bildet*, oder, was dasselbe ist, *das gegebene Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse mit keinem anderen niederer Klasse irgend ein Integralsystem gemein hat.*

Berücksichtigt man zugleich den vorher bewiesenen Satz, so ergiebt sich,

dass ein reductibles Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse und n^{ten} Grades entweder in ein System ν^{ter} Klasse ($\nu < m$) zerfallen wird, das nur ν abhängige Variabeln enthält, und in $m - \nu$ Differentialgleichungen mit im Allgemeinen m Variabeln oder dass zwischen den Elementen eines Integralsystems eine algebraische Beziehung bestehen wird;

jedenfalls giebt es dann ein Differentialgleichungsystem niederer Klasse als der m^{ten}, dessen sämmtliche vollständige Integralsysteme zusammengehörige Elemente von Integralsystemen des gegebenen Differentialgleichungsystems bilden. Es ist somit auch unmittelbar ersichtlich,

dass für ein irreductibles Differentialgleichungsystem nie Elemente von Integralsystemen existiren dürfen, welche algebraische Functionen sind.

3. Nach Aufstellung des Irreductibilitätsbegriffes wird sich mit Berücksichtigung der in 1. und 2. gemachten Auseinandersetzungen leicht der Satz beweisen lassen,

dass ein irreductibles System von Differentialgleichungen m^{ter} Klasse und n^{ten} Grades auch mit keinem andern Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse und niederen Grades als dem n^{ten} ein Integralsystem gemein haben kann.

Denn sei dieses zweite System in der Normalform

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial g(x,\tau_1,y_1,\cdots y_m)}{\partial\tau_1}\dfrac{dy_1}{dx} = g_1(x,\tau_1,y_1\cdots y_m) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad,\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial g(x,\tau_1,y_1,\cdots y_m)}{\partial\tau_1}\dfrac{dy_m}{dx} = g_m(x,\tau_1,y_1,\cdots y_m) \end{cases}$$

gegeben, worin τ_1 eine Lösung der mit Adjungirung von $x, y_1, \dots y_m$ irreductiblen Gleichung ν^{ten} Grades

$$(19)\qquad g(x,\tau,y_1,\cdots y_m) = 0$$

ist, in welcher $\nu < n$, und habe dasselbe mit (15) das Integralsystem

$$Y_1, Y_2, \dots Y_m$$

gemein, so würde sich

$$(20)\quad \frac{G_\alpha(x,T_1,Y_1,\dots Y_m)}{\dfrac{\partial G(x,T_1,Y_1,\dots Y_m)}{\partial T_1}} = \frac{g_\alpha(x,\mathrm{T}_1,Y_1,\dots Y_m)}{\dfrac{\partial g(x,\mathrm{T}_1,Y_1,\dots Y_m)}{\partial \mathrm{T}_1}} \text{(für } \alpha = 1,2,\cdots m)$$

ergeben, worin T_1 und T_1 die dem particulären Integralsysteme $Y_1, \dots Y_m$ entsprechenden Werthe von t_1 und τ_1 bedeuten. Da aber nach den obigen Ausführungen zwischen den Integralelementen eines irreductiblen Differentialgleichungsystems eine algebraische Beziehung nicht stattfinden darf, so wird die Gleichung (20) oder

$$(21)\qquad \frac{G_\alpha(x,t_1,y_1,\cdots y_m)}{\dfrac{\partial G(x,t_1,y_1\cdots y_m)}{\partial t_1}} = \frac{g_\alpha(x,\tau_1,y_1,\cdots y_m)}{\dfrac{\partial g(x,\tau_1,y_1,\cdot\cdot y_m)}{\partial\tau_1}}$$

eine in $y_1, \dots y_m$ identische sein, und somit die beiden Systeme von Differentialgleichungen (15) und (18) insofern zusammenfallen, als ihnen alle Integralsysteme gemeinsam sind. Bringt man nun die Gleichung (19) in die Form

$$(22)\quad \tau_1^\nu + \omega_1(x,y_1,\cdots y_m)\,\tau_1^{\nu-1} + \cdots + \omega_\nu(x,y_1,\cdots y_m) = 0,$$

worin $\omega_1, \dots \omega_\nu$ rationale Functionen bedeuten, und bemerkt, dass sich die Reduction auf die Normalform eines Differentialgleichungssystems stets so vollziehen liess, dass t_1 eine rationale Function von $x, y_1, \cdots y_m, \frac{dy_1}{dx}, \cdots \frac{dy_m}{dx}$ ist, sich also auch mit Hülfe der Gleichungen (18) und (22) als ganze Function von

τ_1 vom $\nu - 1^{\text{ten}}$ Grade, deren Coefficienten rationale Functionen von $x, y_1, \ldots y_m$ sind, in der Form darstellen lässt

$$(23) \quad t_1 = \Omega_0(x, y_1, \cdots y_m) + \Omega_1(x, y_1, \cdots y_m)\tau_1 + \cdots + \Omega_{\nu-1}(x, y_1, \cdots y_m)\tau_1^{\nu-1},$$

so folgt bekanntlich durch Zusammenstellung von (22) und (23) oder durch Elimination von τ_1 zwischen diesen beiden Gleichungen für t_1 eine algebraische Gleichung vom ν^{ten} Grade, deren Coefficienten rationale Functionen von $x, y_1, \ldots y_m$ sind. Da dies aber der Irreductibilität der Gleichung (16) wegen nicht möglich ist, so wird die oben gemachte Annahme, dass die τ_1 definirende Gleichung (19) von niedrigerem Grade als (16) ist, unstatthaft.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt aber sogleich,

dass für ein irreductibles Differentialgleichungsystem die mit Adjungirung von $x, y_1, \ldots y_m$ irreductible Gleichung (16) *für t_1 auch mit Adjungirung eines jeden speciellen Integralsystem $Y_1, \ldots Y_m$ irreductibel bleibt;*

denn wäre dies nicht der Fall, so würde das ursprüngliche System von Differentialgleichungen mit einem System derselben Klasse, welches aber zu einem niedrigeren Grade gehört, ein Integralsystem gemein haben, was nach dem vorigen Satze unmöglich ist, und ebenso unmittelbar folgt aus dem Umstande, dass, wie in 5. des dritten Abschnittes nachgewiesen worden, die singulären Integralsysteme einerseits algebraische Beziehungen zwischen den Integralelementen bedingen, andererseits ein Theil ihrer Elemente das vollständige Integralsystem eines Systems von weniger als m Differentialgleichungen bildet,

dass ein Differentialgleichungsystem beliebiger Klasse, welches singuläre Integralsysteme besitzt, stets reducibel ist.

Endlich liefert die Zusammenstellung des in 1. dieses Abschnittes bewiesenen Satzes mit der vorher gegebenen Irreductibilitätsdefinition unmittelbar das Theorem,

dass, wenn ein irreductibles System von Differentialgleichungen m^{ter} Klasse mit einem Differentialgleichungsystem höherer Klasse oder derselben Klasse, aber höheren oder desselben Grades ein Integralsystem gemein hat, dann auch sämmtliche vollständige

Integralsysteme des irreductibeln Systems Integralsysteme des Systemes höherer oder derselben Klasse resp. Grades sein werden.

4. Sei wieder die Differentialgleichung

$$(24) \qquad F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0$$

gegeben, welche mit Adjungirung von $x, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ in Bezug auf $\frac{d^n z}{dx^n}$ algebraisch irreductibel sein soll, und die durch das System der Gleichungen (41) und (42) des zweiten Abschnittes ersetzt werden konnte, so wird, wenn man beachtet, dass nach diesen Gleichungen die Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ die 0te, 1te, $\ldots n-1^{\text{te}}$ Ableitung der Function z oder y_1 bedeuten, sich bei genauer Uebertragung der oben bewiesenen Sätze Folgendes ergeben:

Wenn eine algebraische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einer anderen gleichartigen von niederer Ordnung, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreductibel ist, ein Integral gemein hat, welches keiner algebraischen Differentialgleichung noch niederer Ordnung genügt, so werden sämmtliche Integrale der zweiten Differentialgleichung auch der ersten genügen, oder es wird, wie man sich auch in diesem Falle ausdrückt, die Differentialgleichung niederer Ordnung ein algebraisches Integral der ersteren sein.

Aus der oben gegebenen Irreductibilitätsdefinition eines Systems von Differentialgleichungen folgt ferner:

Eine algebraische Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (24) *wird irreductibel genannt, wenn sie in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreductibel ist und mit keiner algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung ein Integral gemein hat.*

Daraus ergiebt sich,

dass eine irreductible Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit keiner anderen algebraischen Differentialgleichung derselben Ordnung, aber in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten niederen Grades ein Integral gemein haben kann, dass also auch eine irreductible Differentialgleichung für kein particuläres Inte-

gral sich in Factoren zerlegen lassen darf, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten von niedrigerem Grade sind,

und endlich der Satz:

dass, wenn eine irreductible Differentialgleichung (24) *mit einer anderen Differentialgleichung* e i n *Integral gemein hat, sie alle Integrale mit derselben gemein haben, also ein algebraisches Integral der letzteren sein muss.*

VI. Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungssysteme.

1. Seien k *irreductible* Differentialgleichungssysteme $m_1, m_2, \ldots m_k^{\text{ter}}$ Klasse gegeben:

$$(1)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial G_\varrho(x, t_{1\varrho}, y_{\varrho 1}, \cdots y_{\varrho m_\varrho})}{\partial t_{1\varrho}} \dfrac{dy_{\varrho 1}}{dx} = G_{\varrho 1}(x, t_{1\varrho}, y_{\varrho 1}, \cdots y_{\varrho m_\varrho}) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial G_\varrho(x, t_{1\varrho}, y_{\varrho 1}, \cdots y_{\varrho m_\varrho})}{\partial t_{1\varrho}} \dfrac{dy_{\varrho m_\varrho}}{dx} = G_{\varrho m_\varrho}(x, t_{1\varrho}, y_{\varrho 1}, \cdots y_{\varrho m_\varrho}), \\ \qquad\qquad (\text{für } \varrho = 1, 2, \cdots k), \end{array}\right.$$

worin $t_{1\varrho}$ als Lösung der irreductibeln Gleichung n_ϱ^{ten} Grades definirt ist

$$(2)\qquad G_\varrho(x, t_\varrho, y_{\varrho 1}, \ldots y_{\varrho m_\varrho}) = 0,$$

ferner ein irreductibles oder reductibles Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse

$$(3)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial g(x, \tau_1, z_1, \ldots z_m)}{\partial \tau_1} \dfrac{dz_1}{dx} = g_1(x, \tau_1, z_1, \cdots z_m) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial g(x, \tau_1, z_1, \ldots z_m)}{\partial \tau_1} \dfrac{dz_m}{dx} = g_m(x, \tau_1, z_1, \cdots z_m), \end{array}\right.$$

worin τ_1 eine Lösung der Gleichung

$$(4)\qquad g(x, \tau, z_1, \ldots z_m) = 0$$

ist, und werde angenommen, dass zwischen den Elementen der den irreductibeln Systemen zugehörigen Integralsysteme

$$(5)\qquad \begin{cases} \bar{y}_{11}, \bar{y}_{12}, \dots \bar{y}_{1m_1} \\ \bar{y}_{21}, \bar{y}_{22}, \dots \bar{y}_{2m_2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \bar{y}_{k1}, \bar{y}_{k2}, \dots \bar{y}_{km_k} \end{cases}$$

und den Elementen eines Integralsystemes der Differentialgleichungen (3)

$$\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots \bar{z}_m$$

m algebraische Beziehungen von der Form

$$(6)\quad \mathfrak{G}_1(x, \bar{y}, \bar{z}_1) = 0,\ \mathfrak{G}_2(x, \bar{y}, \bar{z}_2) = 0, \cdots \mathfrak{G}_m(x, \bar{y}, \bar{z}_m) = 0$$

bestehen, worin $\bar{y}$ kurz das gesammte System (5) repräsentiren soll, und $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_m$ ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten. Führen wir zunächst die den Systemen $\bar{y}$ entsprechenden, durch die Gleichungen (2) definirten Grössen

$$\bar{t}_{11}, \bar{t}_{12}, \dots \bar{t}_{1k}$$

ein und ersetzen die Gleichungen (6) durch die mit Adjungirung aller dieser $\bar{t}$-Grössen, der x und $\bar{y}$ irreductiblen Gleichungen

$$(7)\quad \mathfrak{g}_1(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_1) = 0,\ \mathfrak{g}_2(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_2) = 0, \cdots \mathfrak{g}_m(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_m) = 0,$$

die wir der weiteren Betrachtung zu Grunde legen. Da $\bar{z}_1, \dots \bar{z}_m$ algebraische Functionen der Grössen $x, \bar{y}, \bar{t}$ sind, so kann man nach den Auseinandersetzungen des zweiten Abschnitts eine algebraische Function T_1 von $x, \bar{y}, \bar{t}$ bestimmen, welche als Lösung der mit Adjungirung von $x, \bar{y}, \bar{t}$ irreductiblen Gleichung

$$(8)\qquad T^n + f_1(x, \bar{y}, \bar{t})\, T^{n-1} + \cdots + f_n(x, \bar{y}, \bar{t}) = 0$$

definirt sein mag, und welche die Eigenschaft hat, dass sich durch diese und durch $x, \bar{y}, \bar{t}$ die Grössen $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots \bar{z}_m$ rational ausdrücken lassen in der Form

$$(9)\quad \bar{z}_1 = R_1(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1),\ \bar{z}_2 = R_2(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1), \cdots \bar{z}_m = R_m(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1),$$

woraus wieder durch Differentiation mit Hülfe der Gleichungen (1) und der Gleichung (8) nach wiederholt dagewesenen Schlüssen

$$(10)\quad \frac{d\bar{z}_1}{dx}=r_1(x,\bar{y},\bar{t},\bar{T}_1),\ \frac{d\bar{z}_2}{dx}=r_2(x,\bar{y},\bar{t},\bar{T}_1),\cdots \frac{d\bar{z}_m}{dx}=r_m(x,\bar{y},\bar{t},\bar{T}_1)$$

folgt, wenn $r_1, r_2, \ldots r_m$ wiederum rationale Functionen bedeuten. Bemerkt man ferner, dass das τ_1 der Gleichung (4), wie im zweiten Abschnitte gezeigt worden, eine rationale Function von $x, \bar{z}_1, \cdots \bar{z}_m, \frac{d\bar{z}_1}{dx}, \cdots \frac{d\bar{z}_m}{dx}$

$$(11)\qquad \bar{\tau}_1 = r'\left(x, \bar{z}_1, \cdots \bar{z}_m, \frac{d\bar{z}_1}{dx}, \cdots \frac{d\bar{z}_m}{dx}\right)$$

oder nach (9) und (10)

$$(12)\qquad \bar{\tau}_1 = r(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{T}_1)$$

wird, worin r' und r rationale Functionen bedeuten, so folgt durch Einsetzen der Werthe (9), (10), (12) in das Gleichungsystem (3), wenn man beachtet, dass man jede rationale Function von $\bar{T}_1$ vermöge der Gleichung (8) in eine ganze Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades in $\bar{T}_1$ verwandeln kann,

$$(13)\quad r_\mu(x,\bar{y},\bar{t},\bar{T}_1)=\mathfrak{r}_\mu(x,R_1(x,\bar{y},\bar{t},\bar{T}_1),\cdots R_m(x,\bar{y},\bar{t},\bar{T}_1),r(x,\bar{y},\bar{t},\bar{T}_1))$$

oder

$$(14)\quad \mathfrak{H}_\mu(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{T}_1) = \mathfrak{h}_\mu(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{T}_1) \quad (\text{für } \mu = 1, 2, \cdots m),$$

worin $\mathfrak{H}_\mu$ und $\mathfrak{h}_\mu$ ganze Functionen $n-1^{\text{ten}}$ Grades in $\bar{T}_1$ und rationale Functionen von $x, \bar{y}, \bar{t}$ bedeuten. Da aber die Gleichung (8) mit Adjungirung von $x, \bar{y}, \bar{t}$ irreductibel sein sollte, so wird nach bekannten algebraischen Sätzen die Gleichung (14) eine identische sein müssen, und somit jede Lösung von (8) auch (14) oder (13) befriedigen, was offenbar dasselbe ist, als wenn wir sagen, *dass, wenn* $\bar{T}_\alpha$ *eine beliebige Lösung von* (8) *bedeutet, und man bildet nach* (9) *die Ausdrücke*

$$(15)\quad \bar{z}_{1\alpha}=R_1(x,\bar{y},\bar{t},\bar{T}_\alpha), \bar{z}_{2\alpha}=R_2(x,\bar{y},\bar{t},\bar{T}_\alpha), \cdots \bar{z}_{m\alpha}=R_m(x,\bar{y},\bar{t},\bar{T}_\alpha),$$

auch diese ein Integralsystem der Differentialgleichungen (3) *sind.*

Beachtet man jedoch weiter, dass, da die Gleichung (14) eine identische sein muss, die Coefficienten gleich hoher Potenzen von $\bar{T}_1$, welche rationale Functionen von $x, \bar{y}, \bar{t}$ sind, einander gleich sein müssen, diese Gleichheit aber Gleichungen

zwischen $x, \bar{y}, \bar{t}$, also vermöge (2) algebraische Beziehungen zwischen den $\bar{y}$ und x festsetzen würden, so werden diese Gleichheiten, *wenn wir die Annahme machen, dass weder zwischen den $\bar{y}$ eines Systemes von* (1) *eine algebraische Beziehung stattfinde — was schon nach den früheren Untersuchungen in der Voraussetzung der Irreductibilität der Differentialgleichungen* (1) *eingeschlossen ist — noch dass die $\bar{y}$ der verschiedenen irreductibeln Systeme unter einander algebraisch verbunden sind*, ebenfalls identische sein müssen, also auch bestehen bleiben, wenn man statt der Integralsysteme $\bar{y}$ irgend beliebige andere Integralsysteme der Differentialgleichungen (1) setzt. Da man aber zur Herleitung der Gleichungen (13) und (14) nur durch Differentiation der Ausdrücke (9) mit Benutzung von (1) und Einsetzen in (3) gelangt ist, so werden die Ausdrücke (9) noch Integrale des Differentialgleichungsystems (3) bleiben, wenn man $\bar{y}$ und also das davon abhängige $\bar{t}$ durch beliebige andere Integralsysteme von (1) und die dazugehörigen $\bar{t}$-Werthe ersetzt. Wir erhalten somit den folgenden wichtigen Satz:

I. *Sind die m Elemente eines Integralsystems der Differentialgleichungen* (3), (4) *algebraische Functionen der Elemente von Integralsystemen beliebig vieler Systeme irreductibler Differentialgleichungen* (1), (2), *und bringt man diese algebraischen Beziehungen auf die Form*

$$(16) \quad \bar{z}_1 = R_1(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{T}_1), \; \bar{z}_2 = R_2(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1), \cdots \bar{z}_m = R_m(x, \bar{y}, \bar{t}, T_1),$$

worin $\bar{T}_1$ eine Lösung einer mit Adjungirung von $x, \bar{y}, \bar{t}$ irreductibeln Gleichung (8) *ist, und $R_1, R_2, \ldots R_m$ rationale Functionen bedeuten, so werden die Ausdrücke*

$$(17) \quad z_1 = R_1(x, y, t, T), \; z_2 = R_2(x, y, t, T), \cdots z_m = R_m(x, y, t, T),$$

worin die y, t beliebige Integralsysteme der Differentialgleichungen (1), (2), *und T für diese beliebigen Integralsysteme eine jede Wurzel der Gleichung* (8) *bedeuten darf, wiederum Integralsysteme der Differentialgleichungen* (3), (4) *darstellen, wenn angenommen wird, dass zwischen den ersteren Integralelementen y der verschiedenen irreductibeln Differentialgleichungsysteme keine algebraische Beziehung stattfindet.*

oder anders ausgedrückt,

wenn man m algebraische Beziehungen zwischen den Elementen eines Integralsystems (3), (4) *und Integralsystemen von beliebig vielen irreductibeln Differentialgleichungsystemen* (1), (2) *in der Form hat*

$$(18)\quad F_1(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \cdots \bar{z}_m) = 0,\ F_2(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \cdots \bar{z}_m) = 0, \cdots$$
$$F_m(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \cdots \bar{z}_m) = 0,$$

so bleiben diese algebraischen Beziehungen erhalten, wenn man für die $\bar{y}$ *beliebige Integralsysteme der irreductibeln Differentialgleichungen, für die Werthe* $z_1, \ldots z_m$ *ein passendes Integralsystem der Differentialgleichungen* (3) *substituirt, falls wiederum die obige Annahme erfüllt ist.*

2. Nehmen wir nunmehr an, dass nicht m algebraische Beziehungen zwischen $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots \bar{z}_m$ und den $\bar{y}$ bestehen, sondern sei jetzt allgemein vorausgesetzt, dass *nur* $m-\lambda$ solcher algebraischer Beziehungen

$$(19)\quad \varphi_1(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \cdots \bar{z}_m) = 0,\ \varphi_2(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \cdots \bar{z}_m) = 0, \cdots$$
$$\varphi_{m-\lambda}(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \cdots \bar{z}_m) = 0$$

existiren, so dass, wenn $m-\lambda=\nu$ gesetzt wird,

$$(20)\quad \bar{z}_1 = a_1(x, \bar{y}, \bar{z}_{\nu+1}, \cdots \bar{z}_m),\ \bar{z}_2 = a_2(x, \bar{y}, \bar{z}_{\nu+1}, \cdots \bar{z}_m), \cdots$$
$$\bar{z}_\nu = a_\nu(x, \bar{y}, \bar{z}_{\nu+1}, \cdots \bar{z}_m)$$

ist, worin $a_1, \ldots a_\nu$ algebraische Functionen bedeuten, und angenommen wird, dass nicht ausserdem zwischen $x, \bar{y}, \bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m$ eine algebraische Beziehung besteht. Gestalten wir zunächst diese Gleichungen mit Zuziehung der t-Grössen in die mit Adjungirung von $x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m$ irreductibeln Gleichungen

$$(21)\quad \mathfrak{g}_1(x, \bar{y}, t, \bar{z}_{\nu+1}, \cdots \bar{z}_m, \bar{z}_1) = 0, \cdots \mathfrak{g}_\nu(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \cdots \bar{z}_m, \bar{z}_\nu) = 0$$

um, in denen $\mathfrak{g}_1, \ldots \mathfrak{g}_\nu$ ganze Functionen bedeuten, bemerken ferner, dass vermöge (4) und (20) sich $\bar{\tau}_1$ als die Lösung einer mit Adjungirung von $x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m$ irreductibeln Gleichung

$$(22)\quad \mathfrak{g}(x, \bar{y}, t, z_{\nu+1}, \cdots z_m, \bar{\tau}_1) = 0$$

darstellen lässt, und bestimmen eine algebraische Function $\bar{T}_1$ von $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \dots \bar{z}_m$, die als Lösung der mit Adjungirung von $x, y, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \dots \bar{z}_m$ irreductibeln Gleichung

$$(22) \qquad T^n + f_1(x, y, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \dots z_m)\, T^{n-1} + \cdots$$

$$+ f_n(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \dots \bar{z}_m) = 0$$

definirt sein mag, und die Eigenschaft hat, dass sich durch sie und durch $x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \dots \bar{z}_m$ die Grössen $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots \bar{z}_\nu$ und $\bar{\tau}_1$ rational ausdrücken lassen in der Form

$$(23) \quad \bar{z}_1 = R_1(x, \bar{y}, \bar{t}, z_{\nu+1}, \dots \bar{z}_m, \bar{T}_1),\ \bar{z}_2 = R_2(x, y, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \dots z_m, T_1),$$

$$\dots \bar{z}_\nu = R_\nu(x, y, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \dots \bar{z}_m, T_1)$$

und

$$(24) \qquad \bar{\tau}_1 = R(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \dots \bar{z}_m, \bar{T}_1).$$

Durch Differentiation der Gleichungen (23) folgt nach (1), (3), (22) und (24)

$$(25) \qquad \begin{aligned} \frac{d\bar{z}_1}{dx} &= r_1(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \dots \bar{z}_m, T_1) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d\bar{z}_\nu}{dx} &= r_\nu(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \dots z_m, T_1), \end{aligned}$$

worin $r_1, \dots r_\nu$ wiederum rationale Functionen bedeuten, und somit durch Einsetzen der Werthe (23) und (25) in die ersten ν Gleichungen des Systemes (3)

$$(26) \quad r_\mu(x, \bar{y}, t, z_{\nu+1}, \dots \bar{z}_m, \bar{T}_1) = \mathfrak{r}_\mu(x, \bar{y}, \bar{t}, z_{\nu+1}, \dots \bar{z}_m, T_1)$$

$$(\text{für } \mu = 1, 2, \dots \nu),$$

worin $\mathfrak{r}_\mu$ eine rationale Function bedeutet, oder aus wiederholt angegebenen Gründen

$$(27) \quad \mathfrak{H}_\mu(x, \bar{y}, \bar{t}, z_{\nu+1}, \dots z_m, T_1) = \mathfrak{h}_\mu(x, \bar{y}, \bar{t}, z_{\nu+1}, \dots \bar{z}_m, T_1),$$

worin $\mathfrak{H}_\mu$ und $\mathfrak{h}_\mu$ ganze Functionen $n - 1^{\text{ten}}$ Grades in T_1 und rationale Functionen von $x, y, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \dots \bar{z}_m$ bedeuten. Da aber die Gleichung (22) mit Adjungirung von $x, y, \bar{t}, z_{\nu+1}, \dots \bar{z}_m$ irreductibel sein sollte, so wird (27) wieder in dem

Sinne identisch sein müssen, dass die Coefficienten gleich hoher Potenzen von $\overline{T}_1$ auf beiden Seiten einander gleich sind, und es wird also auch jede Lösung der Gleichung (22) die Gleichung (27) oder (26) befriedigen, was offenbar dasselbe ist, als wenn wir sagen, *dass, wenn* $\overline{T}_\alpha$ *eine beliebige Lösung der Gleichung* (22) *bedeutet, und man bildet nach* (23) *die Ausdrücke*

$$(28)\quad \begin{aligned} \overline{z}_{1\alpha} &= R_1(x, \overline{y}, \overline{t}, \overline{z}_{\nu+1}, \ldots \overline{z}_m, \overline{T}_\alpha) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{z}_{\nu\alpha} &= R_\nu(x, \overline{y}, \overline{t}, \overline{z}_{\nu+1}, \ldots \overline{z}_m, \overline{T}_\alpha), \end{aligned}$$

auch

$$\overline{z}_{1\alpha}, \; \overline{z}_{2\alpha}, \; \ldots \overline{z}_{\nu\alpha}, \; \overline{z}_{\nu+1}, \; \ldots \overline{z}_m$$

ein Integralsystem der Differentialgleichungen (3) *darstellen werden.*

Beachtet man jedoch weiter, dass, da die Gleichungen (27) identische sein müssen, durch Gleichsetzen der Coefficienten gleich hoher Potenzen von $\overline{T}_1$ sich algebraische Beziehungen zwischen $x, \overline{y}, \overline{t}, \overline{z}_{\nu+1}, \ldots \overline{z}_m$ ergeben würden, was oben ausgeschlossen war, da nur $m - \lambda = \nu$ algebraische Beziehungen zwischen $x, \overline{y}, \overline{z}_1, \ldots \overline{z}_m$ stattfinden sollten, so werden die einzelnen Coefficienten der $\overline{T}_1$-Potenzen in (27) auch in Bezug auf $\overline{z}_{\nu+1}, \ldots \overline{z}_m$ identisch sein müssen, und wenn wir noch, wie oben, die Voraussetzung hinzufügen, dass auch die $\overline{y}$ nicht unter einander in algebraischer Beziehung stehen, auch in diesen Grössen identisch sein. Bemerkt man aber, dass die letzten $m - \nu$ Differentialgleichungen des Systemes (3) für das particulare System $\overline{z}_1, \ldots \overline{z}_m$ vermöge der Beziehungen (23) und (24) in

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{d\overline{z}_{\nu+1}}{dx} = \varrho_1(x, \overline{y}, \overline{t}, \overline{z}_{\nu+1}, \ldots \overline{z}_m, \overline{T}_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d\overline{z}_m}{dx} = \varrho_{m-\nu}(x, \overline{y}, \overline{t}, \overline{z}_{\nu+1}, \ldots \overline{z}_m, \overline{T}_1) \end{cases}$$

übergehen, worin $\varrho_1, \ldots \varrho_{m-r}$ rationale Functionen bedeuten, dass ferner die identischen Gleichungen (27) nur durch Differentiation der Ausdrücke (23) mit Benutzung von (1) und Einsetzen in (3) entstanden sind, so werden offenbar die Ausdrücke (23) noch Integrale des Differentialgleichungssystemes (3) bleiben, wenn man die y und die davon abhängigen $\bar{t}$ durch beliebige andere Integralsysteme von (1) und die dazu gehörigen $\bar{t}$-Werthe ersetzt, und zugleich für $\bar{z}_{r+1}, \ldots \bar{z}_m$ und das zugehörige $\overline{T}_1$ ein beliebiges anderes Integralsystem des Differentialgleichungsystems (29) und das dazugehörige $\overline{T}_1$ substituirt.

Wir finden somit den ganz allgemeinen Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehungen zwischen Integralen von Differentialgleichungsystemen:

II. *Es seien k irreductible Differentialgleichungsysteme der $m_1, m_2, \ldots m_k^{\text{ten}}$ Klasse in der Form gegeben*

$$(30)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial G_\varrho(x, t_{1\varrho}, y_{\varrho 1}, \ldots y_{\varrho m_\varrho})}{\partial t_{1\varrho}} \dfrac{dy_{\varrho 1}}{dx} = G_{\varrho 1}(x, t_{1\varrho}, y_{\varrho 1}, \ldots y_{\varrho m_\varrho}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial G_\varrho(x, t_{1\varrho}, y_{\varrho 1}, \ldots y_{\varrho m_\varrho})}{\partial t_{1\varrho}} \dfrac{dy_{\varrho m_\varrho}}{dx} = G_{\varrho m_\varrho}(x, t_{1\varrho}, y_{\varrho 1}, \ldots y_{\varrho m_\varrho}), \end{array}\right.$$

$$(\text{für } \varrho = 1, 2, \cdots k),$$

worin $t_{1\varrho}$ als Lösung der irreductibeln Gleichung n_ϱ^{ten} Grades definirt ist

$$(31)\qquad G_\varrho(x, t_\varrho, y_{\varrho 1}, y_{\varrho 2}, \cdots y_{\varrho m_\varrho}) = 0,$$

und mögen zwischen k Integralsystemen dieser k Differentialgleichungsysteme

$$(\text{a})\qquad y_{11}, \ldots y_{1m_1}, y_{21}, \ldots y_{2m_2}, \ldots y_{k1}, \ldots y_{km_k},$$

unter denen algebraische Beziehungen nicht stattfinden sollen *), *und einem Integralsystem*

---

*) Diese Bedingung ist nach den früheren Untersuchungen stets von selbst erfüllt, sobald es sich nur um *ein* irreductibles System von Differentialgleichungen in den Grössen y handelt.

(b) $$\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots \bar{z}_m$$

eines beliebigen irreductibeln oder reductibeln (auch in gesonderte Systeme zerfallenden) Systemes von Differentialgleichungen

(32) $$\begin{cases} \frac{\partial g(x, \tau_1, z_1, \ldots z_m)}{\partial \tau_1} \frac{dz_1}{dx} = g_1(x, \tau_1, z_1, \ldots z_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial g(x, \tau_1, z_1, \ldots z_m)}{\partial \tau_1} \frac{dz_m}{dx} = g_m(x, \tau_1, z_1, \ldots z_m), \end{cases}$$

worin τ_1 *als Lösung der irreductiblen Gleichung definirt ist*

(33) $$g(x, \tau, z_1, \cdots z_m) = 0,$$

ν *und nur* ν, *worin* $\nu \leqq m$, *algebraische Beziehungen von der Form statthaben*

(34) $$\varphi_1(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \cdots \bar{z}_m) = 0, \cdots \varphi_\nu(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \cdots \bar{z}_m) = 0,$$

worin $\varphi_1, \ldots \varphi_\nu$ *ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, und* $\bar{y}$ *der Kürze halber die Gesammtheit der Integralsysteme* (a) *darstellen soll. Diese Beziehungen* (34) *bleiben nun erhalten, wenn man statt* $\bar{y}$ *willkürliche andere Integralsysteme*

(c) $$\bar{y}'_{11}, \ldots \bar{y}'_{1m_1}, \bar{y}'_{21}, \ldots \bar{y}'_{2m_2}, \ldots \bar{y}'_{k1}, \ldots \bar{y}'_{km_k}$$

der Differentialgleichungen (30) *einsetzt, vorausgesetzt dass man nur statt des Integralsystemes* (b) *ein oder auch verschiedene passende Integralsysteme der Differentialgleichungen* (32) *substituirt. Um die zu einem beliebig gewählten Systeme der* $\bar{y}$ *zugehörigen* $\bar{z}$ *zu finden, verfahre man folgendermassen: Man stelle aus den Gleichungen* (34) *und* (33) $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots \bar{z}_\nu$ *und* τ_1 *als Lösungen algebraischer, mit Adjungirung von* $x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m$ *irreductibler Gleichungen*

(35) $$\mathfrak{g}_1(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m, \bar{z}_1) = 0, \ldots \mathfrak{g}_\nu(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m, \bar{z}_\nu) = 0,$$

(36) $$\mathfrak{g}(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m, \tau_1) = 0$$

dar, bestimme eine Grösse $\bar{T}_1$ *als Lösung einer mit Adjungirung von* $x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m$ *irreductibeln algebraischen Gleichung*

$$(37) \qquad F(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m, T) = 0$$

derart, dass sich $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots \bar{z}_\nu$ *und* $\bar{\tau}_1$ *rational durch* T_1 *und die übrigen Grössen in der Form*

$$(38) \quad \bar{z}_1 = R_1(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m, \bar{T}_1), \cdots \bar{z}_\nu = R_\nu(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \bar{z}_m, T_1)$$

und

$$(39) \qquad \bar{\tau}_1 = R(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m, T_1)$$

ausdrücken lassen), setzt diese Werthe für* $\bar{z}_1, \ldots \bar{z}_\nu, \bar{\tau}_1$ *für* $z_1, \ldots z_\nu, \tau_1$ *in die* $m - \nu$ *letzten Differentialgleichungen des Systemes* (32) *ein, so dass sich, wenn* $\varrho_1, \ldots \varrho_{m-\nu}$ *rationale Functionen bedeuten,*

$$(40) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\bar{z}_{\nu+1}}{dx} = \varrho_1(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m, T_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dz_m}{dx} = \varrho_{m-\nu}(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m, T_1) \end{cases}$$

ergiebt, worin T_1 *nach* (37) *durch die Gleichung definirt ist*

$$(41) \qquad F(x, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m, T_1) = 0,$$

so werden, wenn man für $\bar{y}$ *und die zugehörigen* $\bar{t}$ *willkürliche Integralsysteme* y' *und* $\bar{t}'$ *der Differentialgleichungssysteme* (30), (31) *setzt, ferner irgend ein Integralsystem*

$$\bar{z}'_{\nu+1}, \bar{z}'_{\nu+2}, \ldots \bar{z}'_m$$

der Differentialgleichungen (40) *bei willkürlicher Festsetzung des Zweiges der Wurzel* T_1' *der Gleichung* (41) *wählt, die aus den, den Gleichungen* (38) *analogen Formen*

$$(42) \qquad \begin{aligned} \bar{z}'_1 &= R_1(x, y', \bar{t}', \bar{z}'_{\nu+1}, \bar{z}'_{\nu+2}, \ldots \bar{z}'_m, T'_1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{z}'_\nu &= R_\nu(x, \bar{y}', t', \bar{z}'_{\nu+1}, \bar{z}'_{\nu+2}, \ldots \bar{z}'_m, T'_1) \end{aligned}$$

---

*) wie in dem zweiten Abschnitte gezeigt worden.

hervorgehenden Werthe von $\bar{z}_1', \ldots \bar{z}_\nu'$ *zusammen mit* $\bar{z}_{\nu+1}', \ldots \bar{z}_m'$ *dasjenige Integralsystem der Gleichungen* (32), (33) *bilden, welches für Substituirung jenes willkürlichen Integralsystems der y gesetzt werden muss, damit die gegebenen algebraischen Relationen* (34) *erhalten bleiben.*

3. Legen wir wieder zum Zwecke späterer Anwendung eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0 \tag{43}$$

zu Grunde, so kann für diese das irreductible Differentialgleichungsystem, in welchem $z = z_1$ gesetzt wird, substituirt werden

$$(44) \left\{\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= z_2 \\ \frac{dz_2}{dx} &= z_3 \\ &\ldots\ldots \\ \frac{dz_{m-1}}{dx} &= z_m \\ F\left(x, z_1, z_2, \cdots z_m, \frac{dz_m}{dx}\right) &= 0, \end{aligned}\right. \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= z_2 \\ &\ldots\ldots \\ \frac{dz_{m-1}}{dx} &= z_m \\ \frac{dz_m}{dx} &= \tau_1 \\ \text{worin } F(x, z_1, \ldots z_m, \tau_1) &= 0 \text{ ist;} \end{aligned}\right.$$

es werde angenommen, dass ein Integral der Gleichung (43), also ein Integralelement des Systems (44) ζ_1 eine algebraische Function

$$\zeta_1 = \omega(x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k) \tag{45}$$

von x und k Functionen von x: $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k$ sei, welche Integrale der resp. algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F_1\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right) = 0, \quad F_2\left(x, y_2, \frac{dy_2}{dx}\right) = 0, \cdots \tag{46}$$
$$F_k\left(x, y_k, \frac{dy_k}{dx}\right) = 0$$

oder der Systeme

$$(47)\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=t_1 \quad \frac{dy_2}{dx}=t_2 \quad \cdots \frac{dy_k}{dx}=t_k \\ F_1(x, y_1, t_1)=0, \; F_2(x, y_2, t_2)=0 \cdots F_k(x, y_k, t_k)=0\end{cases}$$

sind, welche irreductibel sein sollen, d. h. nach den früheren Definitionen, welche keine algebraischen Integrale besitzen, und für welche die zweiten Gleichungen (47) mit Adjungirung von x und resp. $y_1, y_2, \ldots y_k$ in Bezug auf t algebraisch irreductibel sind. Wird nun der früheren Voraussetzung entsprechend angenommen, dass zwischen den Integralen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k$ der irreductibeln Systeme (47) nicht schon unter einander eine algebraische Beziehung besteht — was unbeschadet der Allgemeinheit vorausgesetzt werden darf, da man sonst eine der Functionen $\eta_1, \ldots \eta_k$ mittels einer solchen algebraischen Beziehung aus (45) eliminiren könnte und eine algebraische Beziehung zu nur $k-1$ Integralen zu Grunde zu legen hätte — und bemerkt man, dass aus (45) mittels (47) sich auch

$$\frac{d\zeta_1}{dx}=\zeta_2, \quad \frac{d\zeta_2}{dx}=\zeta_3, \quad \cdots \frac{d\zeta_{m-1}}{dx}=\zeta_m$$

als algebraische Functionen von $x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k$ ergeben, so sind alle Bedingungen des Satzes I. dieses Abschnittes erfüllt, und wir erhalten somit das folgende Theorem:

Besteht zwischen einem Integrale ζ_1 der Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(48) \qquad F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^m z}{dx^m}\right)=0$$

und k Integralen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k$ der resp. k irreductibeln Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(49) \qquad F_1\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right)=0, \quad F_2\left(x, y_2, \frac{dy_2}{dx}\right)=0, \cdots$$
$$F_k\left(x, y_k, \frac{dy_k}{dx}\right)=0$$

eine algebraische Beziehung

$$(50) \qquad \varphi(x, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_k, \zeta_1)=0,$$

so wird unter der Voraussetzung, dass nicht schon zwischen η_1,

$\eta_2, \ldots \eta_k$ und x eine algebraische Relation existirt, diese Beziehung (50) *erhalten bleiben, wenn man für $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k$ beliebige andere Integrale der irreductibeln Differentialgleichungen* (49)*) *und für ζ_1 ein passendes Integral der Differentialgleichung* (48) *setzt, und zwar findet man das in jedem Falle für ζ_1 zu setzende Integral, indem man* (50) *durch den mit Adjungirung von $x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots \bar{t}_k$, worin $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots \bar{t}_k$ aus $t_1, t_2, \ldots t_k$ durch Einsetzen von $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k$ für $y_1, y_2, \ldots y_k$ hervorgehen, irreductibeln Factor*

$$(51) \qquad \mathfrak{g}_1(x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots \bar{t}_k, \zeta_1) = 0,$$

*ersetzt***); *jede Lösung der Gleichung*

$$(52) \qquad \mathfrak{g}_1(x, \eta'_1, \eta'_2, \ldots \eta'_k, \bar{t}'_1, \bar{t}'_2, \ldots \bar{t}'_k, \zeta'_1) = 0,$$

worin $\eta'_1, \ldots \eta'_k$ ein willkürliches Integralsystem von (49) *bedeuten, liefert für ζ'_1 ein Integral der Differentialgleichung* (48), *welches mit $\eta'_1, \eta'_2, \ldots \eta'_k$ zusammen der Gleichung* (50) *Genüge leistet.*

4. Es werde ferner hier der später häufig zur Anwendung kommende Fall hervorgehoben, in welchem ein Integral der Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(53) \qquad F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0$$

eine algebraische Function von x und von Quadraturen

---

*) Es mag bemerkt werden, dass, um die Bedingung der Irreductibilität zu erfüllen, diese Differentialgleichungen nur in Bezug auf $\frac{dy_1}{dx}, \ldots \frac{dy_k}{dx}$ *algebraisch* irreductibel zu sein brauchen, da die zweite Bedingung für die Integrale, nicht Differentialgleichungen niederer also 0ter Ordnung zu genügen, also nicht algebraische Functionen von x zu sein, schon in der obigen Voraussetzung, dass zwischen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k$ und x keine algebraische Beziehung stattfinden sollte, mit enthalten ist.

**) indem durch Differentiation von (51) sich $\zeta_2, \zeta_3, \ldots \zeta_m$ rational durch $x, \eta_1, \ldots \eta_k, \bar{t}_1, \ldots \bar{t}_k$ und ζ_1 ausdrücken, und somit das T der Gleichung (8) ζ_1 selbst ist.

$$(54)\quad \left(\int f_1(s)\,ds\right)_{s=s_1}, \quad \left(\int f_2(s)\,ds\right)_{s=s_2}, \quad \ldots \left(\int f_k(s)\,ds\right)_{s=s_k}$$

ist, worin $f_1(s)$, $f_2(s)$, $\ldots f_k(s)$ algebraische Functionen von s, und s_1, s_2, $\ldots s_k$ algebraische Functionen von x bedeuten, wobei angenommen wird, dass unter diesen Quadraturen selbst nicht algebraische Beziehungen stattfinden, also auch sie einzeln nicht durch algebraische Functionen darstellbar sind. Setzt man

$$(55)\qquad y_\varrho = \left(\int f_\varrho(s)\,ds\right)_{s=s_\varrho},$$

so folgt

$$(56)\qquad \frac{dy_\varrho}{dx} = f_\varrho(s_\varrho)\frac{ds_\varrho}{dx},$$

und wenn man die beiden algebraischen Functionen s_ϱ und $f_\varrho(s_\varrho)$ von x in bekannter Weise rational durch eine algebraische Function t_ϱ von x ausdrückt, welche die Lösung einer irreductibeln Gleichung der Form ist

$$(57)\qquad t^{\nu_\varrho} + f_{1\varrho}(x)\,t^{\nu_\varrho - 1} + \cdots + f_{\nu_\varrho \varrho}(x) = 0 = \varphi_\varrho(x, t),$$

in welcher $f_{1\varrho}, \ldots f_{\nu_\varrho \varrho}$ rationale Functionen bedeuten, so dass sich

$$(58)\qquad s_\varrho = r_\varrho(x, t_\varrho), \quad f_\varrho(s_\varrho) = R_\varrho(x, t_\varrho)$$

ergiebt, worin r_ϱ und R_ϱ ebenfalls rationale Functionen darstellen, so erhält man ebenfalls in Form einer rationalen Function

$$(59)\qquad f_\varrho(s_\varrho)\frac{ds_\varrho}{dx} = \mathfrak{r}_\varrho(x, t_\varrho).$$

Setzt man nun die Differentialgleichungen (56) in die Form

$$(60)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \mathfrak{r}_1(x, t_1), \quad \dfrac{dy_2}{dx} = \mathfrak{r}_2(x, t_2), \quad \cdots \dfrac{dy_k}{dx} = \mathfrak{r}_k(x, t_k) \\ \varphi_1(x, t_1) = 0, \quad \varphi_2(x, t_2) = 0, \quad \cdots \varphi_k(x, t_k) = 0, \end{cases}$$

welche nunmehr die wesentliche Gestalt der Normalform haben, so ergiebt sich wiederum nach dem Theorem I. mit Berücksichtigung der in 3. gemachten Auseinandersetzungen und der Bemerkung, dass sämmtliche Integrale je einer Differential-

gleichung (60) sich für eine bestimmte Lösung t_1 nur um eine willkürliche additive Constante unterscheiden, der folgende Satz:

Ist ein Integral ζ_1 einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung (53) *algebraisch mit den Quadraturen* (54) *durch die Gleichung verbunden*

$$(61)\quad \omega\left(x, \left(\int f_1(s)\, ds\right)_{s=s_1}, \ldots \left(\int f_k(s)\, ds\right)_{s=s_k}, \zeta_1\right) = 0,$$

worin ω eine ganze Function bedeutet, so bleibt diese Beziehung erhalten, wenn man für die Quadraturen jedes beliebige Integral der Differentialgleichungen (60), *die wieder Quadraturen algebraischer Functionen sind, setzt, wenn man nur für ζ_1 ein passendes Integral der Differentialgleichung* (53) *substituirt, und zwar findet man das in jedem Falle für ζ_1 zu setzende Integral, indem man* (61) *durch den mit Adjungirung von*

$$x, \left(\int f_1(s)\, ds\right)_{s=s_1}, \ldots \left(\int f_k(s)\, ds\right)_{s=s_k}, t_1, t_2, \ldots t_k$$

irreductiblen Factor

$$(62)\quad \mathfrak{g}_1\left(x, \left(\int f_1(s) ds\right)_{s=s_1}, \ldots \left(\int f_k(s) ds\right)_{s=s_k}, t_1, t_2, \ldots t_k, \zeta_1\right) = 0$$

ersetzt; jede Lösung der Gleichung

$$(63)\quad \mathfrak{g}_1\left(x, \int \mathfrak{r}_1(x, t_1')\, dx + c_1, \cdots \int \mathfrak{r}_k(x, t_k')\, dx + c_k, t_1', t_2', \ldots t_k', \zeta_1'\right) = 0,$$

worin $t_1', \ldots t_k'$ beliebige Lösungen der zweiten der Gleichungen (60) *und $c_1, \ldots c_k$ willkürliche Constanten bedeuten, liefert für ζ_1' ein Integral der Differentialgleichung* (53), *welches mit den in* (63) *enthaltenen Quadraturen der Gleichung* (61) *Genüge leistet.*

Ist endlich die Differentialgleichung (53) selbst von der ersten Ordnung und zwar die Quadratur einer algebraischen Function, so wird einerseits unter der oben gemachten Bedingung, dass nicht schon zwischen den Quadraturen (54) eine algebraische Beziehung stattfindet, der eben ausgesprochene Satz erhalten bleiben, andererseits wird sich aber auch die *allgemeine Form eines algebraischen Zusammenhanges ω zwischen Quadraturen algebraischer Functionen bestimmen lassen.* Denn sei

$$(64)\quad \omega\left(x, \left(\int F(s)ds\right)_{s=S}, \left(\int f_1(s)ds\right)_{s=s_1}, \dots \left(\int f_k(s)ds\right)_{s=s_k}\right) = 0$$

eine solche irreductible algebraische Beziehung, in welcher $F(s)$, $f_1(s)$, $\dots f_k(s)$ algebraische Functionen von s, und S, s_1, s_2, $\dots s_k$ algebraische Functionen von x bedeuten, oder wenn

$$(65)\quad \left(\int F(s)\,ds\right)_{s=S} = J, \quad \left(\int f_1(s)\,ds\right)_{s=s_1} = i_1, \dots \left(\int f_k(s)\,ds\right)_{s=s_k} = i_k$$

gesetzt werden,

$$(66)\qquad \omega(x, J, i_1, i_2, \dots i_k) = 0,$$

so bleibt diese erhalten, wenn für i_1, i_2, $\dots i_k$ irgendwelche andere Integrale der zugehörigen Differentialgleichungen, also auch, da sie Quadraturen sind,

$$i_1 + c_1, \; i_2 + c_2, \cdots i_k + c_k$$

gesetzt werden, worin c_1, c_2, $\dots c_k$ *willkürliche* Constanten bedeuten, wenn nur für J ein passendes Integral, also, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, $J + C$ substituirt wird, worin C von c_1, c_2, $\dots c_k$ abhängt. Setzt man also nach (66)

$$(67)\qquad J = \Omega(x, i_1, i_2, \dots i_k),$$

worin Ω eine algebraische Function bedeutet, so folgt

$$(68)\qquad J + C = \Omega(x, i_1 + c_1, i_2 + c_2, \cdots i_k + c_k),$$

und durch Zusammenstellung von (67) und (68)

$$(69)\quad \Omega(x, i_1 + c_1, i_2 + c_2, \cdots i_k + c_k) = \Omega(x, i_1, i_2, \cdots i_k) + C;$$

da nun diese Gleichung in Folge der Voraussetzung, dass zwischen den Quadraturen i_1, i_2, $\dots i_k$ nicht selbst schon ein algebraischer Zusammenhang stattfinden sollte, eine in diesen Grössen identische sein muss, so folgt aus (69) durch Differentiation nach i_λ und c_λ

$$(70)\quad \frac{\partial \Omega(x, i_1 + c_1, \cdots i_k + c_k)}{\partial(i_\lambda + c_\lambda)} = \frac{\partial \Omega(x, i_1, \dots i_k)}{\partial i_\lambda} = \frac{\partial C}{\partial c_\lambda},$$

und somit, da diese Beziehung wiederum eine identische sein muss,

$$(71) \qquad \Omega(x, i_1, i_2, \cdots i_k) = C_1 i_1 + C_2 i_2 + \cdots + C_k i_k + P,$$

worin $C_1, C_2, \ldots C_k$ Constanten und P eine algebraische Function von x sein werden, so dass (67) in

$$(72) \qquad J = C_1 i_1 + C_2 i_2 + \cdots + C_k i_k + P$$

übergeht, und wir somit den folgenden Satz erhalten:

Zwischen Quadraturen, deren Variabeln in einem algebraischen Zusammenhange stehen, und die nicht schon in geringerer Zahl algebraisch von einander abhängig sind, ist jeder irreductible algebraische Zusammenhang in linearer Form mit constanten Coefficienten darstellbar, von einer additiven algebraischen Function der unabhängigen Variabeln abgesehen.

Zweites Kapitel.

Charakteristische Eigenschaften specieller Arten von Differentialgleichungsystemen.

Nachdem die allgemeinen Eigenschaften aller algebraischen Differentialgleichungsysteme beliebiger Klasse behandelt worden, wenden wir uns nunmehr zur Ermittlung der Eigenschaften specieller, besonders wichtiger Arten solcher Systeme, ohne noch nach der analytischen Form der Integralfunctionen, wenn sich eine solche für den ganzen Bereich der unendlichen Ebene der Variabeln gültige ermitteln lässt, oder nur nach der Beschaffenheit derselben in den einzelnen Punkten der Ebene zu fragen.

I. Eigenschaften der Differentialgleichungen der Mechanik.

1. Wenn n materielle Punkte, deren Coordinaten mit

(a) $$x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2, \quad \ldots x_n, y_n, z_n$$

und deren Massen mit $m_1, m_2, \ldots m_n$ bezeichnet werden sollen, von Kräften angegriffen werden, für welche die nach den Coordinatenaxen gerichteten Componenten der den Punkt m_i angreifenden Kraft X_i, Y_i, Z_i sein mögen, so liefert, wenn diese Punkte von einer bestimmten Anfangslage

(b) $$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \quad \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \quad \ldots \xi_n, \eta_n, \zeta_n$$

aus bestimmte Anfangsgeschwindigkeiten erhalten, deren Componenten durch

(c) $$\varphi_1, \chi_1, \psi_1, \quad \varphi_2, \chi_2, \psi_2, \quad \cdots \varphi_n, \chi_n, \psi_n$$

gegeben sein mögen, und wenn ausserdem die Coordinaten der n materiellen Punkte noch der Bedingung unterworfen sind, während der Bewegung den k analytischen Gleichungen

(1) $$\begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1, \; x_2, y_2, z_2, \; \ldots x_n, y_n, z_n) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_k(x_1, y_1, z_1, \; x_2, y_2, z_2 . \; \ldots x_n, y_n, z_n) = 0 \end{cases}$$

Genüge zu leisten, das *d'Alembert*'sche Princip zur Bestimmung der Bewegung die folgenden $3n$ Differentialgleichungen

(2) $$\begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k}{\partial x_i} \\ m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial y_i} + \cdots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k}{\partial y_i} \\ m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial z_i} + \cdots + \lambda_k \dfrac{\partial F_k}{\partial z_i}, \\ \qquad (\text{für } i = 1, 2, \cdots n) \end{cases}$$

in denen t die Zeit bedeutet, und die mit den k Gleichungen (1) zusammengenommen $3n + k$ Gleichungen zur Bestimmung der $3n + k$ Grössen

(d) $$x_i, y_i, z_i, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$$

bilden; die $6n$ eintretenden willkürlichen Integrationsconstanten werden durch die $6n$ gegebenen Grössen (b) und (c) bestimmt, welche nichts anderes als die Coordinaten und deren erste Ableitungen für $t = 0$, also

$$x_i^0, y_i^0, z_i^0, \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy_i}{dt}\right)_0, \left(\frac{dz_i}{dt}\right)_0 \quad (\text{für } i = 1, 2, \cdots n)$$

bedeuten.

Da die k Gleichungen (1) k der Coordinaten von den übrigen $3n - k$ abhängig machen, so werden sich sämmtliche $3n$ Coordinaten als Functionen von $3n - k = \mu$ Grössen

(e) $$q_1, q_2, \cdots q_\mu$$

so darstellen lassen, dass die analytischen Ausdrücke für diese

durch $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ in die Gleichungen (1) eingesetzt dieselben identisch für alle Werthe von $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ befriedigen, so dass identisch

$$
(3)\quad \begin{cases}
\sum\limits_1^n{}^i \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial F_1}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial F_1}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\sum\limits_1^n{}^i \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial F_k}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial F_k}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = 0 \\
\qquad\qquad (\text{für } s = 1, 2, \ldots \mu)
\end{cases}
$$

wird, und man erhält daher, wenn die Differentialgleichungen (2) mit

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial q_s}$$

multiplicirt und für alle i zusammen addirt werden, und ausserdem

$$(4)\qquad \sum_1^n{}^i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = Q_s$$

und

$$(5)\qquad \frac{dx_i}{dt} = x_i', \quad \frac{dy_i}{dt} = y_i', \quad \frac{dz_i}{dt} = z_i'$$

gesetzt wird, die μ Gleichungen

$$(6)\qquad \sum_1^n{}^i m_i \left(\frac{dx_i'}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{dy_i'}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{dz_i'}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = Q_s.$$

Führt man nun *die lebendige Kraft* des Systems

$$(7)\qquad T = \frac{1}{2}\sum_1^n{}^i m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

ein, so folgt für $q_s' = \frac{dq_s}{dt}$

$$(8)\qquad \frac{\partial T}{\partial q_s'} = \sum_1^n{}^i m_i \left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} + y_i' \frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} + z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial q_s'}\right),$$

und somit

$$(9)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_s'} = \sum_1^n {}^i\, m_i \left(\frac{dx_i'}{dt}\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} + \frac{dy_i'}{dt}\frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} + \frac{dz_i'}{dt}\frac{\partial z_i'}{\partial q_s'}\right)$$

$$+ \sum_1^n {}^i\, m_i \left(x_i' \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} + y_i' \frac{d}{dt}\frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} + z_i' \frac{d}{dt}\frac{\partial z_i'}{\partial q_s'}\right);$$

da aber

$$(10)\qquad \begin{cases} x_i' = \dfrac{\partial x_i}{\partial q_1} q_1' + \dfrac{\partial x_i}{\partial q_2} q_2' + \cdots + \dfrac{\partial x_i}{\partial q_\mu} q_\mu' \\ y_i' = \dfrac{\partial y_i}{\partial q_1} q_1' + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_2} q_2' + \cdots + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_\mu} q_\mu' \\ z_i' = \dfrac{\partial z_i}{\partial q_1} q_1' + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_2} q_2' + \cdots + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_\mu} q_\mu', \end{cases}$$

also

$$(11)\qquad \frac{\partial x_i'}{\partial q_s'} = \frac{\partial x_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial y_i'}{\partial q_s'} = \frac{\partial y_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial z_i'}{\partial q_s'} = \frac{\partial z_i}{\partial q_s}$$

ist, so geht (9) vermöge (6) in

$$(12)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_s'} = Q_s + \sum_1^n {}^i\, m_i \left(x_i' \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + y_i' \frac{d}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + z_i' \frac{d}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right),$$

oder da

$$(13)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_s} q_1' + \cdots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\mu \partial q_s} q_\mu' = \frac{\partial}{\partial q_s}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i'}{\partial q_s},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} = \frac{\partial y_i'}{\partial q_s}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_s} = \frac{\partial z_i'}{\partial q_s}$$

ist, in

$$(14)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_s'} = Q_s + \frac{\partial T}{\partial q_s} \qquad (\text{für } s = 1, 2, \cdots \mu)$$

über.

Da sich nun aus (7) und (10) T als eine homogene Function zweiten Grades in $q_1', q_2', \ldots q_\mu'$ ergiebt, deren Coefficienten Functionen von $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ sind, so wird bekanntlich

$$(15)\qquad 2T = q_1' \frac{\partial T}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial T}{\partial q_2'} + \cdots + q_\mu' \frac{\partial T}{\partial q_\mu'}$$

oder wenn

$$(16) \qquad \frac{\partial T}{\partial q_s'} = p_s$$

gesetzt wird,

$$(17) \qquad 2T = p_1 q_1' + p_2 q_2' + \cdots + p_\mu q_\mu'$$

sein, worin $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ homogene lineare Functionen von $q_1', q_2', \ldots q_\mu'$ sind, deren Coefficienten von $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ abhängen, also von der Form sind

$$(18) \qquad \begin{cases} p_1 = \alpha_{11} q_1' + \alpha_{12} q_2' + \cdots + \alpha_{1\mu} q_\mu' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_\mu = \alpha_{\mu 1} q_1' + \alpha_{\mu 2} q_2' + \cdots + \alpha_{\mu\mu} q_\mu', \end{cases}$$

worin $\alpha_{rs} = \alpha_{sr}$, so dass

$$(19) \qquad \begin{cases} q_1' = a_{11} p_1 + a_{12} p_2 + \cdots + a_{1\mu} p_\mu \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_\mu' = a_{\mu 1} p_1 + a_{\mu 2} p_2 + \cdots + a_{\mu\mu} p_\mu \end{cases}$$

wird, worin ebenfalls $a_{rs} = a_{sr}$ ist. Nach den Gleichungen (17) und (19) nimmt also T die Form an

$$(20) \quad T = A_1 p_1^2 + A_2 p_2^2 + \cdots + A_\mu p_\mu^2 + A_{12} p_1 p_2 + \cdots \\ + A_{\mu-1\,\mu} p_{\mu-1} p_\mu,$$

worin die A bekannte Functionen von $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ sind, und kann somit auch als eine Function von $q_1, \ldots q_\mu, p_1, \ldots p_\mu$ betrachtet werden, in welchem Falle sie durch (T) bezeichnet werden soll; dann wird nach (15) oder

$$(21) \qquad T = \sum_1^\mu{}_s q_s' \frac{\partial T}{\partial q_s'} - T$$

die totale Differentiation der von den q_s und q_s' abhängenden Gleichung

$$(22) \quad dT = \sum_1^\mu{}_s q_s' d\frac{\partial T}{\partial q_s'} - \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s = \sum_1^\mu{}_s q_s' dp_s - \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s$$

geben, während für T als Function von p_s und q_s aufgefasst

$$(23) \qquad dT = \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial (T)}{\partial p_s} dp_s + \sum_1^\mu{}_s \frac{\partial (T)}{\partial q_s} dq_s$$

folgt, und somit durch Vergleichung von (22) und (23)

$$(24)\qquad q_s' = \frac{\partial(T)}{\partial p_s}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_s} = -\frac{\partial(T)}{\partial q_s};$$

aus (24), (14) und (16) ergiebt sich somit für $s = 1, 2, \cdots \mu$

$$(25)\qquad \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial(T)}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = Q_s - \frac{\partial(T)}{\partial q_s},$$

worin Q_s als Function der Coordinaten eine bekannte Function von $q_1, \ldots q_\mu$ ist. Bezeichnen wir somit jetzt die lebendige Kraft als Function von $q_1, \ldots q_\mu, p_1, \ldots p_\mu$ aufgefasst wieder mit T, so wird das *d'Alembert*'sche Differentialgleichungsystem zweiter Ordnung (2) sich durch das Differentialgleichungsystem $2\mu^{\text{ter}}$ Klasse ersetzen lassen:

$$(26)\left\{\begin{array}{l} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dq_\mu}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_\mu} \\ \frac{dp_1}{dt} = Q_1 - \frac{\partial T}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = Q_2 - \frac{\partial T}{\partial q_2}, \ldots \frac{dp_\mu}{dt} = Q_\mu - \frac{\partial T}{\partial q_\mu}, \end{array}\right.$$

in welchem t die unabhängige, $q_1, \ldots q_\mu, p_1, \ldots p_\mu$ die abhängigen Variabeln bedeuten.

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn das Kräftesystem eine Kräftefunction U besitzt, wenn also eine Function U aller Coordinaten existirt von der Beschaffenheit, dass

$$(27)\qquad X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

ist, dann Q_s nach (4) in

$$(28)\qquad Q_s = \sum_1^n {}^i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_s}$$

übergeht, wenn U ebenfalls als Function von $q_1, \ldots q_\mu$ dargestellt wird, und das Differentialgleichungsystem (26) nimmt dann die Form an

$$(29)\left\{\begin{array}{l} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dq_\mu}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_\mu} \\ \frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2}, \ldots \frac{dp_\mu}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu}; \end{array}\right.$$

setzt man endlich

$$(30)\qquad T - U = H,$$

worin H eine Function von $q_1, \dots q_\mu, p_1, \dots p_\mu$ ist und die *Hamilton*'sche Function genannt wird, und bemerkt, dass U von $p_1, \dots p_\mu$ unabhängig ist, so kann man diesem Differentialgleichungsysteme noch die Form geben

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}, \dots \dfrac{dq_\mu}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\mu} \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2}, \dots \dfrac{dp_\mu}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\mu}. \end{cases}$$

2. Wenden wir auf dieses Differentialgleichungsystem $2\mu^{\text{ter}}$ Klasse die in dem Abschnitte IV. des ersten Kapitels entwickelte Theorie des letzten Multiplicators an, so ist zunächst klar, dass jede Constante, also z. B. die Einheit, ein Multiplicator unseres Systemes (26) ist, da die nach IV. 1. nothwendige Beziehung

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} = 0$$

in unserem Falle in

$$(32)\qquad \sum_1^\mu {}_s \frac{\partial}{\partial q_s}\left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) + \sum_1^\mu {}_s \frac{\partial}{\partial p_s}\left(Q_s - \frac{\partial T}{\partial q_s}\right) = 0$$

übergeht und, da Q_s von p_s unabhängig ist, in der That identisch erfüllt ist.

Daraus folgt aber nach dem in jenem Abschnitte IV. bewiesenen Satze, weil ein Multiplicator des Systems bekannt ist, der Satz,

dass, wenn man für das Differentialgleichungsystem $2\mu^{\text{ter}}$ Klasse eines mechanischen Problems $2\mu - 1$ Integralfunctionen kennt, sich die Auffindung der letzten Integralfunction auf Quadraturen zurückführen lässt.

3. Legen wir jetzt unter Voraussetzung einer Kräftefunction das Differentialgleichungsystem $2\mu^{\text{ter}}$ Klasse (31) zu Grunde, so wollen wir den folgenden *Poisson*'schen Satz beweisen:

Sind

$$\varphi(q_1, q_2, \dots q_\mu, p_1, p_2, \dots p_\mu, t), \quad \psi(q_1, q_2, \dots q_\mu, p_1, p_2, \dots p_\mu, t)$$

zwei Integralfunctionen des Differentialgleichungsystems (31), *so wird behauptet, dass auch*

$$(33)\qquad (\varphi, \psi) = \sum_{1}^{\mu}{}_{\sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p_\sigma} \right)$$

eine Integralfunction jenes Systemes ist.

Da nämlich nach der durch die Gleichung (3) des Abschnittes IV. des vorigen Kapitels gegebenen Definition einer Integralfunction die beiden Gleichungen

$$(34)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum\limits_{1}^{\mu}{}_{s} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_s} \dfrac{dq_s}{dt} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_s} \dfrac{dp_s}{dt} \right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{\partial t} + \sum\limits_{1}^{\mu}{}_{s} \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial q_s} \dfrac{dq_s}{dt} + \dfrac{\partial \psi}{\partial p_s} \dfrac{dp_s}{dt} \right) = 0 \end{cases}$$

identisch erfüllt sein müssen, so wird vermöge der Differentialgleichungen (31) auch

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum\limits_{1}^{\mu}{}_{s} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_s} \dfrac{\partial H}{\partial p_s} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_s} \dfrac{\partial H}{\partial q_s} \right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{\partial t} + \sum\limits_{1}^{\mu}{}_{s} \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial q_s} \dfrac{\partial H}{\partial p_s} - \dfrac{\partial \psi}{\partial p_s} \dfrac{\partial H}{\partial q_s} \right) = 0 \end{cases}$$

identisch bestehen, und somit durch partielle Differentiation nach q_σ und p_σ

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial q_\sigma} + \sum\limits_{1}^{\mu}{}_{s} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_s} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_\sigma} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial q_s \partial q_\sigma} \dfrac{\partial H}{\partial p_s} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_s} \dfrac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_\sigma} \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial p_s \partial q_\sigma} \dfrac{\partial H}{\partial q_s} \right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial p_\sigma} + \sum\limits_{1}^{\mu}{}_{s} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_s} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_\sigma} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial q_s \partial p_\sigma} \dfrac{\partial H}{\partial p_s} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_s} \dfrac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_\sigma} \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial p_s \partial p_\sigma} \dfrac{\partial H}{\partial q_s} \right) = 0, \end{cases}$$

und ähnliche zwei Gleichungen aus der zweiten Gleichung von (35).

Nun ist aber

$$(37)\qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial q_\sigma} + \sum_{1}^{\mu}{}_{s} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_s \partial q_\sigma} \frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_s \partial q_\sigma} \frac{dp_s}{dt} \right)$$

oder nach (31)

$$(38)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial q_\sigma} + \sum_1^\mu {}_s \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_s \partial q_\sigma} \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_s \partial q_\sigma} \frac{\partial H}{\partial q_s} \right)$$

und ebenso

$$(39)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial p_\sigma} + \sum_1^\mu {}_s \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_s \partial p_\sigma} \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_s \partial p_\sigma} \frac{\partial H}{\partial q_s} \right),$$

und zwei ähnliche Gleichungen für die ψ-Function, und diese Beziehungen gehen mit Benutzung von (36) offenbar über in

$$(40)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma} = -\displaystyle\sum_1^\mu {}_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_\sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_\sigma} \right) \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma} = -\displaystyle\sum_1^\mu {}_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_\sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_\sigma} \right) \end{cases}$$

und die beiden ähnlichen.

Soll aber (φ, ψ) eine Integralfunction der Differentialgleichungen (31) sein, so muss nach (33)

$$(41)\qquad \frac{d(\varphi,\psi)}{dt} = \sum_1^\mu {}_\sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma} \frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial q_\sigma} \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma} \right.$$
$$\left. - \frac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma} \frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \psi}{\partial p_\sigma} \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma} \right) = 0$$

identisch erfüllt werden; in der That wird diese Gleichung vermöge (40) und der beiden ähnlichen für die ψ-Function in

$$\sum_1^\mu {}_s \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma} \sum_1^\mu {}_s \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_\sigma} - \frac{\partial \psi}{\partial p_s} \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_\sigma} \right) \right.$$
$$+ \frac{\partial \psi}{\partial q_\sigma} \sum_1^\mu {}_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_\sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_\sigma} \right)$$
$$- \frac{\partial \varphi}{\partial q_\sigma} \sum_1^\mu {}_s \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_\sigma} - \frac{\partial \psi}{\partial p_s} \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_\sigma} \right)$$
$$\left. - \frac{\partial \psi}{\partial p_\sigma} \sum_1^\mu {}_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_\sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_\sigma} \right) \right\} = 0$$

übergehen, und diese Gleichung wird, wie man unmittelbar sieht, identisch erfüllt, indem die Coefficienten von

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_\sigma}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_\sigma}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_\sigma}$$

einzeln Null werden; somit wäre der oben ausgesprochene Satz erwiesen.

Da man nun aus (φ, ψ) und φ wieder eine Integralfunction ableiten kann, u. s. w., so würden sich nach dem oben ausgesprochenen Satze aus zwei Integralfunctionen des Differentialgleichungsystems $2\mu^{\text{ter}}$ Klasse alle 2μ Integralfunctionen ableiten lassen, wenn sich nicht bei der Bildung Identitäten oder frühere Integralfunctionen ergeben könnten.

II. Ueber diejenigen Differentialgleichungsysteme m^{ter} Klasse, für welche in jedem Punkte die allgemeinen Integralsysteme von m particulären Integralsystemen und willkürlichen Constanten algebraisch abhängen.

1. Man wird im Folgenden für diejenigen Differentialgleichungsysteme, für welche die allgemeinen Integralsysteme sich durch so viel particuläre Integralsysteme und so viel willkürliche Constanten, als die Zahl ihrer Klasse anzeigt, algebraisch ausdrücken lassen, auf Grund dieser Eigenschaft die Natur ihrer Integrale vollständig zu ergründen im Stande sein, und wir wollen deshalb die Formen solcher Differentialgleichungsysteme zu erforschen suchen, welche die eben angegebene Eigenschaft besitzen.

Untersuchen wir zunächst die algebraischen Differentialgleichungsysteme erster Klasse

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \tag{1}$$

worin φ eine algebraische Function bedeutet, und legen zwischen dem allgemeinen Integrale, einem particulären und der willkürlichen Constanten die algebraische Beziehung zu Grunde

$$y = f(y_1, c), \tag{2}$$

so darf zunächst offenbar angenommen werden, dass y_1 nicht eine algebraische Function von x ist, da sonst vermöge (2) sämmtliche Integrale algebraisch wären.

Durch Differentiation von (2) nach x folgt nun mit Hülfe von (1)

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}\varphi(x, y_1) = \varphi(x, f), \tag{3}$$

und da diese Gleichung der eben ausgesprochenen Annahme gemäss eine in x, y_1 und c identische sein muss, so ergiebt sich durch Differentiation nach y_1 und c

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}\varphi(x, y_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi(x, y_1)}{\partial y_1} &= \frac{\partial\varphi(x, f)}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_1\,\partial c}\varphi(x, y_1) &= \frac{\partial\varphi(x, f)}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial c_1}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

und durch Elimination von $\frac{\partial\varphi(x, f)}{\partial f}$, wie eine leichte Rechnung durch Verification zeigt,

$$\varphi(x, y_1) = M\,\frac{\dfrac{\partial f(y_1, c)}{\partial c}}{\dfrac{\partial f(y_1, c)}{\partial y_1}}, \tag{5}$$

worin M eine algebraische Function von x und c bedeutet da nun $\varphi(x, y)$ von c frei ist, so kann man $c = 0$ setzen und erhält, indem y_1 durch y ersetzt wird,

$$\varphi(x, y) = \psi(y)\,\chi(x), \tag{6}$$

so dass die Differentialgleichung (1) die Form annimmt

$$\frac{dy}{dx} = \psi(y)\,\chi(x), \tag{7}$$

worin ψ und χ algebraische Functionen bedeuten. Sind nun y und y_1 die beiden obigen Integrale (2) der Differentialgleichung (1), so wird nach (7)

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \frac{dy_1}{\psi(y_1)} \tag{8}$$

sein, und somit diese Differentialgleichung in y und y_1 der Forderung gemäss eine Integralgleichung der Form (2) besitzen müssen. Dies würde der Fall sein, wenn

$$\psi(y) = y \tag{9}$$

wäre, indem die Differentialgleichung (8) dann die Form annähme

$$(10) \qquad y_1\,dy - y\,dy_1 = 0,$$

welcher in der That die Beziehung

$$(11) \qquad y = cy_1$$

genügt, die also zugleich die Beziehung zwischen zwei Integralen der Differentialgleichung

$$(12) \qquad \frac{dy}{dx} = y\chi(x)$$

liefern würde, welche *eine homogene lineare Differentialgleichung erster Klasse* genannt wird. Wir werden aber später sehen, dass die Differentialgleichung (8) auch noch in andern Fällen als (9) durch einen algebraischen Zusammenhang zwischen y, y_1 und einer willkürlichen Constanten c befriedigt werden kann und zwar *dann und nur dann*, wenn durch eine algebraische Substitution

$$(13) \qquad y = \omega(\eta)$$

eine Transformation des Differentials (8) in der Form möglich ist

$$(14) \qquad \frac{dy}{\psi(y)} = \frac{d\eta}{\eta} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{\psi(y)} = A\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}},$$

worin A und k Constanten sind, von denen die letztere auch verschwinden darf.

Wir finden somit *als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für ein Differentialgleichungsystem erster Klasse das allgemeine Integral eine algebraische Function eines particulären und einer willkürlichen Constanten ist, die, dass dasselbe von der Form*

$$(15) \quad \frac{dy}{dx} = y\,\chi(x) \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)\,(1-k^2y^2)}\cdot\chi(x),$$

oder durch algebraische Substitutionen aus diesen Formen abgeleitet ist.

2. Gehen wir jetzt zu einem Differentialgleichungsysteme zweiter Klasse

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x, y_1, y_2) \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx} = \varphi_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

über, worin φ_1 und φ_2 algebraische Functionen bedeuten, und verlangen wir nunmehr, dass die Elemente des allgemeinen Integralsystems wieder nur von den entsprechenden Elementen zweier particulärer Fundamentalsysteme

$$y_{11}, y_{12}, \quad \text{und } y_{21}, y_{22}$$

und zwei willkürlichen Constanten algebraisch in der Form abhängen

$$(17) \qquad \begin{cases} y_1 = f_1(y_{11}, y_{21}, c_1, c_2) \\ y_2 = f_2(y_{12}, y_{22}, c_1, c_2), \end{cases}$$

so wird man genau wie oben unter entsprechenden Voraussetzungen zu der nothwendigen Form des Differentialgleichungsystems (16)

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \psi_{11}(y_1)\,\chi_{11}(x) + \psi_{12}(y_2)\,\chi_{12}(x) \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx} = \psi_{21}(y_1)\,\chi_{21}(x) + \psi_{22}(y_2)\,\chi_{22}(x) \end{cases}$$

geführt. Aus diesen Gleichungen folgt aber

$$(19) \qquad \begin{cases} dy_1 = \psi_{11}(y_1)\,\chi_{11}(x)\,dx + \psi_{12}(y_2)\,\chi_{12}(x)\,dx \\ dy_{11} = \psi_{11}(y_{11})\,\chi_{11}(x)\,dx + \psi_{12}(y_{12})\,\chi_{12}(x)\,dx \\ dy_{21} = \psi_{11}(y_{21})\,\chi_{11}(x)\,dx + \psi_{12}(y_{22})\,\chi_{12}(x)\,dx\,, \end{cases}$$

und hieraus, sowie aus den drei entsprechenden Gleichungen für die zweiten Integralelemente

$$(20) \qquad \begin{cases} \begin{vmatrix} dy_1 & dy_{11} & dy_{21} \\ \psi_{11}(y_1) & \psi_{11}(y_{11}) & \psi_{11}(y_{21}) \\ \psi_{12}(y_2) & \psi_{12}(y_{12}) & \psi_{12}(y_{22}) \end{vmatrix} = 0 \\[4ex] \begin{vmatrix} dy_2 & dy_{12} & dy_{22} \\ \psi_{21}(y_1) & \psi_{21}(y_{11}) & \psi_{21}(y_{21}) \\ \psi_{22}(y_2) & \psi_{22}(y_{12}) & \psi_{22}(y_{22}) \end{vmatrix} = 0, \end{cases}$$

und es müssen diese beiden Differentialbeziehungen resp. durch die Gleichungen (17) befriedigt werden. Indem wir nun annehmen, dass zwischen $y_{11}, y_{21}, y_{12}, y_{22}$ nicht selbst schon eine algebraische Beziehung stattfindet, so folgt leicht*) mit Rück-

*) Eine eingehende Untersuchung dieser Frage würde die Kenntniss der Elemente der Theorie totaler Differentialgleichungen mit mehreren unabhängigen Variabeln erfordern, die wir hier noch nicht als bekannt voraussetzen wollen.

sicht darauf, dass die Ausdrücke für y_1 und y_2 zwei willkürliche Constanten enthalten, dass das Differentialgleichungsystem (18) die Form haben muss

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_1\,\chi_{11}(x) + y_2\,\chi_{12}(x) \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1\,\chi_{21}(x) + y_2\,\chi_{22}(x), \end{aligned}\right. \tag{21}$$

während die dazugehörige Integralrelation (17) in

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= c_1\,y_{11} + c_2\,y_{21} \\ y_2 &= c_1\,y_{12} + c_2\,y_{22} \end{aligned}\right. \tag{22}$$

übergeht, oder aus (21) durch algebraische Substitutionen

$$y_1 = \omega_1(Y_1), \quad y_2 = \omega_2(Y_2) \tag{23}$$

entstanden sein muss.

Schliesst man so weiter, so findet man allgemein,

dass unter allen algebraischen Differentialgleichungsystemen n^{ter} *Klasse im Allgemeinen nur die in der Form*

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= A_{11}\,y_1 + A_{12}\,y_2 + \cdots + A_{1n}\,y_n \\ \frac{dy_2}{dx} &= A_{21}\,y_1 + A_{22}\,y_2 + \cdots + A_{2n}\,y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= A_{n1}\,y_1 + A_{n2}\,y_2 + \cdots + A_{nn}\,y_n \end{aligned}\right. \tag{24}$$

enthaltenen, oder die durch algebraische Substitutionen aus diesen transformirten Differentialgleichungsysteme die Eigenschaft besitzen, dass die Elemente des allgemeinen Integralsystems sich durch die entsprechenden Elemente von n particulären Integralsystemen und n willkürlichen Constanten algebraisch ausdrücken lassen, und zwar lauten die Relationen für das System (24)

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= c_1\,y_{11} + c_2\,y_{21} + \cdots + c_n\,y_{n1} \\ y_2 &= c_1\,y_{12} + c_2\,y_{22} + \cdots + c_n\,y_{n2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= c_1\,y_{1n} + c_2\,y_{2n} + \cdots + c_n\,y_{nn}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Die eben erwähnte Eigenschaft der Differentialgleichungsysteme (24) begründet, wie wir sehen werden, ihre Wichtigkeit in der Theorie der Differentialgleichungen, und wir werden uns später mit der Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften jener Differentialgleichungsysteme eingehend beschäftigen.

III. Ueber die Reduction homogener Differentialgleichungsysteme auf Systeme niederer Klasse.

1. Die durch die Gleichungen (24) des vorigen Abschnittes dargestellten Differentialgleichungsysteme haben in rein algebraischer Beziehung die Eigenschaft, dass jede ihrer Differentialgleichungen in Bezug auf die abhängigen Variabeln und die resp. in ihnen vorkommenden Differentialquotienten homogen vom ersten Grade ist, und in dieser Eigenschaft ihrer Form bilden sie nur specielle Fälle von der grossen und häufig vorkommenden Gattung der homogenen Differentialgleichungsysteme, welche die wesentliche Eigenschaft besitzen, dass sie sich vermöge Quadraturen stets auf algebraische Differentialgleichungsysteme niederer Klasse zurückführen lassen.

Sei ein Differentialgleichungsystem n^{ter} Klasse vorgelegt

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{G}_1\left(x, y_1, y_2, \cdots y_n, \dfrac{dy_1}{dx}\right) = 0 \\ \mathfrak{G}_2\left(x, y_1, y_2, \cdots y_n, \dfrac{dy_2}{dx}\right) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathfrak{G}_n\left(x, y_1, y_2, \cdots y_n, \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0, \end{cases}$$

in welchem $\mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_n$ *homogene Functionen der Grössen* $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ *resp. vom* $m_1, m_2, \ldots m_n^{\text{ten}}$ *Grade bedeuten*, so wird, wenn

$$(2) \qquad x = x.1, \; y_1 = xz_1, \; y_2 = xz_2, \; \ldots y_n = xz_n$$

gesetzt, und die erste Gleichung durch x^{m_1}, ... die letzte durch x^{m_n} dividirt wird, ein System von Gleichungen sich ergeben

$$\mathfrak{g}_1\left(z_1, z_2, \ldots z_n, \frac{dy_1}{dx}\right) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{g}_n\left(z_1, z_2, \ldots z_n, \frac{dy_n}{dx}\right) = 0$$

oder

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{g}_1\left(z_1, z_2, \ldots z_n, z_1 + x\dfrac{dz_1}{dx}\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{g}_n\left(z_1, z_2, \ldots z_n, z_n + x\dfrac{dz_n}{dx}\right) = 0; \end{cases}$$

bringt man diese Gleichungen in die Form

$$(4)\quad \begin{cases} x\dfrac{dz_1}{dx} = a_1(z_1, z_2, \ldots z_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x\dfrac{dz_n}{dx} = a_n(x, z_1, z_2, \ldots z_n), \end{cases}$$

worin $a_1, \ldots a_n$ algebraische Functionen bedeuten, so folgt durch Division je zweier

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dz_2}{dz_1} = A_2(z_1, z_2, \ldots z_n) \\ \dfrac{dz_3}{dz_1} = A_3(z_1, z_2, \ldots z_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dz_n}{dz_1} = A_n(z_1, z_2, \ldots z_n), \end{cases}$$

worin wiederum $A_2, \ldots A_n$ algebraische Functionen sind, und es ist somit die Integration des vorgelegten Differentialgleichungsystems n^{ter} Klasse zurückgeführt auf ein solches $n-1^{\text{ter}}$ Klasse. Sind die $n-1$ Integralgleichungen dieses Systems gefunden

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{f}_1(z_1, z_2, \ldots z_n) = \alpha_1 \\ \mathfrak{f}_2(z_1, z_2, \ldots z_n) = \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{f}_{n-1}(z_1, z_2, \ldots z_n) = \alpha_{n-1}, \end{cases}$$

so liefert deren Zusammenstellung mit der ersten Differentialgleichung (4) die Beziehung

(7) $$\frac{dz_1}{dx} = \frac{1}{x} F(z_1, \alpha_1, \cdots \alpha_{n-1}),$$

oder vermittels der früher definirten Quadratur

(8) $$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz_1}{F(z_1, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1})} + \alpha_n,$$

woraus z_1, und somit nach den Gleichungen (6) auch $z_2, z_3, \ldots z_n$ und daher nach (2) auch $y_1, y_2, \ldots y_n$ als Functionen von x und den n willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ bestimmt sind. Wir erhalten somit den Satz:

Die Integration eines jeden in Bezug auf die unabhängige und die abhängigen Variabeln homogenen Differentialgleichungsystems n^{ter} Klasse ist auf die Integration eines Differentialgleichungsystem $n-1^{\text{ter}}$ Klasse und auf eine Quadratur zurückführbar.

2. *Sind jedoch die Gleichungen* (1) *in Bezug auf die abhängigen Variabeln $y_1, \ldots y_n$ und resp. $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots \frac{dy_n}{dx}$ homogen und zwar vom $n_1, n_2, \ldots n_n{}^{\text{ten}}$ Grade,* so wird, wenn man

(9) $$y_2 = y_1 z_2, \; y_3 = y_1 z_3, \cdots y_n = y_1 z_n$$

setzt, die erste Gleichung von (1), wenn $\frac{dy_1}{dx} = y_1 \cdot \frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx}$ gesetzt, und die Gleichung durch $y_1^{n_1}$ dividirt wird, in

(10) $$g_1\left(x, z_2, z_3, \cdots z_n, \frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}\right) = 0 \text{ oder } \frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx} = a_1(x, z_2, z_3, \cdots z_n)$$

übergehen, wenn a_1 eine algebraische Function bedeutet; da aber die $n-1$ folgenden Gleichungen von (1) vermöge (9) die Form annehmen

(11) $$\mathfrak{G}_r\left(x, y_1 \cdot 1, y_1 z_2, \ldots y_1 z_n, y_1 \frac{1}{y_1}\frac{dy_r}{dx}\right) = 0,$$

so wird sich vermöge der Annahme der Homogeneität, wenn durch $y_1^{n_r}$ dividirt und berücksichtigt wird, dass nach (9) und (10)

(12) $$\frac{1}{y_1}\frac{dy_r}{dx} = \frac{dz_r}{dx} + z_r \frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx} \text{ oder } \frac{1}{y_1}\frac{dy_r}{dx} = \frac{dz_r}{dx} + z_r a_1(x, z_2, z_3, \cdots z_n)$$

ist, das System von $n-1$ Differentialgleichungen ergeben

$$(13)\quad\begin{cases}\mathfrak{g}_2\left(x,\ z_2,\ z_3,\ \cdots z_n,\dfrac{dz_2}{dx}\right)=0\\ \mathfrak{g}_3\left(x,\ z_2,\ z_3,\ \cdots z_n,\ \dfrac{dz_3}{dx}\right)=0\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \mathfrak{g}_n\left(x,\ z_2,\ z_3,\ \cdots z_n,\dfrac{dz_n}{dx}\right)=0\,.\end{cases}$$

Sind aber $n-1$ Integralfunctionen dieses Systemes $n-1^{\text{ter}}$ Klasse gefunden

$$(14)\quad\begin{cases}\mathfrak{f}_2(x,\ z_2,\ z_3,\ \cdots z_n)=\alpha_2\\ \mathfrak{f}_3(x,\ z_2,\ z_3,\ \cdots z_n)=\alpha_3\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \mathfrak{f}_n(x,\ z_2,\ z_3,\ \cdots z_n)=\alpha_n\,,\end{cases}$$

so geht (10) in

$$(15)\qquad\int\frac{dy_1}{y_1}=\int F(x,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n)\,dx+\alpha_1$$

über, woraus y_1, also nach (14) und (9) auch $y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n$ als Functionen von x und den n Constanten $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n$ bestimmt sind; es folgt somit,

dass jedes in Bezug auf die abhängigen Variabeln und deren Differentialquotienten homogene Differentialgleichungsystem n^{ter} Klasse reducirbar ist auf ein Differentialgleichungsystem $n-1^{\text{ter}}$ Klasse und eine Quadratur.

Es mag hierzu der specielle Fall *einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung*

$$(16)\qquad f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdot\ \cdot\ \frac{d^n y}{dx^n}\right)=0$$

hervorgehoben werden, welche in den Grössen

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^n y}{dx^n}$$

homogen sein soll; es wird sich die Integration dieser Gleichung von der Integration einer Differentialgleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung und einer Quadratur abhängig machen lassen, da das System von Differentialgleichungen

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \\ f\left(x, y_1, y_2, \cdots y_n, \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \end{cases}$$

der Bedingung des oben ausgesprochenen Satzes genügt.

3. Wir wollen endlich noch die Möglichkeit der Reduction für ein Differentialgleichungsystem nachweisen, für welches die Bedingungen der Homogeneität in der früheren Definition nicht erfüllt sind, welches aber die unabhängige Variable mit den abhängigen Variabeln und den Differentialquotienten in ähnlicher Weise verbunden besitzt. Sei nämlich das System von der Form

$$(18)\quad \begin{cases} \mathfrak{G}_1\left(x^{p_1} y_1, x^{p_2} y_2, \cdots x^{p_n} y_n, x^{p_1+1} \dfrac{dy_1}{dx}\right) = 0 \\ \mathfrak{G}_2\left(x^{p_1} y_1, x^{p_2} y_2, \cdots x^{p_n} y_n, x^{p_2+1} \dfrac{dy_2}{dx}\right) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathfrak{G}_n\left(x^{p_1} y_1, x^{p_2} y_2, \cdots x^{p_n} y_n, x^{p_n+1} \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0, \end{cases}$$

worin $p_1, p_2, \ldots p_n$, wenn wir die Systeme algebraisch voraussetzen, rationale Zahlen sein müssen, so setze man

$$(19)\qquad x^{p_1} y_1 = z_1, \quad x^{p_2} y_2 = z_2, \cdots x^{p_n} y_n = z_n,$$

woraus sich

$$\mathfrak{G}_1\left(z_1, z_2, \cdots z_n, x\frac{dz_1}{dx} - p_1 z_1\right) = 0$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\mathfrak{G}_n\left(z_1, z_2, \cdots z_n, x\frac{dz_n}{dx} - p_n z_n\right) = 0$$

oder

$$(20)\quad \begin{cases} x\dfrac{dz_1}{dx} = A_1(z_1, z_2, \cdots z_n) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x\dfrac{dz_n}{dx} = A_n(z_1, z_2, \cdots z_n), \end{cases}$$

und durch Division aller durch die erste ein Differentialgleichungsystem $n-1^{\text{ter}}$ Klasse ergiebt

$$(21)\quad \begin{cases} g_2\left(z_1, z_2, \cdots z_n, \dfrac{dz_2}{dz_1}\right) = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ g_n\left(z_1, z_2, \cdots z_n, \dfrac{dz_n}{dz_1}\right) = 0; \end{cases}$$

sind die Integrale dieses Systems in der Form gefunden

$$(22)\quad \begin{cases} \mathfrak{f}_2(z_1, z_2, \cdots z_n) = \alpha_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mathfrak{f}_n(z_1, z_2, \cdots z_n) = \alpha_n, \end{cases}$$

so geht die erste Gleichung von (20) in

$$(23)\quad \int\frac{dx}{x} = \int F(z_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) + \alpha_1$$

über, wodurch z_1, also nach (22) und (19) auch $y_1, y_2, \ldots y_n$ durch x und n willkürliche Constanten ausgedrückt sind;

das Differentialgleichungsystem (18) der n^{ten} Klasse ist somit stets auf ein Differentialgleichungsystem $n-1^{\text{ter}}$ Klasse und auf eine Quadratur reducirbar.

Man sieht sogleich wieder, dass sich jede Differentialgleichung n^{ter} Ordnung von der Form

$$(24)\quad f\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}, x\frac{d^2y}{dx^2}, \cdots x^{n-1}\frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

worin f eine ganze Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet, wie durch Umsetzen in ein System n^{ter} Klasse unmittelbar ersichtlich ist, auf eine Differentialgleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung und eine Quadratur zurückführen lässt, und da sich jede in Bezug auf die beiden Variabeln x, y und

die Differentialien derselben dx, dy, d^2y, ... d^ny homogene Gleichung

$$(35) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

offenbar in die Form (24) umsetzen lässt, so folgt,

dass jede in Bezug auf ihre Variabeln und die Differentialien derselben homogene Differentialgleichung auf eine Differentialgleichung niederer Ordnung und eine Quadratur reducirt werden kann.

Drittes Kapitel.

Ueber die Eigenschaften der linearen Differentialgleichungssysteme.

I. Ueber die simultanen Fundamentalsysteme von Integralen linearer Differentialgleichungssysteme.

1. *Wir werden ein Differentialgleichungssystem n^{ter} Klasse ein lineares nennen, wenn dasselbe die Form hat*

$$
(1)\qquad \begin{cases}
\frac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n + A_{1n+1} \\
\frac{dy_2}{dx} = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2n}y_n + A_{2n+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dy_n}{dx} = A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \cdots + A_{nn}y_n + A_{nn+1},
\end{cases}
$$

worin $A_{\alpha\beta}$ Functionen von x bedeuten), und zwar wird dieses System ein homogenes lineares genannt, wenn*

$$
(2)\qquad A_{1n+1} = A_{2n+1} = \cdots = A_{nn+1} = 0
$$

ist.

Betrachten wir zunächst, um die Beziehungen zwischen den allgemeinen und particulären Integralsystemen festzustellen, ein homogenes System von der Form

*) Wenn wir nur *algebraische* lineare Differentialgleichungssysteme betrachten, so werden $A_{\alpha\beta}$ algebraische Functionen von x bedeuten müssen; doch werden die nachfolgenden Untersuchungen unabhängig von dem algebraischen Charakter der Coefficienten des linearen Differentialgleichungssystems durchgeführt werden.

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}\,y_1 + A_{12}\,y_2 + \cdots + A_{1n}\,y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}\,y_1 + A_{22}\,y_2 + \cdots + A_{2n}\,y_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1}\,y_1 + A_{n2}\,y_2 + \cdots + A_{nn}\,y_n, \end{cases}$$

so ist zunächst klar, *dass wenn*

$$(A)\quad \begin{cases} y_{11}, & y_{12}, & \cdots & y_{1n} \\ y_{21}, & y_{22}, & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{\lambda 1}, & y_{\lambda 2}, & \cdots & y_{\lambda n} \end{cases}$$

particuläre Integralsysteme des Differentialgleichungsystemes (1) *darstellen, nothwendig auch*

$$(B)\quad \begin{cases} c_1\,y_{11} + c_2\,y_{21} + \cdots + c_\lambda\,y_{\lambda 1} \\ c_1\,y_{12} + c_2\,y_{22} + \cdots + c_\lambda\,y_{\lambda 2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ c_1\,y_{1n} + c_2\,y_{2n} + \cdots + c_\lambda\,y_{\lambda n}, \end{cases}$$

worin $c_1, c_2, \ldots c_\lambda$ *willkürliche Constanten bedeuten, ein Integralsystem desselben Differentialgleichungsystems bilden,*

wie durch Einsetzen der Systeme (A) und (B) in das Differentialgleichungsystem (1) unmittelbar hervorgeht.

Seien nun n particuläre Integralsysteme durch ihre Werthe, welche sie in einem beliebig, aber fest gewählten, nicht singulären Punkte $x = x_0$ annehmen, bestimmt, wie es die früheren allgemeinen Untersuchungen ergaben, und seien die für $x = x_0$ festgesetzten Werthe $y^0_{k\lambda}$, was stets möglich ist, so gewählt, dass die Determinante

$$(4)\quad D^0 = \begin{vmatrix} y^0_{11} & y^0_{12} & \cdots & y^0_{1n} \\ y^0_{21} & y^0_{22} & \cdots & y^0_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^0_{n1} & y^0_{n2} & \cdots & y^0_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so ist leicht zu sehen, dass *jedes* Integralsystem von (1) in den Formen

$$(5)\qquad \begin{cases} y_1 = c_1\, y_{11} + c_2\, y_{21} + \cdots + c_n\, y_{n1} \\ y_2 = c_1\, y_{12} + c_2\, y_{22} + \cdots + c_n\, y_{n2} \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ y_n = c_1\, y_{1n} + c_2\, y_{2n} + \cdots + c_n\, y_{nn} \end{cases}$$

enthalten ist; denn einerseits bilden die Formen (5), wie oben gezeigt worden, stets Integralsysteme, andererseits kann *jedes* Integralsystem durch dieselben dargestellt werden, da, wenn $y_1, y_2, \ldots y_n$ für $x = x_0$ die willkürlich gewählten Werthe $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ annehmen sollen, vermöge der Annahme, dass die Determinante (4) nicht verschwindet, die Constanten $c_1, \ldots c_n$ stets so bestimmt werden können, dass den Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} y_1^0 = c_1\, y_{11}^0 + c_2\, y_{21}^0 + \cdots + c_n\, y_{n1}^0 \\ y_2^0 = c_1\, y_{12}^0 + c_2\, y_{22}^0 + \cdots + c_n\, y_{n2}^0 \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ y_n^0 = c_1\, y_{1n}^0 + c_2\, y_{2n}^0 + \cdots + c_n\, y_{nn}^0 \end{cases}$$

Genüge geschieht.

Man nennt nun eine Zusammenstellung von n einem nicht singulären Punkte x_0 zugehörigen Integralsystemen

$$(\mathrm{H})\qquad \begin{cases} y_{11}\quad y_{12}\quad \cdots\quad y_{1n} \\ y_{21}\quad y_{22}\quad \cdots\quad y_{2n} \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ y_{n1}\quad y_{n2}\quad \cdots\quad y_{nn}, \end{cases}$$

deren Determinante (4) *von Null verschieden ist, ein simultanes, dem Punkte x_0 zugehöriges Fundamentalsystem von Integralen,*

und es folgt somit,

dass in der Umgebung eines beliebigen nicht singulären Punktes sich die Elemente des allgemeinen Integralsystems als homogene lineare Functionen mit n constanten Coefficienten aus den entsprechenden Elementen von n simultanen Fundamentalsystemen, die diesem Punkte zugehören, darstellen lassen.

Nach den Auseinandersetzungen des Abschnittes III. Kap. 1 hängt die Natur der Integrale des Differentialgleichungsystemes (1) in irgend einem Punkte der x-Ebene von der Eindeutigkeit und Endlichkeit der rechten Seiten dieser Gleichungen in diesen Punkten ab, und da dieselben ganze lineare Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_n$ sind, so wird die Natur der Integrale nicht von den Anfangswerthen dieser letzteren Grössen abhängen, sondern lediglich durch den Charakter der Functionen $A_{\alpha\beta}$ von x bestimmt sein. Schliessen wir also nach den oben ausgeführten Betrachtungen irgend ein einfach zusammenhängendes Flächenstück T der x-Ebene ab, innerhalb dessen keine Verzweigungspunkte der Functionen $A_{\alpha\beta}$ liegen, tragen ferner in diesen Raum diejenigen Punkte ein, für welche die $A_{\alpha\beta}$ unstetig werden, und umgeben diese mit unendlich kleinen Curven, so entsteht eine mehrfach zusammenhängende Fläche T', welche, wenn wir je eine der kleinen Curven durch irgend einen Querschnitt mit dem Rande der Fläche T' verbinden, wiederum ein einfach zusammenhängendes Flächenstück T'' wird; und wir wissen, dass dann die Fortsetzungen irgend eines zu einem Punkte x_0 der Fläche T' gehörigen simultanen Fundamentalsystems innerhalb dieser Fläche T' jedenfalls simultane Integralsysteme, und innerhalb T'' eindeutige simultane Integralsysteme bleiben*).

*) Es mag schon hier bemerkt werden, dass, wenn $A_{\alpha\beta}$ algebraische Functionen von x bedeuten, man nach den Auseinandersetzungen des zweiten Abschnittes von Kap. 1 eine algebraische Function t_1 wird bilden können, durch welche sich die sämmtlichen $A_{\alpha\beta}$ mit Hülfe rationaler Functionen von x rational und ganz ausdrücken lassen; sei nun t_1 die Lösung der mit Adjungirung von x irreductibeln algebraischen Gleichung

$$f_0(x)t^\nu + f_1(x)t^{\nu-1} + \cdots + f_{\nu-1}(x)t + f_\nu(x) = 0$$

und

$$A_{\alpha\beta} = \frac{F_{\alpha\beta}(x, t_1)}{F(x)},$$

worin $F_{\alpha\beta}(x, t_1)$ eine ganze Function von x und t_1, und zwar in Bezug auf die letzte Grösse vom $\nu - 1^{\text{ten}}$ Grade, $F(x)$ eine ganze, allen $A_{\alpha\beta}$ gemeinsame Function von x ist, so wird das lineare Differentialgleichungsystem die Form annehmen:

Es ist aber auch leicht zu sehen,

dass ein simultanes Fundamentalsystem von Integralen bei beliebiger Fortsetzung über die Fläche T' hin auch ein simultanes Fundamentalsystem bleibt.

Bildet man nämlich die Determinante aus den simultanen Fundamentalsystemen

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich durch Differentiation nach x

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{F_{11}(x,t_1)}{F(x)} y_1 + \frac{F_{12}(x,t_1)}{F(x)} y_2 + \cdots + \frac{F_{1n}(x,t_1)}{F(x)} y_n$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{F_{21}(x,t_1)}{F(x)} y_1 + \frac{F_{22}(x,t_1)}{F(x)} y_2 + \cdots + \frac{F_{2n}(x,t_1)}{F(x)} y_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = \frac{F_{n1}(x,t_1)}{F(x)} y_1 + \frac{F_{n2}(x,t_1)}{F(x)} y_2 + \cdots + \frac{F_{nn}(x,t_1)}{F(x)} y_n.$$

Construirt man nun die *Riemann*'sche Fläche Φ für die algebraische Function t, und trägt auf dieser alle Werthe von x auf, welche die eine oder die andere der beiden Gleichungen

$$f_0(x) = 0, \quad F(x) = 0$$

befriedigen, und umgiebt diese mit unendlich kleinen Curven, so entsteht die mehrfach zusammenhängende *Riemann*'sche Fläche Φ', und es werden nach den obigen Auseinandersetzungen und bekannten Principien der *Riemann*'schen Theorie offenbar die Fortsetzungen eines zu einem Punkte x_0 der Fläche Φ' gehörigen simultanen Integralsystems über die ganze *Riemann*'sche Fläche Φ' hin stets simultane Integralsysteme bleiben, und das Differentialgleichungsystem selbst wird für alle geschlossenen Umläufe auf der *Riemann*'schen Fläche zu seiner früheren Gestalt, die für den Ausgangswerth x_0 zu Grunde gelegt wurde, zurückkommen; verwandelt man endlich noch durch Querschnitte, welche von den ausgeschlossenen Punkten nach der Begrenzung der Fläche Φ' führen, diese Fläche in eine einfach zusammenhängende Φ'', so werden die Elemente des simultanen Integralsystems bei einem beliebigen geschlossenen Wege der Variabeln x innerhalb der Fläche Φ'' stets zu ihren Ausgangswerthen zurückführen.

$$\frac{dD}{dx} = \frac{\partial D}{\partial y_{11}}\frac{dy_{11}}{dx} + \frac{\partial D}{\partial y_{21}}\frac{dy_{21}}{dx} + \cdots + \frac{\partial D}{\partial y_{n1}}\frac{dy_{n1}}{dx}$$
$$+ \frac{\partial D}{\partial y_{12}}\frac{dy_{12}}{dx} + \frac{\partial D}{\partial y_{22}}\frac{dy_{22}}{dx} + \cdots + \frac{\partial D}{\partial y_{n2}}\frac{dy_{n2}}{dx}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

oder nach bekannten Eigenschaften der Zerlegung einer Determinante

$$(8)\quad \frac{dD}{dx} = \begin{vmatrix} \frac{dy_{11}}{dx} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \frac{dy_{21}}{dx} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dy_{n1}}{dx} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & \frac{dy_{12}}{dx} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & \frac{dy_{22}}{dx} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & \frac{dy_{n2}}{dx} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} + \cdots {}^{*)},$$

und daher mit Benutzung der Differentialgleichungen (3) für die particulären Integralsysteme nach Zerlegung der Determinanten

$$(9)\qquad \frac{dD}{dx} = (A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn})D$$

oder

$$(10)\qquad D = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = C \,.\, e^{\int (A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn})dx}.$$

*) Durch wiederholte Differentiation ergiebt sich der Ausdruck

$$\frac{d^r D}{dx^r} = \sum_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=r} \frac{r!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} \begin{vmatrix} y_{11}^{(\lambda_1)} & y_{12}^{(\lambda_2)} & \cdots & y_{1n}^{(\lambda_n)} \\ y_{21}^{(\lambda_1)} & y_{22}^{(\lambda_2)} & \cdots & y_{2n}^{(\lambda_n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1}^{(\lambda_1)} & y_{n2}^{(\lambda_2)} & \cdots & y_{nn}^{(\lambda_n)} \end{vmatrix},$$

wenn

$$\frac{d^\lambda y}{dx^\lambda} = y^{(\lambda)}$$

gesetzt wird.

Da diese Determinante nun für $x = x_0$ nicht verschwinden sollte, so darf die Constante C nicht Null sein; da nun ferner für irgend ein anderes x die rechte Seite von (10) nur dann verschwinden könnte, wenn die Quadratur im Exponenten, also auch die Function

$$A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn},$$

also jedenfalls eine der Grössen $A_{11}, A_{22}, \ldots A_{nn}$ unendlich wird, diese Werthe von x aber nach den früheren allgemeinen Betrachtungen, da sie $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots$ unendlich gross machen, zu den singulären Werthen gezählt wurden, die aus der Fläche T' ausgeschlossen waren, so wird die Determinante, wenn sie für $x = x_0$ von Null verschieden war, für jedes x innerhalb des Gültigkeitsbereiches, also auch bei der Fortsetzung der Integrale von Null verschieden bleiben, selbst wenn man dieselben um die singulären Punkte herum, diese ausschliessend, in der Fläche T' fortsetzt — die Integralsysteme bleiben somit, wie bewiesen werden sollte, bei allen Fortsetzungen in T' simultane Fundamentalsysteme, wenn sie es überhaupt für einen Punkt dieser Fläche waren.

2. Nachdem nachgewiesen worden, dass die Elemente eines jeden Integralsystemes sich als lineare homogene, mit denselben Constanten behaftete Functionen von n simultanen Fundamentalsystemen darstellen lassen, wird leicht einzusehen sein,

dass beliebige $n + 1$ Integralsysteme der Differentialgleichungen (3) *stets in einem linearen Zusammenhange von der angegebenen Beschaffenheit stehen müssen;*

denn seien diese $n + 1$ Integralsysteme

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1n} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{n+1\,1} & \eta_{n+1\,2} & \cdots & \eta_{n+1\,n}; \end{cases}$$

so bestehen mit Beziehung auf ein simultanes Fundamentalsystem die Gleichungen

$$(11)\begin{cases}\eta_{11}=c_{11}y_{11}+\cdots+c_{1n}y_{n1},\cdots\eta_{n+11}=c_{n+11}y_{11}+\cdots+c_{n+1n}y_{n1}\\ \eta_{12}=c_{11}y_{12}+\cdots+c_{1n}y_{n2},\cdots\eta_{n+12}=c_{n+11}y_{12}+\cdots+c_{n+1n}y_{n2}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \eta_{1n}=c_{11}y_{1n}+\cdots+c_{1n}y_{nn},\cdots\eta_{n+1n}=c_{n+11}y_{1n}+\cdots+c_{n+1n}y_{nn},\end{cases}$$

und durch Zusammenstellung der $n+1$ ersten Gleichungen, der $n+1$ zweiten Gleichungen etc. eines jeden Systemes von (11) ergeben sich durch Elimination der resp. Grössen $y_{1\alpha}, y_{2\alpha}, \ldots y_{n\alpha}$ die linearen Relationen:

$$(12)\qquad\begin{cases}C_1\eta_{11}+C_2\eta_{21}+\cdots+C_{n+1}\eta_{n+11}=0\\ C_1\eta_{12}+C_2\eta_{22}+\cdots+C_{n+1}\eta_{n+12}=0\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ C_1\eta_{1n}+C_2\eta_{2n}+\cdots+C_{n+1}\eta_{n+1n}=0.\end{cases}$$

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass auch umgekehrt

ein simultanes Integralsystem (H) *ein simultanes Fundamentalsystem sein wird, wenn n Gleichungen von der Form*

$$(13)\qquad\begin{cases}c_1y_{11}+c_2y_{21}+\cdots+c_ny_{n1}=0\\ c_1y_{12}+c_2y_{22}+\cdots+c_ny_{n2}=0\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ c_1y_{1n}+c_2y_{2n}+\cdots+c_ny_{nn}=0\end{cases}$$

für keine endlichen bestimmten Werthe der Constanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ *statthaben können.*

Endlich ist aber leicht einzusehen, *dass für zwei simultane Fundamentalsysteme von Integralen*

$$\begin{matrix}y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn}\end{matrix}\qquad\text{und}\qquad\begin{matrix}\eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1n}\\ \eta_{21} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \cdots & \eta_{nn},\end{matrix}$$

welche nothwendig durch die Beziehungen verbunden sind

$$\begin{aligned}
\eta_{1\varrho} &= c_{11}\, y_{1\varrho} + c_{12}\, y_{2\varrho} + \cdots + c_{1n}\, y_{n\varrho} \\
\eta_{2\varrho} &= c_{21}\, y_{1\varrho} + c_{22}\, y_{2\varrho} + \cdots + c_{2n}\, y_{n\varrho} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta_{n\varrho} &= c_{n1}\, y_{1\varrho} + c_{n2}\, y_{2\varrho} + \cdots + c_{nn}\, y_{n\varrho},
\end{aligned}$$

die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein muss,

da sich im entgegengesetzten Falle aus dem letzten Gleichungsystem eine lineare homogene, mit constanten Coefficienten versehene Beziehung zwischen den Grössen $\eta_{1\varrho}$, $\eta_{2\varrho}$, $\ldots\, \eta_{n\varrho}$ ergeben würde, was dem Charakter der Fundamentalintegrale widerstreitet.

3. Betrachten wir jetzt eine *lineare homogene Differentialgleichung* n^{ter} *Ordnung* von der Form

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0, \tag{14}$$

in welcher $A_1, A_2, \ldots A_n$ Functionen von x bedeuten, so setzt sich diese durch die Substitutionen

$$y = y_1, \quad \frac{dy}{dx} = y_2, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = y_3, \quad \ldots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = y_n \tag{15}$$

in das lineare homogene Differentialgleichungsystem erster Ordnung um

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\
\frac{dy_2}{dx} &= y_3 \\
&\cdots \\
\frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n \\
\frac{dy_n}{dx} &= -A_n y_1 - A_{n-1} y_2 - \cdots - A_1 y_n,
\end{aligned}\right. \tag{16}$$

und es nimmt somit, da in diesem Falle

$$(17) \quad A_{11} = A_{22} = \cdots = A_{n-1\,n-1} = 0, \quad A_{nn} = - A_1$$

ist, die obige Beziehung (10) vermöge der Substitutionen (15), *wenn* $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ *n particuläre Fundamental-Integrale der Differentialgleichung* (14) *bedeuten, für die also* nach der oben gegebenen Definition *im Punkte* $x = x_0$ *die Determinante*

$$(\mathrm{K}) \quad \begin{vmatrix} (\eta_1)_0 & \left(\frac{d\eta_1}{dx}\right)_0 & \left(\frac{d^2\eta_1}{dx^2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^{n-1}\eta_1}{dx^{n-1}}\right)_0 \\ (\eta_2)_0 & \left(\frac{d\eta_2}{dx}\right)_0 & \left(\frac{d^2\eta_2}{dx^2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^{n-1}\eta_2}{dx^{n-2}}\right)_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\eta_n)_0 & \left(\frac{d\eta_n}{dx}\right)_0 & \left(\frac{d^2\eta_n}{dx^2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{d^{n-1}\eta_n}{dx^{n-1}}\right)_0 \end{vmatrix}$$

nicht verschwinden darf, die Form an:

$$(18) \quad \begin{vmatrix} \eta_1 & \frac{d\eta_1}{dx} & \frac{d^2\eta_1}{dx^2} & \cdots & \frac{d^{n-1}\eta_1}{dx^{n-1}} \\ \eta_2 & \frac{d\eta_2}{dx} & \frac{d^2\eta_2}{dx^2} & \cdots & \frac{d^{n-1}\eta_2}{dx^{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_n & \frac{d\eta_n}{dx} & \frac{d^2\eta_n}{dx^2} & \cdots & \frac{d^{n-1}\eta_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} = Ce^{-\int A_1 dx}.$$

Fehlt der Differentialgleichung (14) das zweite Glied, ist also $A_1 = 0$, so wird diese Determinantengleichung in

$$(19) \quad \begin{vmatrix} \eta_1 & \frac{d\eta_1}{dx} & \cdots & \frac{d^{n-1}\eta_1}{dx^{n-1}} \\ \eta_2 & \frac{d\eta_2}{dx} & \cdots & \frac{d^{n-1}\eta_2}{dx^{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_n & \frac{d\eta_n}{dx} & \cdots & \frac{d^{n-1}\eta_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} = C$$

übergehen.

Für die lineare Differentialgleichung (14) wird häufig die Form, in welcher das zweite Glied fehlt, als die *Normalform* bezeichnet, und es ist leicht zu sehen,

dass die Substitution

$$y = e^{-\frac{1}{n}\int A_1 dx} z \tag{20}$$

die Differentialgleichung (14) *in eine andere homogene lineare derselben Ordnung von der Normalform*

$$\frac{d^n z}{dx^n} + B_2 \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \cdots + B_{n-1} \frac{dz}{dx} + B_n z = 0 \tag{21}$$

überführt,

da die $n - 1^{\text{te}}$ Ableitung von z nur aus den beiden Ausdrücken

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = e^{-\frac{1}{n}\int A_1 dx} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{-\frac{1}{n}\int A_1 dx} \frac{d^n z}{dx^n} - A_1 e^{-\int A_1 dx} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots$$

hervorgeht, und sich somit beim Einsetzen in (14) die Posten, welche mit $\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$ behaftet sind, wegheben.

4. Wir wollen *die Normalform eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems ebenfalls diejenige nennen, für welche die Determinante* (10) *eines simultanen Fundamentalsystems von Integralen einer Constanten gleich ist;* es folgt somit aus (10),

dass die Normalform eines solchen Systems bestimmt ist durch die Beziehung

$$A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn} = 0. \tag{22}$$

Um zu sehen, durch welche Substitutionen ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem auf seine Normalform reducirt werden kann, setze man

$$y_1 = e^t z_1, \quad y_2 = e^t z_2, \quad \ldots y_n = e^t z_n, \tag{23}$$

dann geht das System (3) in

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = \left(A_{11} - \dfrac{dt}{dx}\right) z_1 + A_{12} z_2 + \cdots + A_{1n} z_n \\ \dfrac{dz_2}{dx} = A_{21} z_1 + \left(A_{22} - \dfrac{dt}{dx}\right) z_2 + \cdots + A_{2n} z_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dz_n}{dx} = A_{n1} z_1 + A_{n2} z_2 + \cdots + \left(A_{nn} - \dfrac{dt}{dx}\right) z_n \end{cases}$$

über, und nimmt also, wenn

$$\left(A_{11} - \frac{dt}{dx}\right) + \left(A_{22} - \frac{dt}{dx}\right) + \cdots + \left(A_{nn} - \frac{dt}{dx}\right) = 0$$

oder

$$t = \frac{1}{n} \int (A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}) dx$$

gesetzt wird, vermöge der Substitutionen

$$(25)\quad y_1 = e^{\frac{1}{n}\int (A_{11} + \cdots + A_{nn}) dx} z_1, \cdots y_n = e^{\frac{1}{n}\int (A_{11} + \cdots + A_{nn}) dx} z_n,$$

die Normalform an:

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = \left(A_{11} - \dfrac{A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}}{n}\right) z_1 + A_{12} z_2 + \cdots + A_{1n} z_n \\ \dfrac{dz_2}{dx} = A_{21} z_1 + \left(A_{22} - \dfrac{A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}}{n}\right) z_2 + \cdots + A_{2n} z_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dz_n}{dx} = A_{n1} z_1 + A_{n2} z_2 + \cdots + \left(A_{nn} - \dfrac{A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}}{n}\right) z_n . \end{cases}$$

5. Nachdem nun die Beziehung der zu einem Punkte x_0 gehörigen allgemeinen Integralsysteme zu n particulären Systemen für *homogene* lineare Differentialgleichungsysteme festgestellt worden, wird es leicht sein, einen ähnlichen Zusammenhang für *nicht homogene* lineare Differentialgleichungsysteme von der Form (1) zu entwickeln. Sei nämlich

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$$

ein particuläres Integralsystem von (1), so wird sich durch Einsetzen desselben und Subtraction der resp. Gleichungen, wenn

$$(27)\quad y_1 - \eta_1 = Y_1,\ y_2 - \eta_2 = Y_2,\ \cdots y_n - \eta_n = Y_n$$

gesetzt wird, ergeben

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{dY_1}{dx} = A_{11} Y_1 + A_{12} Y_2 + \cdots + A_{1n} Y_n \\ \dfrac{dY_2}{dx} = A_{21} Y_1 + A_{22} Y_2 + \cdots + A_{2n} Y_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{dY_n}{dx} = A_{n1} Y_1 + A_{n2} Y_2 + \cdots + A_{nn} Y_n ; \end{cases}$$

seien nun n simultane Fundamentalsysteme dieses linearen *homogenen* Differentialgleichungsystemes (28)

$$\begin{array}{cccc} H_{11} & H_{12} & \ldots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \ldots & H_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{n1} & H_{n2} & \ldots & H_{nn}, \end{array}$$

so werden sich nach dem Früheren die allgemeinen Integralsysteme von (28) in der Form darstellen lassen

$$(29)\quad \begin{cases} Y_1 = c_1 H_{11} + c_2 H_{21} + \cdots + c_n H_{n1} \\ Y_2 = c_1 H_{12} + c_2 H_{22} + \cdots + c_n H_{n2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Y_n = c_1 H_{1n} + c_2 H_{2n} + \cdots + c_n H_{nn}, \end{cases}$$

und sich somit durch Zusammenstellung mit (27), wenn *das System* (3) *das adjungirte System von* (1) genannt wird, der folgende Satz ergeben:

Sind $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ irgend ein Integralsystem eines linearen nicht homogenen Differentialgleichungsystems, und bedeuten Y_1, $Y_2, \ldots Y_n$ das allgemeine Integralsystem des adjungirten homogenen Systemes von Differentialgleichungen, so lassen sich die allgemeinen Integrale des ersten Systems in der Form darstellen

$$y_1 = \eta_1 + Y_1,\ y_2 = \eta_2 + Y_2,\ \cdots y_n = \eta_n + Y_n,$$

worin $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ sich durch n simultane Fundamentalsysteme des adjungirten Differentialgleichungsystems in der Form (29) *ausdrücken lassen.*

Bemerkt man aber zugleich, dass für n particuläre Integralsysteme von (1)

$$\begin{array}{cccc} \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1n} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \cdots & \eta_{nn} \end{array}$$

nach der Gleichung (27)

$$(30) \begin{cases} \eta_{11} - \eta_1 = H_{11}, \ \eta_{12} - \eta_2 = H_{12}, \ \cdots \eta_{1n} - \eta_n = H_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \eta_{n1} - \eta_1 = H_{n1}, \ \eta_{n2} - \eta_2 = H_{n2}, \ \cdots \eta_{nn} - \eta_n = H_{nn} \end{cases}$$

wird, so folgt aus (27), (29) und (30)

$$(31) \begin{cases} y_1 - \eta_1 = c_1(\eta_{11} - \eta_1) + c_2(\eta_{21} - \eta_1) + \cdots + c_n(\eta_{n1} - \eta_1) \\ y_2 - \eta_2 = c_1(\eta_{12} - \eta_2) + c_2(\eta_{22} - \eta_2) + \cdots + c_n(\eta_{n2} - \eta_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n - \eta_n = c_1(\eta_{1n} - \eta_n) + c_2(\eta_{2n} - \eta_n) + \cdots + c_n(\eta_{nn} - \eta_n), \end{cases}$$

woraus folgt,

dass sich die Elemente des allgemeinen Integralsystems eines Systems nicht homogener linearer Differentialgleichungen n^{ter} *Klasse linear durch* $n + 1$ *simultane Fundamentalsysteme ausdrücken lassen.*

6. Um zunächst bei den allgemeinen Eigenschaften der linearen Differentialgleichungsysteme zu bleiben, werde bemerkt, dass nach der durch Gleichung (6) im IV. Abschnitte des ersten Kapitels gegebenen Definition des Multiplicators eines Differentialgleichungsystems derselbe für das System (1) durch die Gleichung bestimmt ist

$$(32) \qquad \frac{dM}{dx} + M(A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}) = 0,$$

und da die Functionen $A_{11}, A_{22}, \ldots A_{nn}$ lediglich von x abhängen, so folgt,

dass für jedes lineare Differentialgleichungsystem ein Multiplicator und zwar in der Form

$$(33) \qquad M = e^{-\int (A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}) dx}$$

bekannt ist,

und daraus wiederum nach dem in dem angeführten Abschnitte bewiesenen Satze,

dass, wenn man für ein lineares Differentialgleichungsystem n^{ter} *Klasse* $n - 1$ *Integralfunctionen kennt, dann die letzte Integralfunction durch Quadraturen gefunden werden kann.*

Endlich ist aber auch früher gezeigt worden, dass die singulären Integralfunctionen die Multiplicatoren des Systemes unendlich gross machen, und es folgt somit, da die rechte Seite von (33) nicht für beliebige Werthe des x unendlich werden kann,

dass lineare Differentialgleichungsysteme singuläre Integrale überhaupt nicht besitzen können,

wie sich schon aus der früheren, unmittelbar an die *Jacobi-Weierstrass*'sche Normalform der Differentialgleichungsysteme geknüpften Betrachtung ergiebt, da die Function $G(x, y_1, y_2, \ldots y_n, t)$ im Falle der linearen Differentialgleichungsysteme nur von x und t abhängig ist.

7. Wir können nun die Untersuchung der linearen Differentialgleichungen dadurch vereinfachen, dass wir zeigen, dass die Aufsuchung der Integralsysteme *nicht homogener* linearer Differentialgleichungsysteme (1) stets auf die Ermittlung derjenigen für das adjungirte homogene lineare Differentialgleichungsystem zurückgeführt werden kann. Sei nämlich

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$$

ein particulares Integralsystem des adjungirten Differentialgleichungsystems (3), so werden die Substitutionen

$$(34) \qquad y_1 = \eta_1 z_1, \; y_2 = \eta_2 z_2, \; \cdots y_n = \eta_n z_n$$

die Differentialgleichungen (1) in

$$z_1 \frac{d\eta_1}{dx} + \eta_1 \frac{dz_1}{dx} = A_{11} \eta_1 z_1 + A_{12} \eta_2 z_2 + \cdots + A_{1n} \eta_n z_n + A_{1n+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_n \frac{d\eta_n}{dx} + \eta_n \frac{dz_n}{dx} = A_{n1} \eta_1 z_1 + A_{n2} \eta_2 z_2 + \cdots + A_{nn} \eta_n z_n + A_{nn+1}$$

oder mit Berücksichtigung der für $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ geltenden Differentialgleichungen (3) in

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = A_{12}\dfrac{\eta_2}{\eta_1}(z_2 - z_1) + A_{13}\dfrac{\eta_3}{\eta_1}(z_3 - z_1) + \cdots \\ \qquad\qquad + A_{1n}\dfrac{\eta_n}{\eta_1}(z_n - z_1) + A_{1n+1}\dfrac{1}{\eta_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dz_n}{dx} = A_{n1}\dfrac{\eta_1}{\eta_n}(z_1 - z_n) + A_{n2}\dfrac{\eta_2}{\eta_n}(z_2 - z_n) + \cdots \\ \qquad\qquad + A_{nn-1}\dfrac{\eta_{n-1}}{\eta_n}(z_{n-1} - z_n) + A_{nn+1}\dfrac{1}{\eta_n} \end{cases}$$

überführen und somit, wenn die erste dieser Gleichungen einzeln von den $n-1$ folgenden abgezogen,

$$(36)\quad z_2 - z_1 = u_1, \quad z_3 - z_1 = u_2, \cdots z_n - z_1 = u_{n-1}$$

gesetzt, und berücksichtigt wird, dass

$$z_\lambda - z_\mu = u_{\lambda-1} - u_{\mu-1}$$

ist, das nachfolgende lineare Differentialgleichungsystem liefern:

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = B_{11}u_1 + B_{12}u_2 + \cdots + B_{1n-1}u_{n-1} + B_{1n} \\ \dfrac{du_2}{dx} = B_{21}u_1 + B_{22}u_2 + \cdots + B_{2n-1}u_{n-1} + B_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{du_{n-1}}{dx} = B_{n-11}u_1 + B_{n-12}u_2 + \cdots + B_{n-1\,n-1}u_{n-1} + B_{n-1n}, \end{cases}$$

also ein Differentialgleichungsystem $n-1^{\text{ter}}$ Klasse, in welchem, wie unmittelbar zu sehen, die $B_{1n}, B_{2n}, \dots B_{n-1n}$ homogene lineare Functionen der Grössen $A_{1n+1}, A_{2n+1}, \dots A_{nn+1}$ sind, also Null werden, wenn die letzteren Grössen verschwinden, d. h. das ursprüngliche System selbst ein homogenes lineares war. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die Kenntniss eines particulären Integralsystems eines homogenen linearen Differentialgleichungsystems n^{ter} Klasse ermöglicht sowohl die Zurückführung dieses auf ein homogenes lineares System $n-1^{\text{ter}}$ Klasse, als auch die Zurückführung derjenigen nicht homogenen linearen Differentialgleichungsysteme

auf solche von einer um eine Einheit niedrigeren Klasse, von welchen das erstere System das adjungirte ist.

Man sieht zugleich, dass, *wenn man ein Integralsystem von* (37) *gefunden hat,* aus der ersten der Gleichungen (35), die in die Form gebracht werden kann

$$(38)\quad \frac{dz_1}{dx} = A_{12}\frac{\eta_2}{\eta_1}u_1 + A_{13}\frac{\eta_3}{\eta_1}u_2 + \cdots + A_{1n}\frac{\eta_n}{\eta_1}u_{n-1} + A_{1n+1}\frac{1}{\eta_1},$$

und den entsprechenden folgenden Gleichungen $z_1, z_2, \ldots z_n$, also nach den Gleichungen (34) *auch* $y_1, y_2, \ldots y_n$ *durch Quadraturen hergeleitet werden können.*

Aber dieser Satz lässt sich noch verallgemeinern; seien nämlich zwei particuläre Integralsysteme von (3) bekannt, so kann man zunächst vermöge eines derselben das System (1) sowie das System (3), wie eben gezeigt worden, auf zwei andere lineare Differentialgleichungsysteme $n-1^{\text{ter}}$ Klasse reduciren, und man sieht unmittelbar, dass diese beiden Systeme sich nur durch die von den abhängigen Variabeln freien Glieder von einander unterscheiden, also wieder zu einander adjungirt die Form (37) und die dazugehörige

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = B_{11}u_1 + B_{12}u_2 + \cdots + B_{1n-1}u_{n-1} \\ \dfrac{du_2}{dx} = B_{21}u_1 + B_{22}u_2 + \cdots + B_{2n-1}u_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{du_{n-1}}{dx} = B_{n-11}u_1 + B_{n-12}u_2 + \cdots + B_{n-1\,n-1}u_{n-1} \end{cases}$$

haben werden.

Sei nun das zweite gegebene particuläre Integralsystem von (3)

$$\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots \bar{\eta}_n,$$

so werden den Gleichungen (34) gemäss die aus

$$(40)\qquad \bar{\eta}_1 = \eta_1\zeta_1,\ \bar{\eta}_2 = \eta_2\zeta_2,\ \ldots\ \bar{\eta}_n = \eta_n\zeta_n$$

sich ergebenden Werthe von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ ein particuläres Integralsystem des adjungirten Systemes von (35) liefern, und es wird sonach mit Hülfe der Substitutionen (36) ein parti-

culäres Integralsystem der Differentialgleichungsystems $n-1^{ter}$ Klasse (39) bekannt sein. Kennt man aber ein solches, so kann man nach dem obigen Satze die Anzahl der Differentialgleichungen der Systeme (37) und (39) wiederum um eine Einheit erniedrigen, u. s. w., so dass sich hieraus der folgende Satz ergiebt:

Kennt man von einem homogenen linearen Differentialgleichungsysteme n^{ter} Klasse m particuläre Integralsysteme, so kann man mit Hülfe derselben dieses Differentialgleichungsystem sowie jedes andere nicht homogene lineare, von welchem das erstere das adjungirte ist, in ein anderes lineares Differentialgleichungsystem $n-m^{ter}$ Klasse überführen, und zugleich erhält man zu jedem Integralsystem des transformirten Differentialgleichungsystems ein Integralsystem des ursprünglichen durch Quadraturen.

Da nach diesem Satze die Kenntniss von n simultanen Fundamentalsystemen des adjungirten Systemes die Integration des nicht homogenen linearen Differentialgleichungsystems auf Quadraturen zurückzuführen gestattet, so ergiebt sich der Satz,

dass die Integration eines nicht homogenen linearen Differentialgleichungsystems stets auf die Integration des adjungirten Systems und auf Quadraturen zurückführbar ist.

8. Wir wollen jedoch eben diesen Satz noch in anderer Weise durchführen, um bei dieser Gelegenheit eine für die Behandlung von Integrationsproblemen von Differentialgleichungen wichtige Methode auseinanderzusetzen, die unter dem Namen der *Variation der Constanten* bekannt ist.

Seien

$$\begin{matrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \cdots & \eta_{nn} \end{matrix}$$

n simultane Fundamentalsysteme von Integralen des Differentialgleichungsystemes (3), so dass dessen allgemeines Integralsystem in der Form darstellbar ist

$$(41) \qquad \begin{cases} y_1 = c_1 \eta_{11} + c_2 \eta_{21} + \cdots + c_n \eta_{n1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n = c_1 \eta_{1n} + c_2 \eta_{2n} + \cdots + c_n \eta_{nn}, \end{cases}$$

worin $c_1, c_2, \ldots c_n$ willkürliche Constanten bedeuten, so wird behauptet,

dass man die Grössen $c_1, c_2, \ldots c_n$ *durch Quadraturen so als Functionen von* x *bestimmen kann, dass dieselben Formen* (41) *mit Beibehaltung der Werthe von* $\eta_{11}, \ldots \eta_{nn}$ *die allgemeinen Integralausdrücke eines jeden nicht homogenen linearen Differentialgleichungssystemes* (1) *sind, von welchem* (3) *das adjungirte ist.*

Bildet man nämlich unter der Voraussetzung, dass $c_1, \ldots c_n$ zu bestimmende Functionen von x sind, aus (41) die Beziehungen

$$(42)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = c_1\dfrac{d\eta_{11}}{dx} + c_2\dfrac{d\eta_{21}}{dx} + \cdots + c_n\dfrac{d\eta_{n1}}{dx} + \eta_{11}\dfrac{dc_1}{dx} \\ \qquad\qquad + \eta_{21}\dfrac{dc_2}{dx} + \cdots + \eta_{n1}\dfrac{dc_n}{dx} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = c_1\dfrac{d\eta_{1n}}{dx} + c_2\dfrac{d\eta_{2n}}{dx} + \cdots + c_n\dfrac{d\eta_{nn}}{dx} + \eta_{1n}\dfrac{dc_1}{dx} \\ \qquad\qquad + \eta_{2n}\dfrac{dc_2}{dx} + \cdots + \eta_{nn}\dfrac{dc_n}{dx}, \end{cases}$$

so gehen dieselben, wenn die Functionen $c_1, c_2, \ldots c_n$ den folgenden Bedingungen gemäss bestimmt werden,

$$(43)\quad \begin{cases} \eta_{11}\dfrac{dc_1}{dx} + \eta_{21}\dfrac{dc_2}{dx} + \cdots + \eta_{n1}\dfrac{dc_n}{dx} = A_{1n+1} \\ \eta_{12}\dfrac{dc_1}{dx} + \eta_{22}\dfrac{dc_2}{dx} + \cdots + \eta_{n2}\dfrac{dc_n}{dx} = A_{2n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_{1n}\dfrac{dc_1}{dx} + \eta_{2n}\dfrac{dc_2}{dx} + \cdots + \eta_{nn}\dfrac{dc_n}{dx} = A_{nn+1} \end{cases}$$

in die Gleichungen

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = c_1\dfrac{d\eta_{11}}{dx} + c_2\dfrac{d\eta_{21}}{dx} + \cdots + c_n\dfrac{d\eta_{n1}}{dx} + A_{1n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = c_1\dfrac{d\eta_{1n}}{dx} + c_2\dfrac{d\eta_{2n}}{dx} + \cdots + c_n\dfrac{d\eta_{nn}}{dx} + A_{nn+1} \end{cases}$$

über; berücksichtigt man aber, dass die $\eta_{\alpha\beta}$ particuläre Integralsysteme von (3) sind, so nimmt z. B. die erste Gleichung die Form an

$$\frac{dy_1}{dx} = c_1(A_{11}\eta_{11} + A_{12}\eta_{12} + \cdots + A_{1n}\eta_{1n})$$
$$+ c_2(A_{11}\eta_{21} + A_{12}\eta_{22} + \cdots + A_{1n}\eta_{2n}) + \cdots$$
$$\cdots + c_n(A_{11}\eta_{n1} + A_{12}\eta_{n2} + \cdots + A_{1n}\eta_{nn}) + A_{1n+1}$$

oder vermöge (41)

$$\frac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n + A_{1n+1},$$

und ähnlich die anderen Gleichungen,

so dass die in (41) *aufgestellten Integralformen, in welchen* $c_1, \ldots c_n$ *so als Functionen von* x *zu bestimmen sind, dass sie den Gleichungen* (43) *genügen, zugleich Integralsysteme der Differentialgleichungen* (1) *liefern.*

Endlich ist einerseits leicht zu sehen, dass sich aus den Gleichungen (43), in denen die η und A bekannte Functionen von x sind, die Grössen $\frac{dc_1}{dx}, \cdots \frac{dc_n}{dx}$ als Lösungen linearer Gleichungen in der Form bestimmen

$$(45) \qquad \frac{dc_1}{dx} = F_1(x), \quad \frac{dc_2}{dx} = F_2(x), \cdots \frac{dc_n}{dx} = F_n(x),$$

und zwar in eindeutiger Weise, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & \cdots & \eta_{n1} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{1n} & \eta_{2n} & \cdots & \eta_{nn} \end{vmatrix}$$

der Voraussetzung simultaner Fundamentalsysteme wegen nicht für $x = x_0$, also gewiss nicht für jedes x verschwinden kann, und dass sich somit $c_1, c_2, \ldots c_n$ durch Quadraturen in der Form ergeben

$$(46) \quad c_1 = \int F_1(x)\,dx + k_1, \; c_2 = \int F_2(x)\,dx + k_2, \cdots$$
$$c_n = \int F_n(x)\,dx + k_n;$$

andererseits folgt, dass die vermöge (41) in der Form

$$(47)\begin{cases} y_1 = \eta_{11}\int F_1(x)dx + \eta_{21}\int F_2(x)dx + \cdots \\ \quad + \eta_{n1}\int F_n(x)dx + k_1\eta_{11} + k_2\eta_{21} + \cdots + k\ \eta_{n1} \\ y_2 = \eta_{12}\int F_1(x)dx + \eta_{22}\int F_2(x)dx + \cdots \\ \quad + \eta_{n2}\int F_n(x)dx + k_1\eta_{12} + k_2\eta_{22} + \cdots + k_n\eta_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \eta_{1n}\int F_1(x)dx + \eta_{2n}\int F_2(x)dx + \cdots \\ \quad + \eta_{nn}\int F_n(x)dx + k_1\eta_{1n} + k_2\eta_{2n} + \cdots + k_n\eta_{nn} \end{cases}$$

darstellbaren Integrale des Differentialgleichungsystemes (1) vermöge der n willkürlichen Constanten $k_1, k_2, \ldots k_n$ die allgemeinen Integralsysteme darstellen.

Es sind somit die Fragen der Integration linearer Differentialgleichungsysteme überhaupt zurückgeführt auf die analogen Fragen für *homogene* lineare Systeme.

9. Wir wollen nun die eben erwiesenen Sätze auf die speciellen Differentialgleichungsysteme übertragen, welche *einer* linearen Differentialgleichung höherer Ordnung von der Form

$$(48)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y = A_{n+1},$$

in welcher $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ Functionen von x bedeuten, äquivalent sind. Da dieses System, wenn

$$(49)\qquad y = y_1,\ \frac{dy}{dx} = y_2,\ \frac{d^2y}{dx^2} = y_3, \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_n$$

gesetzt wird, in

$$(50)\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \cdots\cdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \\ \frac{dy_n}{dx} = -A_n y_1 - A_{n-1}y_2 - \cdots - A_1 y_n + A_{n+1} \end{cases}$$

übergeht, so wird, wenn *die Differentialgleichung*

$$(51)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

die zu (48) *adjungirte* genannt wird, aus dem Vorhergehenden sich ergeben,

dass die Kenntniss von m particulären Integralen der Differentialgleichung (51) *die Reduction der Differentialgleichung* (48) *auf eine lineare Differentialgleichung* $n - m^{ter}$ *Ordnung gestattet.*

Setzt man, wenn y_1 ein particuläres Integral der Differentialgleichung (51) bedeutet, der Substitution (34) gemäss, worin y_1 durch y, η_1 durch y_1 zu ersetzen ist,

$$(52)\qquad y = y_1 z,$$

so wird sich, weil

$$(53)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy_1}{dx} z + y_1 \dfrac{dz}{dx} \\ \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} z + 2 \dfrac{dy_1}{dx} \dfrac{dz}{dx} + y_1 \dfrac{d^2 z}{dx^2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{d^n y_1}{dx^n} z + \dfrac{n}{1} \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \dfrac{dz}{dx} + \dfrac{n(n-1)}{1\,.\,2} \dfrac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} \dfrac{d^2 z}{dx^2} + \cdots + y_1 \dfrac{d^n z}{dx^n} \end{cases}$$

ist, durch Einsetzen in (48) oder (51) mit Berücksichtigung der identischen Gleichung

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + A_n y_1 = 0$$

die lineare Differentialgleichung

$$(54)\quad \frac{d^n z}{dx^n} + B_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots + B_{n-1} \frac{dz}{dx} = A_{n+1} \text{ oder } = 0$$

ergeben, welche, wenn

$$(55)\qquad \frac{dz}{dx} = u \quad \text{oder} \quad z = \int u\,dx$$

gesetzt wird, in

$$(56)\qquad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + B_1 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + B_{n-1}u = A_{n+1} \text{ oder } = 0$$

übergeht, so dass durch Zusammensetzung von (52) und (55) *die Substitution*

$$(57)\qquad y = y_1 \int u\,dx$$

die Differentialgleichungen (48) *und* (51) *in andere gleichartige verwandelt, deren Ordnung um eine Einheit kleiner ist.*

Ist ein Integral u_1 der Differentialgleichung

$$(58)\qquad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + B_1 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + B_{n-1}u = 0$$

bekannt, so folgt daraus einerseits, dass

$$(59)\qquad y_2 = y_1 \int u_1 dx$$

ein particuläres Integral der Differentialgleichung (51) ist, andererseits dass wiederum die Substitution

$$(60)\qquad u = u_1 \int v\,dx$$

die Differentialgleichung (58) auf eine gleichartige $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(61)\qquad \frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + C_1 \frac{d^{n-3}v}{dx^{n-3}} + \cdots + C_{n-2}v = 0$$

reducirt; die Kenntniss eines particulären Integrales v_1 dieser Differentialgleichung liefert einerseits wieder durch die Substitution

$$(62)\qquad v = v_1 \int w\,dx$$

eine weitere Reduction der Ordnung der Differentialgleichung, andererseits für die Differentialgleichung (58) ein zweites particuläres Integral

$$(63)\qquad u_2 = u_1 \int v_1 dx,$$

und für die ursprüngliche Differentialgleichung (51) ein drittes particuläres Integral in der Form

$$(64)\qquad y_3 = y_1 \int dx\, u_1 \int v_1 dx;$$

ähnlich ergiebt sich ein viertes particuläres Integral von (51)

$$(65) \qquad y_4 = y_1 \int dx\, u_1 \int dx\, v_1 \int w_1\, dx$$

u. s. w., so dass also ein System von particulären Integralen der Differentialgleichung (51) in den Formen

$$(a) \; y_1, y_1 \int u_1 dx, \; y_1 \int dx\, u_1 \int v_1 dx, \; y_1 \int dx\, u_1 \int dx\, v_1 \int w_1 dx, \ldots$$

dargestellt werden kann.

Wir behaupten nun, *dass n auf diese Weise hergeleitete Integrale ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung* (51) *bilden.*

Da nämlich nach der in diesem Abschnitte gegebenen Definition eines Fundamentalsystems von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung den Gleichungen (13) gemäss nur nachgewiesen zu werden braucht, dass zwischen solchen n particulären Integralen keine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten bestehen kann, so nehme man an, es bestünde eine solche Relation, z. B. von der Form

$$(66) \qquad c_1 y_1 + c_2 y_1 \int u_1 dx + c_3 y_1 \int dx\, u_1 \int v_1 dx$$
$$+ c_4 y_1 \int dx\, u_1 \int dx\, v_1 \int w_1 dx = 0,$$

dann ergiebt sich durch successive Differentiation, nachdem zuerst durch y_1, sodann durch u_1, dann durch v_1, u. s. w. dividirt worden, der Reihe nach

$$(67) \qquad c_2 u_1 + c_3 u_1 \int v_1 dx + c_4 u_1 \int dx\, v_1 \int w_1 dx = 0$$

$$(68) \qquad c_3 v_1 + c_4 v_1 \int w_1 dx = 0$$

$$(69) \qquad c_4 w_1 = 0,$$

wonach c_4, also nach (68) auch c_3, ebenso c_2 und c_1 verschwinden müssten, was mit der Annahme (66) nicht verträglich ist.

Wir fügen noch hinzu, dass die Determinante des *auf diese Weise* gebildeten Fundamentalsystems

$$(70)\qquad D = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ u_1 & u_1' & u_1'' & \ldots & u_1^{(n-1)} \\ v_1 & v_1' & v_1'' & \ldots & v_1^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1 & t_1' & t_1'' & \ldots & t_1^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

sich in eine sehr einfache Form bringen lässt. Da nämlich, wie aus (53) unmittelbar zu ersehen,

$$(71)\qquad B_1 = \frac{n}{y_1}\frac{dy_1}{dx} + A_1$$

ist, und nach Gleichung (18)

$$(72)\qquad D = ce^{-\int A_1 dx},$$

also die analoge Determinante für die Differentialgleichung (58)

$$(73)\qquad D_1 = c_1 e^{-\int B_1 dx}$$

ist, so folgt aus (71), (72), (73)

$$(74)\qquad D_1 = \frac{c_1}{c} y_1^{-n} \,.\, D;$$

bezeichnen D_2 und c_2 die analogen Grössen für die Differentialgleichung (61), so folgt

$$(75)\qquad D_2 = \frac{c_2}{c_1} u_1^{-(n-1)} D_1 = \frac{c_2}{c} y_1^{-n} u_1^{-(n-1)} D,$$

u. s. w.; beachtet man endlich, dass die letzte homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung lautet

$$(76)\qquad \frac{dt}{dx} + G_1 t = 0,$$

und die dazugehörige Determinante das particuläre Integral t_1 selbst ist, so folgt

$$t_1 = k y_1^{-n} u_1^{-(n-1)} v_1^{-(n-2)} \ldots D$$

oder *für die Determinante* (70) *des angegebenen Fundamentalsystems*

$$(77)\qquad D = k y_1^{n} u_1^{n-1} v_1^{n-2} w_1^{n-3} \ldots t_1^{1},$$

worin k eine Constante bedeutet.

II. Ueber die symmetrischen Functionen simultaner Fundamentalsysteme von Integralen linearer Differentialgleichungen.

1. Um zunächst die Beziehungen zwischen den Coefficienten eines homogenen linearen Differentialgleichungsystems

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2n}y_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \cdots + A_{nn}y_n \end{cases}$$

zu einem simultanen Fundamentalsysteme von Integralen

$$(2)\quad \begin{cases} y_{11}\; y_{12}\; \cdots\; y_{1n} \\ y_{21}\; y_{22}\; \cdots\; y_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_{n1}\; y_{n2}\; \cdots\; y_{nn} \end{cases}$$

festzustellen, wollen wir in die λ^{te} Differentialgleichung des Systems (1)

$$(3)\quad y_\lambda' = A_{\lambda 1}y_1 + A_{\lambda 2}y_2 + \cdots + A_{\lambda n}y_n$$

der Reihe nach die n Fundamentalsysteme von Integralen (2) einsetzen, so dass

$$(4)\quad \begin{cases} y_{1\lambda}' = A_{\lambda 1}y_{11} + A_{\lambda 2}y_{12} + \cdots + A_{\lambda n}y_{1n} \\ y_{2\lambda}' = A_{\lambda 1}y_{21} + A_{\lambda 2}y_{22} + \cdots + A_{\lambda n}y_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_{n\lambda}' = A_{\lambda 1}y_{n1} + A_{\lambda 2}y_{n2} + \cdots + A_{\lambda n}y_{nn} \end{cases}$$

wird, dann folgen *für die Coefficienten die Ausdrücke*

$$(5)\quad A_{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} y_{11}\; y_{12} \cdots y_{1\mu-1}\; y_{1\lambda}'\; y_{1\mu+1} \cdots y_{1n} \\ y_{21}\; y_{22} \cdots y_{2\mu-1}\; y_{2\lambda}'\; y_{2\mu+1} \cdots y_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_{n1}\; y_{n2} \cdots y_{n\mu-1}\; y_{n\lambda}'\; y_{n\mu+1} \cdots y_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_{11}\; y_{12} \cdots y_{1n} \\ y_{21}\; y_{22} \cdots y_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_{n1}\; y_{n2} \cdots y_{nn} \end{vmatrix},$$

welche somit für eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(6)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0,$$

da

$$y_2 = y_1', \; y_3 = y_1'', \; \ldots y_n = y_1^{(n-1)}, \; A_{n\,n-r+1} = - A_r$$

ist, in

$$(7)\quad A_r = (-1)^r \begin{vmatrix} y_1 \, y_1' \cdots y_1^{(n-r-1)} \, y_1^{(n-r+1)} \cdots y_1^{(n)} \\ y_2 \, y_2' \cdots y_2^{(n-r-1)} \, y_2^{(n-r+1)} \cdots y_2^{(n)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n \, y_n' \cdots y_n^{(n-r-1)} \, y_n^{(n-r+1)} \cdots y_n^{(n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1 \, y_1' \cdots y_1^{(n-1)} \\ y_2 \, y_2' \cdots y_2^{(n-1)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n \, y_n' \cdots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

übergeht.

2. *Wir wollen eine symmetrische Function der Elemente eines simultanen Fundamentalsystems von Integralen*

$$(8)\qquad \begin{cases} y_{11} \; y_{12} \; \cdots \; y_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n1} \; y_{n2} \; \cdots \; y_{nn} \end{cases}$$

jede rationale Function aller dieser Grössen und deren Ableitungen nennen, welche die Eigenschaft besitzt, dass, wenn man das Fundamentalsystem (8) *durch ein anderes Fundamentalsystem*

$$(9)\qquad \begin{cases} z_{11} \; z_{12} \; \cdots \; z_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_{n1} \; z_{n2} \; \cdots \; z_{nn} \end{cases}$$

ersetzt, diese Function bis auf einen constanten Factor unverändert bleibt.

Es ist aus der Herleitung der Beziehung (5) ersichtlich, dass die rechte Seite dieser Gleichung dieselbe bleiben muss, wenn statt des Systemes (2) ein anderes Fundamentalsystem gewählt würde, dass somit

die Coefficienten des Differentialgleichungsystems (1) *symmetrische Functionen der Elemente eines simultanen Fundamentalsystems von Integralen sind.*

Betrachten wir — was bekanntlich ohne Einschränkung geschehen darf — nur ganze symmetrische Functionen, so darf offenbar für dieselben angenommen werden, dass sich die Ableitungen sämmtlicher Grössen

$$y_{1\alpha}, \; y_{2\alpha}, \; \ldots y_{n\alpha}$$

bis zu derselben p_α^{ten} Ordnung erheben, da der Definition der symmetrischen Functionen gemäss eine Vertauschung zweier Horizontalreihen von (8) ein der Ordnung nach anderes simultanes Fundamentalsystem von Integralen liefert, aber der Werth der Function sich nur um eine multiplicatorische Constante ändern soll, und wir dürfen somit die ganze symmetrische Function kurz mit

$$\text{(a)}\quad F\left(y_{\varrho 1}, y'_{\varrho 1}, \dots y_{\varrho 1}^{(p_1)}, y_{\varrho 2}, y'_{\varrho 2}, \dots y_{\varrho 2}^{(p_2)}, \dots y_{\varrho n}, y'_{\varrho n}, \dots y_{\varrho n}^{(p_n)}\right)$$

bezeichnen.

Da das System (9) ebenfalls ein simultanes Fundamentalsystem sein sollte, so muss nach I.

$$(10)\quad \begin{cases} y_{\varrho 1} = c_{\varrho 1} z_{11} + c_{\varrho 2} z_{21} + \cdots + c_{\varrho n} z_{n1} \\ y_{\varrho 2} = c_{\varrho 1} z_{12} + c_{\varrho 2} z_{22} + \cdots + c_{\varrho n} z_{n2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{\varrho n} = c_{\varrho 1} z_{1n} + c_{\varrho 2} z_{2n} + \cdots + c_{\varrho n} z_{nn} \end{cases}$$

sein, worin die Determinante

$$(11)\quad D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, und es wird der Definition der symmetrischen Functionen zufolge die Beziehung

$$(12)\quad F\left(y_{\varrho 1}, \dots y_{\varrho 1}^{(p_1)}, y_{\varrho 2}, \dots y_{\varrho 2}^{(p_2)}, \dots y_{\varrho n}, \dots y_{\varrho n}^{(p_n)}\right)$$
$$= H \cdot F\left(z_{\varrho 1}, \dots z_{\varrho 1}^{(p_1)}, z_{\varrho 2}, \dots z_{\varrho 2}^{(p_2)}, \dots z_{\varrho n}, \dots z_{\varrho n}^{(p_n)}\right)$$

bestehen müssen, worin H eine Constante ist, welche von $c_{11}, \dots c_{nn}$ abhängt. Wäre es nun möglich, die Grössen $c_{11}, \dots c_{nn}$ derart zu bestimmen, dass $H = 0$ wird, so würde auch die linke Seite von (12), also die vorgelegte Function gegen die Annahme verschwinden, es dürfen daher die Werthesysteme der c, welche der Gleichung

$$(13)\quad H = 0$$

genügen, nicht mit der Bedingung in Einklang zu bringen

sein, dass das System (9) ebenfalls ein simultanes Fundamentalsystem ist, d. h. sie müssen die Determinante D (11) zu Null machen, und andere Werthesysteme der c, welche der Gleichung (13) genügen, dürften nicht existiren; daraus folgt aber, dass

$$H = k \cdot D^m \tag{14}$$

ist, worin m eine ganze positive Zahl, und k eine von den $c_{11}, \ldots c_{nn}$ unabhängige Constante bedeutet. Da aber für

$$z_{11} = y_{11}, \; z_{12} = y_{12}, \ldots z_{nn} = y_{nn}$$

$H = 1$, ausserdem wegen

$$c_{\varrho\varrho} = 1, \quad c_{\varrho\sigma} = 0$$

auch $D = 1$ wird, so folgt, dass die von den c unabhängige Constante k den Werth 1 hat, und somit nach (14)

$$H = D^m \tag{15}$$

wird, und die Gleichung (12) in

$$F\left(y_{\varrho 1}, \ldots y_{\varrho 1}^{(p_1)}, y_{\varrho 2}, \ldots y_{\varrho 2}^{(p_2)}, \ldots y_{\varrho n}, \ldots y_{\varrho n}^{(p_n)}\right) \tag{16}$$
$$= D^m F\left(z_{\varrho 1}, \ldots z_{\varrho 1}^{(p_1)}, z_{\varrho 2}, \ldots z_{\varrho 2}^{(p_2)}, \ldots z_{\varrho n}, \ldots z_{\varrho n}^{(p_n)}\right)$$

übergeht.

Zunächst ist klar, dass die Function F eine homogene Function m^{ten} Grades in Bezug auf die Elemente

$$y_{\varrho 1}, y_{\varrho 2}, \ldots y_{\varrho n}$$

und deren Ableitungen sein muss; denn setzt man in (10) für dieses bestimmte ϱ

$$c_{\varrho\varrho} = \lambda, \quad c_{\sigma\sigma} = 1, \quad c_{\varrho\sigma} = 0, \quad c_{\tau\sigma} = 0, \tag{17}$$

so geht die Determinante (11) in

$$D = \lambda \tag{18}$$

über, während (16) die Beziehung liefert

$$F\left(\lambda z_{\varrho 1}, \ldots \lambda z_{\varrho 1}^{(p_1)}, \lambda z_{\varrho 2}, \ldots \lambda z_{\varrho 2}^{(p_2)}, \ldots \lambda z_{\varrho n}, \ldots \lambda z_{\varrho n}^{(p_n)}\right) \tag{19}$$
$$= \lambda^m F\left(z_{\varrho 1}, \ldots z_{\varrho 1}^{(p_1)}, z_{\varrho 2}, \ldots z_{\varrho 2}^{(p_2)}, \ldots z_{\varrho n}, \ldots z_{\varrho n}^{(p_n)}\right),$$

worin diejenigen z, deren erster Index von ϱ verschieden ist,

rechts und links die Einheit zum Factor haben, es ist somit die Homogeneität nachgewiesen.

Sind nun $p_1, p_2, \ldots p_n$ entweder alle oder zum Theil gleich oder grösser als die Einheit, so kann man aus dem Differentialgleichungsystem (1) die ersten, und daraus wieder die höheren Ableitungen als homogene lineare Functionen der Integrale selbst ausdrücken mit Coefficienten, welche ganze Functionen der $A_{\alpha\beta}$ und deren Ableitungen sind, und wenn man diese Ausdrücke in die Function (a) einsetzt, so *wird diese in eine ganze Function der Form*

$$\text{(b)} \quad \Phi(y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \ldots y_{2n}, \ldots y_{n1}, y_{n2}, \ldots y_{nn})$$

übergehen, in welcher ganze positive Potenzen der $A_{\alpha\beta}$ und deren Ableitungen enthalten sind, und die nach bekannten Determinanteneigenschaften für lineare Substitutionen offenbar wieder eine im oben angegebenen Sinne symmetrische sein wird, also der Bedingung genügen wird

$$\text{(20)} \qquad \Phi(y_{11}, \ldots y_{1n}, y_{21}, \ldots y_{2n}, \ldots y_{n1}, \ldots y_{nn})$$
$$= D^m \Phi(z_{11}, \ldots z_{1n}, z_{21}, \ldots z_{2n}, \ldots z_{n1}, \ldots z_{nn}).$$

Es könnten hierbei nun zwei Fälle eintreten; entweder kommen in (b) von dem Integralsysteme $y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1n}$ nicht alle Elemente vor, und dann dürfen nach der oben gemachten Bemerkung auch von den andern Integralen des Fundamentalsystems die entsprechenden Elemente nicht vorkommen, oder es sind alle Elemente des Fundamentalsystems in (b) enthalten. Im ersteren Falle wird die Gleichung (20) die Form annehmen

$$\text{(21)} \quad \Phi(y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1n-\delta}, y_{21}, y_{22}, \ldots y_{2n-\delta}, \ldots y_{n1}, y_{n2}, \ldots y_{nn-\delta})$$
$$= D^m \Phi(z_{11}, \ldots z_{1n}, z_{21}, \ldots z_{2n}, \ldots z_{n1}, \ldots z_{nn});$$

fixiren wir nun irgend einen Werth ξ von x, und setzen für das Integralsystem (9) im Punkte ξ die bestimmten aber willkürlichen Werthe

$$\text{(22)} \qquad \begin{cases} \zeta_{11}, \zeta_{12}, \ldots \zeta_{1n} \\ \zeta_{21}, \zeta_{22}, \ldots \zeta_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \zeta_{n1}, \zeta_{n2}, \ldots \zeta_{nn} \end{cases}$$

fest, so kann man offenbar die Werthe $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{1n}$ so bestimmen, dass den $n-\delta$ Gleichungen Genüge geschieht:

$$(23)\quad \begin{cases} c_{11}\zeta_{11} + c_{12}\zeta_{21} + \cdots + c_{1n}\zeta_{n1} = 0 \\ c_{11}\zeta_{12} + c_{12}\zeta_{22} + \cdots + c_{1n}\zeta_{n2} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{11}\zeta_{1\,n-\delta} + c_{12}\zeta_{2\,n-\delta} + \cdots + c_{1n}\zeta_{n\,n-\delta} = 0, \end{cases}$$

während man die übrigen $c_{\alpha\beta}$ des Systemes (11) so bestimmt, dass D von Null verschieden ist. Bezeichnet man nun die dem $x = \xi$ entsprechenden Werthe des Fundamentalsystems (8) mit

$$(24)\quad \begin{cases} \eta_{11}, \eta_{12}, \ldots \eta_{1n} \\ \eta_{21}, \eta_{22}, \ldots \eta_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \eta_{n1}, \eta_{n2}, \ldots \eta_{nn}, \end{cases}$$

so wird nach (23) und (10)

$$\eta_{11} = \eta_{12} = \cdots = \eta_{1\,n-\delta} = 0$$

sein, und es liefert somit die Gleichung (21) vermöge (10) die Beziehung

$$(25)\quad \begin{aligned} &\Phi(0, 0, \ldots 0, \eta_{21}, \eta_{22}, \ldots \eta_{2\,n-\delta}, \ldots \eta_{n1}, \eta_{n2}, \ldots \eta_{n\,n-\delta}) \\ &= D^m \Phi(\zeta_{11}, \ldots \zeta_{1n}, \zeta_{21}, \ldots \zeta_{2n}, \ldots \zeta_{n1}, \ldots \zeta_{nn}). \end{aligned}$$

Da aber wegen der durch die Gleichung (19) ausgesprochenen Homogeneität die linke Seite von (25) verschwindet, so wird es auch die rechte, und da D von Null verschieden war, so wird

$$(26)\quad \Phi(\zeta_{11}, \ldots \zeta_{1n}, \zeta_{21}, \ldots \zeta_{2n}, \ldots \zeta_{n1}, \ldots \zeta_{nn}) = 0,$$

und somit, da die Werthe (22) beliebige zu $x = \xi$ zugeordnete Anfangswerthe der Integrale waren, auch

$$\Phi(z_{11}, \ldots z_{1n}, z_{21}, \ldots z_{2n}, \ldots z_{n1}, \ldots z_{nn}) = 0,$$

und nach (21) die für diesen Fall vorgelegte symmetrische Function

$$\Phi(y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1\,n-\delta}, y_{21}, y_{22}, \ldots y_{2\,n-\delta}, \ldots y_{n1}, y_{n2}, \ldots y_{n\,n-\delta})$$

identisch verschwinden, eine solche also gar nicht existiren.

Wenn jedoch in (b) alle Integralelemente der simultanen Fundamentalsysteme vorkommen, so wird, wenn

$$(27)\quad \Delta = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird, vermöge der Substitutionen (10) bekanntlich

$$(28)\qquad \Delta = D \cdot \Delta_1$$

sein, und wenn somit

$$(29)\quad \frac{\Phi(y_{11}, y_{12}, \cdots y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \cdots y_{2n}, \cdots y_{n1}, y_{n2}, \cdots y_{nn})}{\Delta^m}$$

$$= \Omega(y_{11}, y_{12}, \cdots y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \cdots y_{2n}, \cdots y_{n1}, y_{n2}, \cdots y_{nn})$$

gesetzt wird, sich vermöge der Beziehungen (20) und (28)

$$(30)\qquad \Omega(y_{11}, y_{12}, \cdots y_{1n}, \cdots\cdots y_{n1}, y_{n2}, \cdots y_{nn})$$
$$= \Omega(z_{11}, z_{12}, \cdots z_{1n}, \cdots\cdots z_{n1}, z_{n2}, \cdots z_{nn})$$

ergeben.

Nimmt man nun wieder zu $x = \xi$ für das Fundamentalsystem (9) das ganz willkürliche numerische System (22) an, das nur der Bedingung unterliegen soll, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta_{n1} & \zeta_{n2} & \cdots & \zeta_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so wird man aus (10) die Constanten der Determinante (11), die nur von Null verschieden sein sollte, so bestimmen können, dass die Elemente des Fundamentalsystems (8) beliebig vorgeschriebene Werthe annehmen, und es wird somit, während die rechte Seite von (30) denselben Werth behält, indem die Werthe von $z_{\alpha\beta} = \zeta_{\alpha\beta}$ dieselben bleiben, auch die linke Seite unverändert bleiben müssen, wiewohl die Argumente beliebig vorgeschriebene Werthe annehmen. Daraus folgt aber, dass die durch die

Gleichung (29) definirte Function Ω von den Argumenten unabhängig sein muss, und dass somit, wenn berücksichtigt wird, dass nach I. 1. (10) dieses Kapitels

$$(31) \qquad \Delta = C\, e^{\int (A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn})\, dx}$$

ist,

$$(32) \quad \Phi(y_{11}, y_{12}, \cdots y_{1n}, \cdots y_{n1}, y_{n2}, \cdots y_{nn}) = K \cdot e^{m \int (A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn})\, dx}$$

ist, worin K von $y_{11}, \cdots y_{nn}$ unabhängig und nur die sonst in Φ vorkommenden Grössen enthält. Fassen wir dieses Resultat mit dem oben für den Fall, dass auch noch die Ableitungen der Integralelemente in die symmetrische Function eintraten, erhaltenen zusammen, so ergiebt sich der folgende Satz:

Jede ganze symmetrische Function der Elemente eines simultanen Fundamentalsystems von Integralen eines linearen homogenen Differentialgleichungsystems (1) *und deren Ableitungen ist gleich einer ganzen Function der Coefficienten der Differentialgleichungen und deren Ableitungen multiplicirt mit einer positiven ganzzahligen Potenz von*

$$e^{\int (A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn})\, dx}.$$

Für eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} *Ordnung*

$$(33) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_n\, y = 0$$

wird also jede ganze symmetrische Function der Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen und deren Ableitungen gleich einer ganzen Function der Coefficienten der Differentialgleichung und deren Ableitungen sein, multiplicirt mit einer positiven ganzzahligen Potenz von

$$e^{-\int A_1\, dx}.$$

III. Ueber die vielfachen Lösungen der linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.

1. Um die Analogie der linearen homogenen Differentialgleichungen

$$(1)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

mit den algebraischen Gleichungen, die sich bereits in der Reduction der Ordnung derselben vermöge bekannter Lösungen und in der Darstellung der symmetrischen Functionen durch die Coefficienten der Gleichung zeigte, noch deutlicher hervortreten zu lassen, sei y_1 ein particuläres Integral der Differentialgleichung (1), und es werde auf diese die Substitution gemacht

$$(2)\qquad y = y_1 z,$$

so dass mit Hülfe der Gleichungen I. (53) die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung in z resultirt

$$(3)\quad (n y_1^{(n-1)} + (n-1) A_1 y_1^{(n-2)} + \cdots + 2 A_{n-2} y_1' + A_{n-1} y_1) \frac{dz}{dx} + P_{n-2} \frac{d^2 z}{dx^2} + \cdots + P_0 \frac{d^n z}{dx^n} = 0,$$

oder wenn

$$(4)\qquad \frac{dz}{dx} = u$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(4)\quad (n y_1^{(n-1)} + (n-1) A_1 y_1^{(n-2)} + \cdots + 2 A_{n-2} y_1' + A_{n-1} y_1)\, u + P_{n-2} \frac{du}{dx} + \cdots + P_0 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} = 0.$$

Diese Differentialgleichung würde, wenn

$$(5)\quad n y_1^{(n-1)} + (n-1) A_1 y_1^{(n-2)} + \cdots + 2 A_{n-2} y_1' + A_{n-1} y_1 = 0$$

ist, durch die Substitution

$$(6)\qquad \frac{du}{dx} = v$$

sogleich in eine Differentialgleichung $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung übergehen, und wir finden somit,

dass, wenn ein particuläres Integral y_1 der Differentialgleichung (1) *zu gleicher Zeit ein Integral der Differentialgleichung*

$$(7) \quad n\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + (n-1)A_1\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + 2A_{n-2}\frac{dy}{dx} + A_{n-1}y = 0$$

ist, die Substitution

$$(8) \qquad y = y_1\int dx\int v\,dx$$

die gegebene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung auf eine andere homogene lineare $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung reducirt.

Da in diesem Falle die Differentialgleichung (1) mit (7) das Integral y_1 gemeinsam hat, so folgt nach der oben gegebenen Definition von der Irreductibilität einer Differentialgleichung, dass *die obige Annahme nur für reductible lineare Differentialgleichungen statthaben kann.*

Weil die Gleichung (7) aus (1) hervorgeht, wenn man die Differentialquotienten wie Potenzen differentiirt und die Coefficienten A als Constanten betrachtet, so werden wir in Analogie zu den bekannten Sätzen in der Theorie der algebraischen Gleichungen y_1 *eine doppelte Integrallösung der Differentialgleichung* (1) *nennen, wenn sie zugleich der Differentialgleichung* (7) *genügt.*

Wenn aber (1) und (7) ein gemeinsames Integral haben, so wird man die erste dieser Gleichungen $n-2$ mal, die zweite $n-1$ mal nach einander differentiiren können, und erhält auf diese Weise $2n-1$ in den $2n-1$ Grössen

$$(9) \qquad y_1, \; \frac{dy_1}{dx}, \; \frac{d^2y_1}{dx^2}, \; \ldots \; \frac{d^{2n-2}y_1}{dx^{2n-2}}$$

homogene lineare Gleichungen, deren Coefficienten ganz und rational aus den Grössen $A_1, A_2, \ldots A_n$ und deren Ableitungen bis zur $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung hin zusammengesetzt sind, und durch Elimination der Grössen (9), d. h. durch Gleichsetzen der Determinante jenes homogenen linearen Gleichungssystems gleich Null,

eine Gleichung

$$(10) \; F(A_1, A_2, \cdots A_n, A'_1, A'_2, \cdots A'_n, \cdots A_1^{(n-1)}, A_2^{(n-1)}, \cdots A_n^{(n-1)}) = 0,$$

in welcher F eine ganze Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet, als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die gegebene homogene lineare Differentialgleichung eine doppelte Lösung hat.

Die Function F wird die *Discriminante* der Differentialgleichung genannt.

2. Wenn nun y_1 eine doppelte Lösung von (1), also zugleich eine Lösung von (7) ist, so sieht man unmittelbar, dass auch

$$y = x \cdot y_1 \tag{11}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (1) sein wird, da

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x\frac{dy_1}{dx} + y_1 \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= x\frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\frac{dy_1}{dx} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^ny}{dx^n} &= x\frac{d^ny_1}{dx^n} + n\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \end{aligned}\right. \tag{12}$$

in die Differentialgleichung (1) eingesetzt dieselbe vermöge (1) und (7) für $y = y_1$ befriedigt; aber es ist auch umgekehrt ersichtlich, dass, wenn y_1 und xy_1 zwei Lösungen der Differentialgleichung (1) sind, y_1 ausser (1) auch der Differentialgleichung (7) genügen, also eine doppelte Lösung von (1) sein wird, und setzt man diese Schlüsse fort, so wird man,

wenn wir y_1 eine λ-fache Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^ny}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + A_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_ny = 0 \tag{13}$$

nennen, wenn dieselbe die particulären Lösungen

$$y_1,\ xy_1,\ x^2y_1,\ \ldots x^{\lambda-1}y_1$$

besitzt,

zu dem folgenden Satze geführt:

Jede homogene lineare Differentialgleichung (13), *welche eine vielfache Lösung y_1 besitzt, ist eine reductible, und zwar genügt die λ-fache Lösung y_1 ausser* (13) *noch zugleich den $\lambda - 1$ Differentialgleichungen*

$$
(14)\begin{cases}
n\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + (n-1)A_1\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_{n-1}y = 0 \\
n(n-1)\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + (n-1)(n-2)A_1\dfrac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \cdots + 2A_{n-2}y = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n(n-1)\cdots(n-\lambda+2)\dfrac{d^{n-\lambda+1}y}{dx^{n-\lambda+1}} + (n-1)\cdots(n-\lambda+1)A_1\dfrac{d^{n-\lambda}y}{dx^{n-\lambda}} + \cdots \\
\qquad + (\lambda-1)(\lambda-2)\cdots 1\, A_{n-\lambda+1}y = 0,
\end{cases}
$$

die aus der Gleichung

$$(15)\qquad t^n + A_1 t^{n-1} + \cdots + A_{n-1}t + A_n = 0$$

durch successive Differentiation nach t und Substitution von

$$\frac{d^r y}{dx^r} \text{ für } t^r$$

abgeleitet werden; die Substitution

$$(16)\qquad y = y_1 \int dx \int dx \cdots \int w\,dx,$$

worin λ mal auf der rechten Seite integrirt wird, führt die Differentialgleichung (13) *auf eine lineare homogene Differentialgleichung $n-\lambda^{\text{ter}}$ Ordnung*

$$(17)\quad \frac{d^{n-\lambda}w}{dx^{n-\lambda}} + E_1\frac{d^{n-\lambda-1}w}{dx^{n-\lambda-1}} + \cdots + E_{n-\lambda-1}\frac{dw}{dx} + E_{n-\lambda}w = 0$$

zurück.

Wir werden im folgenden Abschnitte zeigen, wie man eine lineare Differentialgleichung von ihren gleichen Lösungen freimachen kann.

IV. Ueber die mehreren linearen Differentialgleichungen gemeinsamen Integrale.

1. Seien zwei lineare Differentialgleichungen m^{ter} und n^{ter} Ordnung gegeben

$$(1)\quad p_0\frac{d^m y}{dx^m} + p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_{m-1}\frac{dy}{dx} + p_m y = 0$$

und

$$(2) \quad q_0 \frac{d^n y}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + q_{n-1} \frac{dy}{dx} + q_n y = 0,$$

worin $m > n$, und werde angenommen, dass ein Integral y_1 den beiden Differentialgleichungen gemeinsam sei. Differentiirt man die identische Gleichung

$$(3) \quad q_0 \frac{d^n y_1}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + q_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + q_n y_1 = 0$$

$m - n$ mal nacheinander, so kann man aus den so entstehenden Gleichungen

$$\frac{d^n y_1}{dx^n}, \quad \frac{d^{n+1} y_1}{dx^{n+1}}, \quad \ldots \frac{d^m y_1}{dx^m}$$

linear und homogen durch

$$y_1, \quad \frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \quad \ldots \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$$

und durch die Coefficienten $q_0, q_1, q_2, \ldots q_n$ sowie deren Ableitungen ausdrücken und in die ebenfalls identische Gleichung

$$(4) \quad p_0 \frac{d^m y_1}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + \cdots + p_{m-1} \frac{dy_1}{dx} + p_m y_1 = 0$$

einsetzen, woraus sich eine identische Gleichung von der Form ergiebt

$$(5) \quad r_0 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + r_1 \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} + \cdots + r_{n-2} \frac{dy_1}{dx} + r_{n-1} y_1 = 0,$$

d. h. es ist y_1 ein Integral der homogenen linearen Differentialgleichung $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(6) \quad r_0 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + r_1 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + r_{n-2} \frac{dy}{dx} + r_{n-1} y = 0.$$

Es ist klar, dass *alle* den Differentialgleichungen (1) und (2) gemeinsamen Integrale auch Integrale von (6), also auch gemeinsame Integrale von (2) und (6) sein werden; wäre nun

$$r_0 = r_1 = \cdots = r_{n-2} = r_{n-1} = 0,$$

also die Differentialgleichung (6) identisch gleich Null, so folgte daraus offenbar, dass alle Integrale der Differentialgleichung (2) auch (1) angehören, weil die aus jener gebildeten höheren Differentialquotienten in (1) eingesetzt eine identische Gleichung liefern — ist dies jedoch nicht der Fall, so verfahre man wiederum mit den Differentialgleichungen (2) und

(6) in der angegebenen Weise, und leite daraus eine Differentialgleichung

$$(7) \qquad s_0 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + s_1 \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \cdots + s_{n-3} \frac{dy}{dx} + s_{n-2}\, y = 0$$

her, welche aus denselben Gründen alle den beiden Differentialgleichungen (2) und (6) gemeinsamen, also auch alle den Gleichungen (1) und (2) gemeinsamen Integrale selbst zu Integralen haben wird. Ist diese wiederum identisch dadurch, dass

$$s_0 = s_1 = \ldots = s_{n-3} = s_{n-2} = 0$$

ist, so gehören alle Integrale von (6) auch (2) an, und da jede gemeinsame Lösung von (2) und (6), wie aus der Herleitung ersichtlich, auch (1) angehört, so würden in diesem Falle alle Integrale von (6) auch gemeinsame Integrale von (1) und (2) sein; ist dies aber nicht der Fall, so verfahre man ebenso mit den Differentialgleichungen (6) und (7) u. s. w. Bezeichnen wir zur Abkürzung die linken Seiten der linearen homogenen Differentialgleichungen (1), (2), (6), (7), ... mit

$$F_m, \; F_n, \; F_{n-1}, \; F_{n-2}, \; \ldots,$$

nennen wir ferner F_{n-1} den *Rest* von F_m und F_n, F_{n-2} den Rest von F_n und F_{n-1}, u. s. w., so finden wir, dass, wenn wir auf F_m und F_n die Methode der Aufsuchung der successiven Reste anwenden, wir entweder bis zu einer Function F_1 gelangen werden, weil *ein* Integral jedenfalls F_m und F_n gemeinsam war, also F_0 identisch Null wird, oder dass schon eine frühere Function F_r einen Differentialausdruck liefert, für den die Fortsetzung der Operation F_{r-1} identisch Null giebt; zugleich folgt aus der obigen Auseinandersetzung, dass alle Integrale der Differentialgleichung $F_r = 0$ gemeinsame Integrale von $F_m = 0$ und $F_n = 0$ sind. Aber die gegebenen beiden Differentialgleichungen können auch keine anderen gemeinsamen Integrale haben als solche, welche $F_r = 0$ befriedigen, wie oben gezeigt worden, und es folgt somit, wenn wir die oben angewandte Methode der Aufsuchung der successiven Reste der entsprechenden Operation bei Potenzpolynomen analog die *Methode der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Differentialtheilers* nennen, der nachstehende Satz:

Zur Ermittlung derjenigen Integrale, welche zwei homogenen linearen Differentialgleichungen gemeinsam sind, verfahre man mit den beiden linken Seiten derselben nach der Methode des grössten gemeinschaftlichen Differentialtheilers; der dem Reste 0 vorausgehende Rest, welcher der grösste gemeinschaftliche Differentialtheiler genannt werden soll, gleich Null gesetzt, liefert diejenige homogene lineare Differentialgleichung, deren Integrale sämmtlich und allein gemeinsame Integrale der beiden vorgelegten Differentialgleichungen sind; dieser grösste gemeinschaftliche Differentialtheiler selbst ist rational aus den Coefficienten der beiden Differentialgleichungen und deren Ableitungen zusammengesetzt.

Mit Hülfe dieses grössten gemeinschaftlichen Differentialtheilers können wir aber die beiden Differentialgleichungen (1) und (2) ähnlich umgestalten, wie man zwei Polynome von ihrem gemeinsamen Theiler befreit, wenn wir noch einen Hülfssatz vorausgeschickt haben werden, der vielfache Anwendung findet.

2. Seien zwei lineare homogene Differentialgleichungen

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0 \tag{8}$$

und

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + q_1 \frac{d^{\nu-1} y}{dx^{\nu-1}} + \cdots + q_{\nu-1} \frac{dy}{dx} + q_\nu y = 0 \tag{9}$$

gegeben, worin $\nu < n$ und vorausgesetzt wird, dass *sämmtliche* Integrale von (9) auch zugleich Integrale von (8) sind; bildet man eine Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned}(10)\qquad & \frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}} \left(\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + q_1 \frac{d^{\nu-1} y}{dx^{\nu-1}} + \cdots + q_\nu y\right) \\ & + P_1 \frac{d^{n-\nu-1}}{dx^{n-\nu-1}} \left(\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + q_1 \frac{d^{\nu-1} y}{dx^{\nu-1}} + \cdots + q_\nu y\right) + \cdots \\ & \cdots + P_{n-\nu-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + q_1 \frac{d^{\nu-1} y}{dx^{\nu-1}} + \cdots + q_\nu y\right) \\ & + P_{n-\nu} \left(\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + q_1 \frac{d^{\nu-1} y}{dx^{\nu-1}} + \cdots + q_\nu y\right) = 0,\end{aligned}$$

worin $P_1, P_2, \ldots P_{n-\nu-1}, P_{n-\nu}$ noch zu bestimmende Functionen von x bedeuten, so ist zunächst klar, dass sie eine homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung darstellt, welche die ν Fundamentalintegrale $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ der Differentialgleichung (9), die zu gleicher Zeit auch (8) befriedigten, selbst zu Integralen hat. Seien nun die $n - \nu$ übrigen Integrale der Differentialgleichung (8), welche mit $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ zusammengenommen ein Fundamentalsystem dieser Gleichung bilden, $y_{\nu+1}, y_{\nu+2}, \ldots y_n$, so wird man die $n - \nu$ Functionen

$$P_1, P_2, \ldots P_{n-\nu}$$

so bestimmen können, dass die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (10) auch noch die Integrale $y_{\nu+1}, y_{\nu+2}, \ldots y_n$ besitzt, indem man diese Integrale nur einzusetzen braucht und somit $n - \nu$ in den P-Grössen lineare Gleichungen zur Bestimmung derselben erhält*), so dass nunmehr die Differentialgleichung (10) dasselbe Fundamentalsystem von Integralen

*) Dass die P-Grössen durch diese linearen Gleichungen eindeutig bestimmt sind, ersieht man leicht daraus, dass im entgegengesetzten Falle, wenn

$$(\alpha) \qquad \frac{d^\nu y_{\nu+\varrho}}{dx^\nu} + q_1 \frac{d^{\nu-1} y_{\nu+\varrho}}{dx^{\nu-1}} + \cdots + q_\nu y_{\nu+\varrho} = Y_{\nu+\varrho}$$

gesetzt wird, die Determinante

$$(\beta) \qquad \begin{vmatrix} Y_{\nu+1} & Y'_{\nu+1} & \ldots & Y^{(n-\nu-1)}_{\nu+1} \\ Y_{\nu+2} & Y'_{\nu+2} & \ldots & Y^{(n-\nu-1)}_{\nu+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_n & Y'_n & \ldots & Y^{(n-\nu-1)}_n \end{vmatrix} = 0$$

sein müsste, und hieraus wieder nach den Sätzen über die fundamentalen Integralsysteme linearer Differentialgleichungen die Existenz einer Relation von der Form

$$(\gamma) \qquad c_1 Y_{\nu+1} + c_2 Y_{\nu+2} + \cdots + c_{n-\nu} Y_n = 0$$

sich ergeben würde, in welcher $c_1, c_2, \ldots c_{n-\nu}$ Constanten bedeuten. Setzt man aber

$$c_1 y_{\nu+1} + c_2 y_{\nu+2} + \cdots + c_{n-\nu} y_n = \eta,$$

so folgte aus (α) und (γ)

$$\frac{d^\nu \eta}{dx^\nu} + q_1 \frac{d^{\nu-1} \eta}{dx^{\nu-1}} + \cdots + q_\nu \eta = 0,$$

d. h. η wäre ein Integral der Differentialgleichung (9), was der Annahme nach unmöglich ist.

$$y_1, y_2, \ldots y_\nu, \quad y_{\nu+1}, \ldots y_n$$

besitzt, wie die Differentialgleichung (8). Da aber, wie in Abschnitt II. dieses Kapitels gezeigt worden, die Coefficienten einer homogenen linearen Differentialgleichung durch ein Fundamentalsystem von Integralen eindeutig bestimmt sind, so muss die Differentialgleichung (10) mit (8) identisch sein, also kann man die Coefficienten $P_1, P_2, \ldots P_{n-\nu}$ durch Vergleichung beider als ganze Functionen der q, deren Ableitungen und der p finden, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung $F_\nu = 0$ alle Integrale mit einer gleichartigen Differentialgleichung höherer Ordnung $F_n = 0$ gemeinsam hat, so lässt sich die letztere als lineare homogene Differentialgleichung $n - \nu^{\text{ter}}$ Ordnung schreiben, deren abhängiges Argument F_ν selbst ist.

Man sieht zugleich, dass zur Herstellung der Integration der Differentialgleichung (8) zunächst die Differentialgleichung (9) zu integriren ist, deren Fundamentalsystem $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ sei; integrirt man sodann die lineare homogene Differentialgleichung

$$(11) \qquad \frac{d^{n-\nu} Y}{dx^{n-\nu}} + P_1 \frac{d^{n-\nu-1} Y}{dx^{n-\nu-1}} + \cdots + P_{n-\nu} Y = 0,$$

und seien deren $n - \nu$ Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen

$$Y_1, Y_2, \ldots Y_{n-\nu},$$

so sind zur Ermittlung der noch fehlenden Integrale $y_{\nu+1}, y_{\nu+2}, \ldots y_n$ die linearen nicht homogenen Differentialgleichungen ν^{ter} Ordnung

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^\nu y}{dx^\nu} + q_1 \dfrac{d^{\nu-1} y}{dx^{\nu-1}} + \cdots + q_\nu y = Y_1 \\[2ex] \dfrac{d^\nu y}{dx^\nu} + q_1 \dfrac{d^{\nu-1} y}{dx^{\nu-1}} + \cdots + q_\nu y = Y_2 \\[1ex] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[1ex] \dfrac{d^\nu y}{dx^\nu} + q_1 \dfrac{d^{\nu-1} y}{dx^{\nu-1}} + \cdots + q_\nu y = Y_{n-\nu} \end{cases}$$

zu integriren, *so dass das Integrationsproblem der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zurück-*

geführt ist auf die Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung, deren sämmtliche Integrale der ersteren angehören, einer homogenen linearen Differentialgleichung $n - \nu^{\text{ter}}$ Ordnung, und endlich auf die Integration von $n - \nu$ linearen nicht homogenen Differentialgleichungen der ν^{ten} Ordnung, deren allgemeine Integrale sich aber, wie früher gezeigt worden, aus den Integralen der Differentialgleichung (9) *und den Functionen $Y_1, Y_2, \ldots Y_{n-\nu}$ vermittels Quadraturen ausdrücken lassen,*

mit anderen Worten

es lässt sich unter der gemachten Voraussetzung die Integration der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung auf die von gleichartigen Differentialgleichungen ν^{ter} und $n - \nu^{\text{ter}}$ Ordnung zurückführen.

3. Aus diesem Hülfsatze ergiebt sich nun unmittelbar, dass, wenn die beiden homogenen linearen Differentialgleichungen (1) und (2) den grössten gemeinschaftlichen Differentialtheiler

$$(13)\qquad \frac{d^r y}{dx^r} + f_1 \frac{d^{r-1} y}{dx^{r-1}} + \cdots + f_{r-1} \frac{dy}{dx} + f_r y = 0 = F_r$$

besitzen, weil sämmtliche Integrale dieses auch Integrale von (1) und (2) sind, die letzteren beiden Differentialgleichungen sich in die Form setzen lassen

$$(14)\quad \frac{d^{m-r} F_r}{dx^{m-r}} + P_1 \frac{d^{m-r-1} F_r}{dx^{m-r-1}} + \cdots + P_{m-r-1} \frac{dF_r}{dx} + P_{m-r} F_r = 0$$

und

$$(15)\quad \frac{d^{n-r} F_r}{dx^{n-r}} + Q_1 \frac{d^{n-r-1} F_r}{dx^{n-r-1}} + \cdots + Q_{n-r-1} \frac{dF_r}{dx} + Q_{n-r} F_r = 0,$$

sich also mit Hülfe von F_r auf homogene lineare Differentialgleichungen der $m - r^{\text{ten}}$ und $n - r^{\text{ten}}$ Ordnung zurückführen lassen.

4. Wir wollen eine Anwendung von der Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Differentialtheilers auf den Fall der gleichen Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung machen.

Hat die lineare Differentialgleichung

$$(16)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

ein und *nur ein* Integral mehrfach, also y_1 r-fach, so wird y_1 jedenfalls auch der Differentialgleichung

$$(17)\qquad n \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + (n-1) A_1 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_{n-1} y = 0$$

genügen, und es wird der grösste gemeinschaftliche Differentialtheiler, da die Gleichung (16) die Lösungen y_1, xy_1, $x^2 y_1, \ldots x^{r-1} y_1$, die Gleichung (17) die Lösungen y_1, xy_1, $x^2 y_1, \ldots x^{r-2} y_1$ hat, und beide Gleichungen somit die gemeinsamen Integrale

$$(18)\qquad y_1,\ xy_1,\ x^2 y_1,\ \ldots x^{r-2} y_1$$

und keine anderen besitzen, eine homogene lineare Differentialgleichung $r-1^{\text{ter}}$ Ordnung sein müssen, deren $r-1$ Fundamentalintegrale durch die Grössen (18) gegeben sind. Sei diese Differentialgleichung

$$(19)\qquad \frac{d^{r-1} y}{dx^{r-1}} + B_1 \frac{d^{r-2} y}{dx^{r-2}} + \cdots + B_{r-2} \frac{dy}{dx} + B_{r-1} y = 0,$$

so sind einerseits nach der obigen Ausführung die Coefficienten als rationale Functionen von $A_1, A_2, \ldots A_n$ und deren Ableitungen bekannt, andererseits müssen, weil (18) die Integrale von (19) sein sollen, die aus (19) abgeleiteten Differentialgleichungen

$$(20)\begin{cases} (r-1) \dfrac{d^{r-2} y}{dx^{r-2}} + (r-2) B_1 \dfrac{d^{r-3} y}{dx^{r-3}} + \cdots + 2 B_{r-3} \dfrac{dy}{dx} + B_{r-2} y = 0 \\ (r-1)(r-2) \dfrac{d^{r-3} y}{dx^{r-3}} + (r-2)(r-3) B_1 \dfrac{d^{r-4} y}{dx^{r-4}} + \cdots + 2 B_{r-3} y = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (r-1)(r-2)\cdots 3\cdot 2 \cdot \dfrac{dy}{dx} + (r-2)(r-3)\cdots 2\cdot 1\, B_1 y = 0 \end{cases}$$

sämmtlich die Lösung y_1 haben, und daher nach der letzten derselben

$$(r-1) \frac{dy_1}{dx} + B_1 y_1 = 0$$

oder

$$(21)\qquad y_1 = e^{-\frac{1}{r-1} \cdot \int B_1\, dx}$$

sein, und *somit* y_1 *bekannt und zwar durch eine Quadratur einer aus den Grössen* $A_1, \dots A_n$ *und deren Ableitungen rational zusammengesetzten Function.*

Ist aber y_1 bekannt, so kennen wir die r Integrale

$$y_1, \; xy_1, \; x^2 y_1, \; \dots x^{r-1} y_1$$

der Differentialgleichung (16), und können somit nach den früheren Auseinandersetzungen diese Differentialgleichung auf eine solche von der $n - r^{\text{ten}}$ Ordnung reduciren; wir finden somit

dass, wenn eine lineare Differentialgleichung n^{ter} *Ordnung ein und nur ein Integral mehrfach hat, diese Differentialgleichung von ihrer mehrfachen Lösung befreit und auf eine lineare homogene Differentialgleichung* $n - r^{\text{ter}}$ *Ordnung reducirt werden kann, wenn jene mehrfache Lösung r-fach vorkommt; der Werth der letzteren ist durch* (21) *bekannt.*

Hat die Differentialgleichung (16) jedoch *mehrere* Lösungen mehrfach, so kann man im Allgemeinen so wenig wie bei algebraischen Gleichungen den Werth dieser mehrfachen Integrale durch diese Operationen ermitteln, aber man kann, wie wir zeigen wollen, die Differentialgleichung jedenfalls auch von vielfachen Integralen frei machen.

Habe nämlich die lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(22) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0,$$

unter den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen

$$(23) \qquad \begin{cases} y_{11}, \; y_{12}, \; \dots y_{1\varrho_1} & \text{einfach} \\ y_{21}, \; y_{22}, \; \dots y_{2\varrho_2} & \text{zweifach} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ y_{\lambda 1}, \; y_{\lambda 2}, \; \dots y_{\lambda \varrho_\lambda} & \lambda\text{-fach}, \end{cases}$$

so dass

$$\varrho_1 + 2\varrho_2 + 3\varrho_3 + \cdots + \lambda \varrho_\lambda = n$$

ist, so wird nach den früheren Auseinandersetzungen die Differentialgleichung

$$(24)\ n\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+(n-1)A_1\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+2A_{n-2}\frac{dy}{dx}+A_{n-1}y=0$$

die Integrale

$$(25)\qquad \begin{cases} y_{21},\ y_{22},\ \ldots\ y_{2\varrho_2} & \text{einfach} \\ y_{31},\ y_{32},\ \ldots\ \eta_{3\varrho_3} & \text{zweifach} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ y_{\lambda 1},\ y_{\lambda 2},\ \ldots\ y_{\lambda\varrho_\lambda} & \lambda-1\text{-fach} \end{cases}$$

enthalten, und somit der grösste gemeinschaftliche Differentialtheiler D zwischen (22) und (24) gleich Null gesetzt eine lineare homogene Differentialgleichung der $\varrho_2+2\varrho_3+3\varrho_4+\cdots+(\lambda-1)\varrho_\lambda{}^{\text{ten}}$ Ordnung bilden, für welche das System (25) ein vollständiges Fundamentalsystem von Integralen darstellt; da diese aber sämmtlich und noch in höherer Vielfachheit als Integrale der Differentialgleichung (22) angehören, so wird nach dem vorher bewiesenen Satze mit Hülfe des grössten gemeinschaftlichen Differentialtheilers D die Differentialgleichung (22) in die Form gesetzt werden können

$$(26)\qquad \frac{d^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_\lambda}D}{dx^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_\lambda}}+P_1\frac{d^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_\lambda-1}D}{dx^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_\lambda-1}}+\cdots\cdots$$
$$+P_{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_\lambda}D=0,$$

so dass die Integration jener Gleichung zurückgeführt ist auf die Integration der linearen homogenen Differentialgleichung

$$(27)\qquad D=0,$$

deren Ordnung die

$$\varrho_2+2\varrho_3+3\varrho_4+\cdots+(\lambda-1)\varrho_\lambda{}^{\text{te}}$$

ist, der homogenen Differentialgleichung (26) und auf Quadraturen. Die Integration der Differentialgleichung $D=0$, deren Integralsystem vollständig durch (25) dargestellt ist, kann wieder auf die Integration einer Differentialgleichung

$$(28)\qquad D_1=0$$

zurückgeführt werden, deren linke Seite der grösste gemeinschaftliche Differentialtheiler zwischen D und dessen in bekannter Weise genommenen Ableitung ist, deren Ordnung die

$$\varrho_3 + 2\varrho_4 + 3\varrho_5 + \cdots + (\lambda - 2)\varrho_\lambda{}^{\text{te}},$$

und deren Integralsystem durch

$$(29) \qquad \begin{cases} y_{31}, \; y_{32}, \; \ldots \; y_{3\varrho_3} & \text{einfach} \\ y_{41}, \; y_{42}, \; \ldots \; y_{4\varrho_4} & \text{zweifach} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & \\ y_{\lambda 1}, \; y_{\lambda 2}, \; \ldots \; y_{\lambda \varrho_\lambda} & \lambda - 2\text{-fach} \end{cases}$$

dargestellt wird. Ebenso lässt sich weiter die Integration der Differentialgleichung $D_1 = 0$ auf die Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung

$$(30) \qquad D_2 = 0$$

zurückführen, deren linke Seite der grösste gemeinschaftliche Differentialtheiler zwischen D_1 und dessen Ableitung bildet, deren Ordnung die

$$\varrho_4 + 2\varrho_5 + 3\varrho_6 + \cdots + (\lambda - 3)\varrho_\lambda{}^{\text{te}}$$

ist, und deren Integralsystem durch

$$(31) \qquad \begin{cases} y_{41}, \; y_{42}, \; \ldots \; y_{4\varrho_4} & \text{einfach} \\ y_{51}, \; y_{52}, \; \ldots \; y_{5\varrho_5} & \text{zweifach} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & \\ y_{\lambda 1}, \; y_{\lambda 2}, \; \ldots \; y_{\lambda \varrho_\lambda} & \lambda - 3\text{-fach} \end{cases}$$

dargestellt wird; schliesst man so weiter, so kommt man endlich auf die Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung

$$(32) \qquad D_{\lambda-2} = 0,$$

deren Integralsystem durch die *einfachen* Lösungen

$$(33) \qquad y_{\lambda 1}, \; y_{\lambda 2}, \; \ldots \; y_{\lambda \varrho_\lambda}$$

dargestellt wird, und wir finden somit

dass eine lineare Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit vielfachen Lösungen stets zurückführbar ist auf gleichartige lineare Differentialgleichungen, welche jene Lösungen nur einfach enthalten.

V. Ueber die Irreductibilität linearer Differentialgleichungsysteme.

1. Nach der in V. des Kap. 1 aufgestellten Irreductibilitätsdefinition wird *das lineare Differentialgleichungsystem*

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2n}y_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \cdots + A_{nn}y_n \end{cases}$$

mit algebraischen Coefficienten dann und nur dann reductibel sein, wenn weniger als n Elemente eines Integralsystems

$$\eta_1, \; \eta_2, \; \ldots \eta_n$$

der Differentialgleichungen (1) *existiren, welche das vollständige Integralsystem eines gleichzeitigen Systems von weniger als n algebraischen Differentialgleichungen bilden, oder wenn, von dem Falle abgesehen, dass das System* (1) *in zwei gesonderte Systeme zerfällt, zwischen den Elementen* $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ *eine oder mehrere algebraische Beziehungen bestehen.*

Wir wollen unter der Annahme der Reductibilität des Systemes (1) die Natur der algebraischen Differentialgleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dY_1}{dx} = f_1(x, Y_1, Y_2, \ldots Y_m) \\ \dfrac{dY_2}{dx} = f_2(x, Y_1, Y_2, \ldots Y_m) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{dY_m}{dx} = f_m(x, Y_1, Y_2, \ldots Y_m) \end{cases}$$

untersuchen, worin $m < n$ ist, und von welchem

$$\eta_1, \; \eta_2, \; \ldots \eta_m,$$

welche einen Theil des Integralsystems $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ der Differentialgleichungen (1) bilden, ein particuläres Integral-

system sein soll; zugleich darf angenommen werden, dass nicht schon weniger als diese m Integrale $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ das vollständige Integralsystem eines algebraischen Differentialgleichungsystems bilden, da wir im entgegengesetzten Falle dieses letztere System statt des Systemes (2) der Untersuchung zu Grunde legen würden. Nach den in dem erwähnten Abschnitte bewiesenen Sätzen würde dann aber jedes vollständige Integralsystem der Differentialgleichungen (2) einen Theil eines vollständigen particulären Integralsystems von (1) bilden, und wenn wir somit n simultane Fundamentalsysteme der Differentialgleichungen (1), von denen eines auch $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ als Theil enthalten kann, durch

$$(3)\qquad \begin{cases} y_{11}, \; y_{12}, \; \dots \; y_{1n} \\ y_{21}, \; y_{22}, \; \dots \; y_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ y_{n1}, \; y_{n2}, \; \dots \; y_{nn} \end{cases}$$

darstellen, so wird somit das allgemeine Integralsystem der Differentialgleichungen (2) die Form haben:

$$(4)\qquad \begin{cases} Y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \dots + C_n y_{n1} \\ Y_2 = C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \dots + C_n y_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_m = C_1 y_{1m} + C_2 y_{2m} + \dots + C_n y_{nm}, \end{cases}$$

worin $C_1, C_2, \dots C_n$ Functionen der m willkürlichen Integrationsconstanten $k_1, k_2, \dots k_m$ des Systemes (2) sein werden. Greifen wir nunmehr n Particulärsysteme der Constanten $k_1, k_2, \dots k_m$ heraus, welche n particuläre Integralsysteme von (2) liefern:

$$(5)\qquad \begin{cases} Y_{11} = C_{11} y_{11} + C_{21} y_{21} + \dots + C_{n1} y_{n1}, \dots Y_{1m} = C_{11} y_{1m} + C_{21} y_{2m} + \dots + C_{n1} y_{nm} \\ Y_{21} = C_{12} y_{11} + C_{22} y_{21} + \dots + C_{n2} y_{n1}, \dots Y_{2m} = C_{12} y_{1m} + C_{22} y_{2m} + \dots + C_{n2} y_{nm} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{n1} = C_{1n} y_{11} + C_{2n} y_{21} + \dots + C_{nn} y_{n1}, \dots Y_{nm} = C_{1n} y_{1m} + C_{2n} y_{2m} + \dots + C_{nn} y_{nm} \end{cases}$$

so könnte es sein, dass die Determinante derselben

$$(6) \qquad \varDelta = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix}$$

für jede Wahl der particulären Systeme von $k_1, k_2, \dots k_m$ verschwindet; dann würde aber nach bekannten Sätzen aus der Theorie der linearen Gleichungen entweder zwischen allen linken Seiten von (5) oder zwischen einem Theile derselben, je nachdem die Unterdeterminanten von $\varDelta$ bis zu einer bestimmten Ordnung hin verschwinden, eine lineare Relation der Form

$$(7) \qquad K_1 Y_{1\varrho} + K_2 Y_{2\varrho} + \cdots + K_n Y_{n\varrho} = 0$$

stattfinden, d. h. es würde, da wir z. B. für $Y_{1\varrho}$ das Element des allgemeinen Integralsystemes der Differentialgleichungen (2) wählen können, *ein allgemeines Integralelement dieser Differentialgleichungen eine homogene lineare Function von $n-1$ oder weniger entsprechenden particulären Integralelementen eben dieser Differentialgleichungen sein.*

Verschwindet jedoch die Determinante $\varDelta$ nicht, so liefert das System (5) die Grössen $y_{1\varrho}, y_{2\varrho}, \dots y_{n\varrho}$ als homogene lineare Functionen von $Y_{1\varrho}, Y_{2\varrho}, \dots Y_{n\varrho}$, und diese Werthe in die ϱ^{te} der Gleichungen (4) eingesetzt, geben *das Element Y_ϱ des allgemeinen Integralsystems von* (2) *als lineare homogene Function von n entsprechenden particulären Elementen in der Form*

$$(8) \qquad Y_\varrho = L_1 Y_{1\varrho} + L_2 Y_{2\varrho} + \cdots + L_n Y_{n\varrho},$$

und fassen wir die so gewonnenen Resultate zusammen, so erhalten wir den nachstehenden Satz:

Hat ein System von n homogenen linearen Differentialgleichungen mit einem System von weniger als n algebraischen Differentialgleichungen ein Integralsystem gemein, von dem nicht schon ein Theil einem algebraischen Differentialgleichungssysteme noch niederer Klasse Genüge leistet, so lassen sich die Elemente des allgemeinen Integralsystems jenes Systemes algebraischer Differentialgleichungen homogen und linear durch n particuläre

Integralsysteme eben dieser Differentialgleichungen in der Form ausdrücken

$$(9)\qquad \begin{cases} Y_1 = L_1 Y_{11} + L_2 Y_{21} + \cdots + L_n Y_{n1} \\ Y_2 = L_1 Y_{12} + L_2 Y_{22} + \cdots + L_n Y_{n2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Y_m = L_1 Y_{1m} + L_2 Y_{2m} + \cdots + L_n Y_{nm}, \end{cases}$$

worin $L_1, \ldots L_n$ *Functionen von so viel Constanten bedeuten, als die Klasse des algebraischen Differentialgleichungsystems anzeigt, übrigens aber auch zum Theil verschwinden können.*

2. Es bleibt uns nun die Frage zu beantworten übrig, *wie ein algebraisches Differentialgleichungsystem* (2) *beschaffen sein muss, wenn zwischen dem allgemeinen und einer bestimmten Anzahl particulärer Integralsysteme lineare Relationen von der Form*

$$(10)\qquad \begin{cases} Y_1 = L_1 Y_{11} + L_2 Y_{21} + \cdots + L_\mu Y_{\mu 1} \\ Y_2 = L_1 Y_{12} + L_2 Y_{22} + \cdots + L_\mu Y_{\mu 2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Y_m = L_1 Y_{1m} + L_2 Y_{2m} + \cdots + L_\mu Y_{\mu m} \end{cases}$$

bestehen sollen. Zunächst ist klar, dass μ nicht kleiner als m sein kann, weil sonst, $L_1, L_2, \ldots L_\mu$ als selbständige willkürliche Constanten aufgefasst, die allgemeinen Integralelemente $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ nicht die erforderliche Anzahl von m von einander unabhängigen willkürlichen Constanten hätten; es muss somit $\mu =$ oder $> m$ sein. Sei $\mu = m$, gehen also die Beziehungen (10) in

$$(11)\qquad \begin{cases} Y_1 = L_1 Y_{11} + L_2 Y_{21} + \cdots + L_m Y_{m1} \\ Y_2 = L_1 Y_{12} + L_2 Y_{22} + \cdots + L_m Y_{m2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Y_m = L_1 Y_{1m} + L_2 Y_{2m} + \cdots + L_m Y_{mm} \end{cases}$$

über, worin $L_1, \ldots L_m$ selbst als die m willkürlichen Constanten betrachtet werden können, und setzt man diese Ausdrücke für die allgemeinen Integrale in die Differentialgleichungen (2) ein, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(12)\quad f_1(x, L_1Y_{11}+L_2Y_{21}+\cdots+L_mY_{m1}, \cdots L_1Y_{1m}+L_2Y_{2m}+\cdots+L_mY_{mm})$$
$$=L_1f_1(x, Y_{11}, Y_{12}, \ldots Y_{1m})+L_2f_1(x, Y_{21}, Y_{22}, \cdots Y_{2m})+\cdots$$
$$+L_mf_1(x, Y_{m1}, Y_{m2}, \cdots Y_{mm})$$

$$(13)\quad f_2(x, L_1Y_{11}+L_2Y_{21}+\cdots+L_mY_{m1}, \cdots L_1Y_{1m}+L_2Y_{2m}+\cdots+L_mY_{mm})$$
$$=L_1f_2(x, Y_{11}, Y_{12}, \cdots Y_{1m})+L_2f_2(x, Y_{21}, Y_{22}, \cdots Y_{2m})+\cdots$$
$$+L_mf_2(x, Y_{m1}, Y_{m2}, \cdots Y_{mm})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(14)\quad f_m(x, L_1Y_{11}+L_2Y_{21}+\cdots+L_mY_{m1}, \cdots L_1Y_{1m}+L_2Y_{2m}+\cdots+L_mY_{mm})$$
$$=L_1f_m(x, Y_{11}, Y_{12}, \cdots Y_{1m})+L_2f_m(x, Y_{21}, Y_{22}, \cdots Y_{2m})+\cdots$$
$$+L_mf_m(x, Y_{m1}, Y_{m2}, \cdots Y_{mm}),$$

welche für beliebige Werthe der constanten $L_1, L_2, \ldots L_m$ bestehen müssen.

Differentiirt man die Gleichung (12) nach $L_1, L_2, \ldots L_m$, so erhält man, wenn man zur Abkürzung

$$(15)\quad \begin{cases} L_1Y_{11}+L_2Y_{21}+\cdots+L_mY_{m1}=Z_1\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_1Y_{1m}+L_2Y_{2m}+\cdots+L_mY_{mm}=Z_m \end{cases}$$

setzt, die folgenden Beziehungen:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1(x, Z_1, \ldots Z_m)}{\partial Z_1}Y_{11}+\dfrac{\partial f_1(x, Z_1, \ldots Z_m)}{\partial Z_2}Y_{12}+\cdots \\ \qquad +\dfrac{\partial f_1(x, Z_1, \ldots Z_m)}{\partial Z_m}Y_{1m}=f_1(x, Y_{11}, Y_{12}, \ldots Y_{1m}) \\ \dfrac{\partial f_1(x, Z_1, \ldots Z_m)}{\partial Z_1}Y_{21}+\dfrac{\partial f_1(x, Z_1, \ldots Z_m)}{\partial Z_2}Y_{22}+\cdots \\ \qquad +\dfrac{\partial f_1(x, Z_1, \ldots Z_m)}{\partial Z_m}Y_{2m}=f_1(x, Y_{21}, Y_{22}, \ldots Y_{2m}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_1(x, Z_1, \ldots Z_m)}{\partial Z_1}Y_{m1}+\dfrac{\partial f_1(x, Z_1, \ldots Z_m)}{\partial Z_2}Y_{m2}+\cdots \\ \qquad +\dfrac{\partial f_1(x, Z_1, \ldots Z_m)}{\partial Z_m}Y_{mm}=f_1(x, Y_{m1}, Y_{m2}, \ldots Y_{mm}), \end{cases}$$

woraus sich als Unbekannte eines linearen Gleichungssystems

$$(17)\quad \frac{\partial f_1(x, Z_1, \ldots Z_m)}{\partial Z_1}, \quad \frac{\partial f_1(x, Z_1, \ldots Z_m)}{\partial Z_2}, \ldots \frac{\partial f_1(x, Z_1, \ldots Z_m)}{\partial Z_m}$$

als von $L_1, L_2, \ldots L_m$ unabhängig, durch die Grössen Y_{11}, $\ldots Y_{mm}$ bestimmt ergeben würden; da aber den Grössen $Z_1, Z_2, \ldots Z_m$ vermöge der Gleichungen (15) wegen der Willkürlichkeit der Constanten $L_1, L_2, \ldots L_m$ beliebige Werthe zuertheilt werden können, weil die Determinante, wie nach der Annahme leicht zu sehen, nicht verschwinden kann, so müssen die Grössen (17) von ihren Argumenten unabhängig, und somit

$$f_1(x, Z_1, \ldots Z_m), \text{ ebenso } f_2(x, Z_1, \ldots Z_m), \ldots f_m(x, Z_1, \ldots Z_m)$$

lineare Functionen ihrer Argumente von der Form sein:

$$(18) \quad \begin{cases} f_1(x, Z_1, \ldots Z_m) = P_1 + P_{11} Z_1 + P_{12} Z_2 + \cdots + P_{1m} Z_m \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_m(x, Z_1, \ldots Z_m) = P_m + P_{m1} Z_1 + P_{m2} Z_2 + \cdots + P_{mm} Z_m, \end{cases}$$

worin $P_1, \ldots P_m, P_{11}, \ldots P_{mm}$ nur algebraische Functionen von x sind. Setzt man aber diese Werthe in die Gleichungen (16) ein, so folgt

$$(19) \qquad \begin{aligned} & P_{11} Y_{11} + P_{12} Y_{12} + \cdots + P_{1m} Y_{1m} \\ & = P_1 + P_{11} Y_{11} + P_{12} Y_{12} + \cdots + P_{1m} Y_{1m} \end{aligned}$$

und daher $P_1 = 0$, ebenso $P_2 = \cdots = P_m = 0$, und es gehen somit die Differentialgleichungen (2) in

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{dY_1}{dx} = P_{11} Y_1 + P_{12} Y_2 + \cdots + P_{1m} Y_m \\ \dfrac{dY_2}{dx} = P_{21} Y_1 + P_{22} Y_2 + \cdots + P_{2m} Y_m \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dY_m}{dx} = P_{m1} Y_1 + P_{m2} Y_2 + \cdots + P_{mm} Y_m \end{cases}$$

über. Wir erhalten somit den Satz:

Wenn für ein algebraisches Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse die m Elemente des allgemeinen Integralsystems homogene lineare Functionen mit constanten Coefficienten von m particulären Integralsystemen sind, so ist das Differentialgleichungsystem ein homogen lineares.

Es bleibt somit nur noch die Frage nach der Beschaffenheit des Differentialgleichungssystems (2) zu beantworten übrig, wenn in den Gleichungen (10) $\mu > m$ ist, und $L_1, L_2, \ldots L_\mu$ Functionen der m willkürlichen Integrationsconstanten $k_1, k_2, \ldots k_m$ sind. Führen wir die Ausdrücke (10) wieder in das Differentialgleichungssystem (2) ein, so erhält man

$$(21)\quad \begin{aligned} f_1(x, L_1 Y_{11} + L_2 Y_{21} + \cdots + L_\mu Y_{\mu 1}, \ldots L_1 Y_{1m} + L_2 Y_{2m} + \cdots + L_\mu Y_{\mu m}) \\ = L_1 f_1(x, Y_{11}, Y_{12}, \ldots Y_{1m}) + L_2 f_1(x, Y_{21}, Y_{22}, \ldots Y_{2m}) + \cdots \\ + L_\mu f_1(x, Y_{\mu 1}, Y_{\mu 2}, \ldots Y_{\mu m}) \end{aligned}$$

und ähnliche Beziehungen für $f_2, \ldots f_m$.

Hier müssen nun zwei Fälle unterschieden werden, indem diese Gleichungen in allen in ihnen vorkommenden Grössen identisch sind oder nicht; ist das erstere der Fall — und dies wird dann stets eintreten, wenn das Differentialgleichungsystem so beschaffen ist, dass keine algebraische Beziehung zwischen den Elementen von μ seiner particulären Integralsysteme besteht — so erhält man, wenn wiederum zur Abkürzung

$$(22)\quad \begin{array}{c} L_1 Y_{11} + L_2 Y_{21} + \cdots + L_\mu Y_{\mu 1} = Z_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_1 Y_{1m} + L_2 Y_{2m} + \cdots + L_\mu Y_{\mu m} = Z_m \end{array}$$

gesetzt wird, durch Differentiation nach

$$Y_{11}, \; Y_{21}, \; \ldots Y_{\mu 1}; \; Y_{12}, \; Y_{22}, \; \ldots Y_{\mu 2}; \; \ldots Y_{1m}, \; Y_{2m}, \; \ldots Y_{\mu m}$$

die nachfolgenden identischen Gleichungen

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f_1(x, Z_1, \ldots Z_m)}{\partial Z_1} &= \frac{\partial f_1(x, Y_{11}, Y_{12}, \ldots Y_{1m})}{\partial Y_{11}} = \frac{\partial f_1(x, Y_{21}, Y_{22}, \ldots Y_{2m})}{\partial Y_{21}} = \cdots \\ &= \frac{\partial f_1(x, Y_{\mu 1}, Y_{\mu 2}, \ldots Y_{\mu m})}{\partial Y_{\mu 1}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_1(x, Z_1, \ldots Z_m)}{\partial Z_m} &= \frac{\partial f_1(x, Y_{11}, Y_{12}, \ldots Y_{1m})}{\partial Y_{1m}} = \frac{\partial f_1(x, Y_{21}, Y_{22}, \ldots Y_{2m})}{\partial Y_{2m}} = \cdots \\ &= \frac{\partial f_1(x, Y_{\mu 1}, Y_{\mu 2}, \ldots Y_{\mu m})}{\partial Y_{\mu m}}. \end{aligned} \right.$$

Aus einer *identischen* Gleichung der Form

$$(24)\quad \frac{\partial f_1(x, Y_{11}, Y_{12}, \ldots Y_{1m})}{\partial Y_{11}} = \frac{\partial f_1(x, Y_{21}, Y_{22}, \ldots Y_{2m})}{\partial Y_{21}}$$

ergiebt sich aber, da man $Y_{12} = Y_{22}$, $Y_{13} = Y_{23}$, $\ldots Y_{1m} = Y_{2m}$ setzen kann, dass der Differentialquotient der Function $f_1(x, Y_{11}, Y_{12}, \ldots Y_{1m})$ nach Y_{11} genommen von dieser Grösse unabhängig ist, und da dasselbe für alle anderen Argumente und Functionen $f_1, \ldots f_m$ gültig ist, so folgt, dass *die rechten Seiten der Differentialgleichungen* (2) *auch in diesem Falle lineare Functionen der abhängigen Variabeln sein werden, das Differentialgleichungsystem* (2) *also wiederum in* (20) *übergeht*, da, wie leicht zu sehen, wenn alle Integrale eines nicht homogenen linearen Differentialgleichungsystems den Differentialgleichungen (1) angehören, dasselbe auch für das homogene adjungirte Differentialgleichungsystem statthat — und *dieser Schluss war nur dann nicht gültig, wenn algebraische Beziehungen zwischen den Elementen von mehr als m und höchstens n particulären Integralsystemen der Differentialgleichungen* (2), *also auch zwischen entsprechenden Elementenreihen von ebenso viel Integralsystemen des ursprünglichen linearen homogenen Differentialgleichungsystems* (1) *bestanden*, da sämmtliche Integralsysteme der Differentialgleichungen (2) auch (1) als Elemente von Integralsystemen genügten, und unter einander durch die Beziehungen (5) verbunden sind.

3. Stellen wir die eben gefundenen Sätze mit dem in 1. hergeleiteten zusammen, so erhalten wir das nachfolgende Theorem:

Ist ein homogenes lineares System von n Differentialgleichungen reductibel, so wird dasjenige System von Differentialgleichungen, dessen Klasse m die kleinste ist unter allen denen, für welche ein vollständiges Integralsystem durch einen Theil eines vollständigen Integralsystems des gegebenen Systems von Differentialgleichungen gebildet wird, wiederum ein homogenes lineares sein müssen, wenn nicht zwischen analogen Elementenreihen von mehr als m und weniger als n particulären Integralsystemen des gegebenen Systemes linearer homogener Differentialgleichungen ein algebraischer Zusammenhang besteht,

wobei hervorzuheben ist, dass *dieser algebraische Zusammenhang nicht eine algebraische Beziehung zwischen den Elementen eines Integralsystems darstellt*, da ein solcher, wie oben gezeigt worden, unter der Annahme der Reductibilität für jedes Differentialgleichungssystem, also auch für das Differentialgleichungssystem (1) stattfinden muss, *sondern einen algebraischen Zusammenhang zwischen gleichartigen Elementen verschiedener Integralsysteme.*

Man erkennt hieraus, *dass im Allgemeinen Integrale linearer Differentialgleichungssysteme immer nur wieder in irreductibler Weise linearen Differentialgleichungssystemen angehören können.*

4. Wenden wir den eben gefundenen Satz auf den Fall von zwei homogenen linearen Differentialgleichungen

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11} y_1 + A_{12} y_2 \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21} y_1 + A_{22} y_2 \end{cases}$$

an, *so wird, wenn das Differentialgleichungssystem* (25) *reductibel ist, ein Element eines particulären Integralsystems dieser Differentialgleichungen einer Differentialgleichung erster Ordnung*

$$(26)\qquad \frac{dY_1}{dx} = f_1(x,\ Y_1)$$

genügen, welche im Allgemeinen eine lineare homogene von der Form

$$(27)\qquad \frac{dY_1}{dx} = P\,.\,Y_1$$

sein wird, in welcher P eine algebraische Function von x bedeutet, wenn nicht zwischen zwei analogen Elementen zweier Integralsysteme der Differentialgleichungen (25) *eine algebraische Beziehung stattfindet.*

Um für diesen Fall zu untersuchen, von welcher Form die Differentialgleichung erster Ordnung (26) sein muss, wenn die den eben erwähnten Ausnahmefall bildende algebraische Relation stattfindet, werde bemerkt, dass wenn wir zwei simultane Fundamentalsysteme von Integralen mit

$$y_{11},\ y_{12} \quad \text{und} \quad y_{21},\ y_{22}$$

bezeichnen, diese algebraische Beziehung in die Form

(28) $$y_{21} = F(x, y_{11})$$

gebracht und, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, angenommen werden darf, dass die Differentialgleichung (26) y_{11} zu einem ihrer particulären Integrale hat.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass y_{11} keine algebraische Function von x sein darf; denn wäre dies der Fall, so würde nach (28) auch y_{21}, und somit, da für die Differentialgleichungen (25)

$$y_1 = c_1 y_{11} + c_2 y_{21}$$

ist, auch jedes y_1 eine algebraische Function von x sein, woraus nach der Differentialbeziehung

$$\frac{dy_1}{dx} = A_{11} y_1 + A_{12} y_2$$

sich auch jedes y_2 algebraisch durch x darstellen würde, und somit die allgemeinen Integrale des Differentialgleichungsystems (25) algebraische Functionen von x wären, welcher Fall für die oben gestellte Frage kein Interesse hat. Da aber y_{11} auch als Integral der Differentialgleichung (26) betrachtet werden durfte, so können wir die algebraische Beziehung (28) auffassen als bestehend zwischen einem Integralelement y_{21} des Differentialgleichungsystems (25) und dem Integrale y_{11} der Differentialgleichung (26), welches letztere nicht schon einer Differentialgleichung niederer also 0ter Ordnung genügt (d. h. nicht algebraisch ist), und unter dieser Voraussetzung lässt sich der im VI. Abschnitte des ersten Kapitels entwickelte Satz von der Erhaltung der algebraischen Relation anwenden, indem für y_{11} ein willkürliches anderes Integral der Differentialgleichung (26), für y_{21} ein passendes Integralelement der Differentialgleichungen (25) gesetzt werden darf. Da aber nun alle Integrale der Differentialgleichung (26) nach früheren Sätzen Integrale von (25) sein müssen, so wird das allgemeine Integral von (26) in der Form darstellbar sein

$$\mu_1 y_{11} + \mu_2 y_{21},$$

worin μ_1 und μ_2 Functionen einer willkürlichen Constanten c sein werden, während das zugehörige Integral von (25) durch

$$m_1 y_{11} + m_2 y_{21}$$

ausgedrückt ist, worin m_1 und m_2 bestimmte Functionen von c sind, so dass sich aus der Gleichung (28) die Beziehung

$$(29)\qquad m_1 y_{11} + m_2 y_{21} = F(x, \mu_1 y_{11} + \mu_2 y_{21})$$

ergeben wird. Da die mit Hülfe von (28) aus (29) folgende Beziehung

$$(30)\quad m_1 y_{11} + m_2 F(x, y_{11}) = F(x, \mu_1 y_{11} + \mu_2 F(x, y_{11}))$$

eine in x, y_{11}, c identische sein muss, weil im entgegengesetzten Falle sich gegen die Voraussetzung y_{11} als algebraische Function von x ergeben würde, so liefert die Differentiation von (30) nach y_{11} und c die beiden Beziehungen

$$(31)\qquad \frac{\partial F(x, \mu_1 y_{11} + \mu_2 F(x, y_{11}))}{\partial(\mu_1 y_{11} + \mu_2 F(x, y_{11}))}\left(\mu_1 + \mu_2 \frac{\partial F(x, y_{11})}{\partial y_{11}}\right) = m_1 + m_2 \frac{\partial F(x, y_{11})}{\partial y_{11}}$$

und

$$(32)\quad \frac{\partial F(x, \mu_1 y_{11} + \mu_2 F(x, y_{11}))}{\partial(\mu_1 y_{11} + \mu_2 F(x, y_{11}))}\left(y_{11}\frac{d\mu_1}{dc} + F(x, y_{11})\frac{d\mu_2}{dc}\right) = y_{11}\frac{dm_1}{dc} + F(x, y_{11})\frac{dm_2}{dc},$$

und durch Division der beiden Gleichungen (31) und (32) die Beziehung*)

---

*) Es könnte auch sein, dass sich durch die Division der beiden Gleichungen eine Identität ergäbe; dann wäre

$$\mu_1 \frac{dm_1}{dc} = m_1 \frac{d\mu_1}{dc}, \quad \mu_2 \frac{dm_2}{dc} = m_2 \frac{d\mu_2}{dc}$$

$$\mu_1 \frac{dm_2}{dc} = m_1 \frac{d\mu_2}{dc}, \quad \mu_2 \frac{dm_1}{dc} = m_2 \frac{d\mu_1}{dc},$$

oder, wie leicht zu sehen,

$$m_1 = k\mu_1, \quad m_2 = k\mu_2,$$

worin k eine numerische, von c unabhängige Grösse bedeutet. Die Gleichung (29) ginge somit in

$$k(\mu_1 y_{11} + \mu_2 y_{21}) = F(x, \mu_1 y_{11} + \mu_2 y_{21})$$

über, also der nothwendigen Identität zufolge in

$$F(x, y) = ky,$$

und daher (28)

$$y_{21} = ky_{11},$$

was nicht angeht, da y_{11} und y_{21} entsprechende Elemente zweier Fundamentalsysteme von Integralen sein sollten.

$$(33)\quad AF(x,y_{11})\frac{\partial F(x,y_{11})}{\partial y_{11}}+By_{11}\frac{\partial F(x,y_{11})}{\partial y_{11}}+CF(x,y_{11})+Dy_{11}=0,$$

worin A, B, C, D von c abhängige Constante sind. Da diese Gleichung eine in y_{11} identische sein musste, so ergiebt sich, wenn

$$(34)\qquad F(x,y_{11})=u\cdot y_{11}$$

und somit (33) in die Form

$$(35)\qquad \frac{dy_{11}}{y_{11}}+\frac{Au+B}{Au^2+(B+C)u+D}\,du=0$$

gesetzt wird, durch Quadratur

$$(36)\quad \log y_{11}=-\int\frac{Au+B}{Au^2+(B+C)u+D}\,du+\log\psi(x),$$

worin $\psi(x)$ eine willkürliche algebraische Function von x bedeutet.

Nun ist, wenn A von Null verschieden ist,

$$(37)\qquad \frac{Au+B}{Au^2+(B+C)u+D}=\frac{\lambda}{u-\alpha}+\frac{1-\lambda}{u-\beta},$$

worin λ, α, β aus A, B, C, D zusammengesetzt sind*), und daher nach (36)

$$(38)\qquad \frac{\psi(x)}{y_{11}}=\left(\frac{u-\alpha}{u-\beta}\right)^{\lambda}(u-\beta),$$

worin λ eine rationale Zahl sein muss, da u eine algebraische Function von y_{11} sein soll, so dass sich endlich nach (28) und (34)

*) Wenn $\alpha=\beta$, so wird

$$\frac{Au+B}{A(u-\alpha)^2}=\frac{1}{u-\alpha}+\frac{B+A\alpha}{A}\,\frac{1}{(u-\alpha)^2},$$

und (36) geht somit in

$$\log\psi(x)-\log y_{11}=\log(u-\alpha)-\frac{B+A\alpha}{A}\,\frac{1}{u-\alpha}$$

über, woraus, weil $F(x,y_{11})$, also auch u algebraisch durch x und y_{11} ausgedrückt sein soll, $B+A\alpha=0$ also

$$\frac{\psi(x)}{y_{11}}=u-\alpha \text{ oder nach (28) } y_{21}-\alpha y_{11}=\psi(x)$$

folgen würde, was nicht angeht, da $y_{21}-\alpha y_{11}$ ein Integral und, da es gleich $\psi(x)$ ist, ein algebraisches Integral sein würde, was nicht sein sollte.

$$(39)\qquad \left(\frac{y_{21} - \alpha y_{11}}{y_{21} - \beta y_{11}}\right)^{\lambda} (y_{21} - \beta y_{11}) = \psi(x)$$

ergiebt. Setzt man nun

$$(40)\qquad y_{21} - \alpha y_{11} = \eta_{21}, \quad y_{21} - \beta y_{11} = \eta_{11},$$

so sind auch η_{21}, η_{11} erste Elemente von zwei Integralsystemen der Differentialgleichungen (25), und es geht somit die Beziehung (39) in

$$(41)\qquad \eta_{21} = \chi(x) \cdot \eta_{11}^{\sigma}$$

über, worin χ eine algebraische Function von x, und σ eine rationale Zahl bedeutet*).

Es bleibt somit nur noch die Frage zu beantworten, was aus der Beziehung (41) zwischen den beiden Integralelementen für die Natur dieser Grössen geschlossen werden kann. Aus der ersten der Gleichungen (25) folgt aber durch Differentiation

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = A_{11} \frac{dy_1}{dx} + A'_{11} y_1 + A_{12} \frac{dy_2}{dx} + A'_{12} y_2,$$

und durch Benutzung der zweiten und ersten Gleichung von (25)

$$(42)\qquad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \left(A_{11} + A_{22} + \frac{A'_{12}}{A_{12}}\right) \frac{dy_1}{dx} + \left(A'_{11} + A_{12} A_{21} - A_{11} A_{22} - A_{11} \frac{A'_{12}}{A_{12}}\right) y_1,$$

oder kürzer

---

*) Der Fall, in dem $A = 0$ ist, liefert nach (36) die Beziehung

$$\log y_{11} = -\frac{B}{B+C} \log \left(u + \frac{D}{B+C}\right) + \log \psi(x)$$

oder

$$\frac{\psi(x)}{y_{11}} = \left(u + \frac{D}{B+C}\right)^{\frac{B}{B+C}},$$

oder auch, da $\frac{B}{C}$ eine rationale Zahl sein muss,

$$\frac{\psi(x)}{y_{11}} = \frac{(y_{21} + h y_{11})^{\lambda}}{y_{11}^{\lambda}},$$

worin h eine Constante und λ rational ist; setzt man wiederum

$$y_{21} + h y_{11} = \eta_{21}, \quad y_{11} = \eta_{11},$$

so erhält man wie oben

$$\eta_{21} = \chi(x) \cdot \eta_{11}^{\sigma}.$$

$$(43)\qquad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = P\frac{dy_1}{dx} + Qy_1,$$

von welcher η_{21} und η_{11} Integrale sein müssen. Da aber aus (41) folgt, dass

$$\frac{d\eta_{21}}{dx} = \sigma\chi(x)\,\eta_{11}^{\sigma-1}\frac{d\eta_{11}}{dx} + \chi'(x)\,\eta_{11}^{\sigma}$$

und

$$\frac{d^2\eta_{21}}{dx^2} = \sigma\chi(x)\,\eta_{11}^{\sigma-1}\frac{d^2\eta_{11}}{dx^2} + \sigma(\sigma-1)\,\chi(x)\,\eta_{11}^{\sigma-2}\left(\frac{d\eta_{11}}{dx}\right)^2$$
$$+ 2\sigma\chi'(x)\,\eta_{11}^{\sigma-1}\frac{d\eta_{11}}{dx} + \chi''(x)\,\eta_{11}^{\sigma}$$

ist, so ergiebt sich durch Einsetzen dieser Werthe in (43) mit Berücksichtigung, dass auch η_{11} ein Integral dieser Differentialgleichung ist,

$$\sigma\chi(x)\,\eta_{11}^{\sigma-1}\left(P\frac{d\eta_{11}}{dx} + Q\eta_{11}\right) + \sigma(\sigma-1)\,\chi(x)\eta_{11}^{\sigma-2}\left(\frac{d\eta_{11}}{dx}\right)^2$$
$$+ 2\sigma\chi'(x)\,\eta_{11}^{\sigma-1}\frac{d\eta_{11}}{dx} + \chi''(x)\,\eta_{11}^{\sigma}$$
$$= P\left(\sigma\chi(x)\,\eta_{11}^{\sigma-1}\frac{d\eta_{11}}{dx} + \chi'(x)\,\eta_{11}^{\sigma}\right) + Q\chi(x)\eta_{11}^{\sigma}$$

oder

$$\left(\frac{d\eta_{11}}{dx}\right)^2 + \frac{2\chi'(x)}{\chi(x)}\frac{\eta_{11}}{\sigma-1}\frac{d\eta_{11}}{dx}$$
$$+ \frac{\eta_{11}^2}{\sigma(\sigma-1)\chi(x)}[Q\chi(x)(\sigma-1) - P\chi'(x) + \chi''(x)] = 0$$

oder endlich

$$(44)\qquad \frac{d\eta_{11}}{dx} = \omega(x)\cdot\eta_{11},$$

worin $\omega(x)$ eine algebraische Function von x bedeutet, und hieraus vermöge (41)

$$(45)\qquad \frac{d\eta_{21}}{dx} = \left[\sigma\omega(x) + \frac{\chi'(x)}{\chi(x)}\right]\eta_{21};$$

es genügen somit die beiden particulären Integralelemente η_{11} und η_{21} zwei linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wir wollen nun untersuchen, ob noch andere particuläre Integralelemente des Differentialgleichungssystems (25) homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen können; da diese sämmtlich die Form haben

$$(46)\qquad y_1 = \varrho_1 \eta_{11} + \varrho_2 \eta_{21},$$

so folgt nach (44) und (45)

$$(47)\qquad \frac{dy_1}{dx} = \varrho_1 \omega(x)\, \eta_{11} + \varrho_2 \left[\sigma \omega(x) + \frac{\chi'(x)}{\chi(x)}\right] \eta_{21},$$

und unter der Annahme, dass für ein Werthepaar von ϱ_1 und ϱ_2 y_1 auch einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(48)\qquad \frac{dy_1}{dx} = \Omega(x) \cdot y_1$$

genüge, würde sich durch Einsetzen von (46) und (47) in (48) die Beziehung ergeben

$$\varrho_1 \omega(x)\, \eta_{11} + \varrho_2 \left[\sigma \omega(x) + \frac{\chi'(x)}{\chi(x)}\right] \eta_{21} = \Omega(x)\, [\varrho_1 \eta_{11} + \varrho_2 \eta_{21}],$$

und somit durch Vergleichung mit (41) $\sigma = 1$ folgen. In diesem Falle würde aber auch umgekehrt jedes particuläre Integralelement von (25) einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung genügen; denn da für $\sigma = 1$ nach (41)

$$(49)\qquad \eta_{21} = \chi(x)\, \eta_{11}$$

ist, so kann (47) mit Hülfe von (46) in die Form gesetzt werden

$$\frac{dy_1}{dx} = \omega(x) y_1 + \varrho_2 \chi'(x) \frac{\varrho_1 \eta_{11} + \varrho_2 \eta_{21}}{\varrho_1 + \varrho_2 \chi(x)} = \left(\omega(x) + \varrho_2 \frac{\chi'(x)}{\varrho_1 + \varrho_2 \chi(x)}\right) y_1;$$

es genügt somit jedes Integral y_1 einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung.

Ist σ von der Einheit verschieden, so folgt aus den Gleichungen (46) und (47), die wir der Kürze halber, indem wir mit Θ_1 und Θ_2 algebraische Functionen von x bezeichnen, in die Form setzen

$$y_1 = \varrho_1 \eta_{11} + \varrho_2 \eta_{21}$$
$$\frac{dy_1}{dx} = \varrho_1 \Theta_1 \eta_{11} + \varrho_2 \Theta_2 \eta_{21},$$

durch Elimination von η_{11} und η_{21} mit Benutzung von (41) die *nichtlineare* Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\frac{dy_1}{dx} - \Theta_1 y_1}{(\Theta_2 - \Theta_1)\varrho_2} = \chi(x) \cdot \left(\frac{\frac{dy_1}{dx} - \Theta_2 y_1}{(\Theta_1 - \Theta_2)\varrho_1}\right)^{\sigma};$$

aber man sieht sofort, dass *diese nur durch eine algebraische Substitution aus einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung hergeleitet sein kann,*

da nach (41) und (46)

$$y_1 = \varrho_1 \eta_{11} + \varrho_2 \chi(x) \eta_{11}^{\sigma},$$

und η_{11} der Differentialgleichung

$$\frac{d\eta_{11}}{dx} = \omega(x) \eta_{11}$$

genügte.

Wir finden somit,

dass, wenn für zwei entsprechende Elemente zweier simultaner Fundamentalsysteme von Integralen eines Systems von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen eine algebraische Beziehung besteht, stets zwei entsprechende Elemente von Integralsystemen existiren, welche je einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügen; nur wenn der Quotient der beiden betrachteten Elemente eine algebraische Function der unabhängigen Variabeln ist, werden alle analogen Integralelemente ebensolchen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen, jedenfalls befriedigen sie solche algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung, welche durch algebraische Substitutionen aus linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung abgeleitet sind.

Stellen wir endlich das eben gefundene Resultat mit dem oben bewiesenen Satze von der Eigenschaft der Integrale *reductibler* linearer homogener Differentialgleichungsysteme zweiter Klasse zusammen, in welchem der Fall einer algebraischen Relation zwischen entsprechenden Integralelementen eine Ausnahme bildete, so erhalten wir das folgende Theorem:

Jedes reductible homogene lineare Differentialgleichungsystem zweiter Klasse besitzt mindestens zwei particuläre Integralelemente, welche je einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leisten, und jedes andere Integralelement befriedigt eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung, welche durch eine algebraische Substitution aus einer homogenen linearen Differentialgleichung derselben Ordnung abgeleitet ist.

VI. Ueber die Natur der algebraischen Beziehungen von Integralelementen irreductibler linearer Differentialgleichungsysteme.

1. Nachdem wir im letzten Abschnitte zur Vervollständigung der Irreductibilitätsuntersuchung eines Systems von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen die Frage nach der Existenz und Form einer algebraischen Beziehung zwischen zwei analogen Integralelementen für den Fall der *Reductibilität* jenes Systemes erörtert haben, wollen wir wiederum an dem speciellen Falle der linearen Differentialgleichungsysteme zweiter Klasse eine Methode für die Behandlung der Frage auseinandersetzen, welcher Natur für *irreductible* Differentialgleichungsysteme algebraische Beziehungen überhaupt sind, welche zwischen den Elementen simultaner Fundamentalsysteme von Integralen und der unabhängigen Variabeln bestehen.

Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, dass das System von Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}\, y_1 + A_{12}\, y_2 \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}\, y_1 + A_{22}\, y_2\,, \end{cases}$$

das wir nunmehr als *irreductibel* voraussetzen, vermöge der im Abschnitt I. (25) des dritten Kapitels angegebenen Substitutionen in die Normalform, in welcher $A_{11} + A_{22} = 0$ ist, also in das wiederum *irreductible**) Differentialgleichungsystem

*) Da nämlich die Annahme der Reductibilität des Differentialgleichungsystemes (2) nach der vorher geführten Untersuchung zur Folge haben würde, dass ein Integralelement ζ_1 desselben einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(\alpha)\qquad \frac{d\zeta_1}{dx} = Q\cdot\zeta_1$$

genügte, worin Q eine algebraische Function von x bedeutet, so würde, da die Substitutionen

$$y_1 = e^{\frac{1}{2}\int (A_{11}+A_{22})\,dx} z_1\,,\quad y_2 = e^{\frac{1}{2}\int (A_{11}+A_{22})\,dx} z_2$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ \dfrac{dz_2}{dx} = a_{21} z_1 - a_{11} z_2 \end{cases}$$

umgesetzt worden ist, für welches daher, wenn

$$z_{11}, z_{12} \quad \text{und} \quad z_{21}, z_{22}$$

zwei simultane Fundamentalsysteme von Integralen bedeuten, nach Gleichung (10) des bezeichneten Abschnittes die Beziehung besteht

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} = C,$$

worin C eine von Null verschiedene Constante bedeutet.

Nehmen wir nun an, es bestünde ausser (3) noch eine algebraische Beziehung zwischen jenen Fundamentalintegralen

$$(4) \qquad \omega(x, z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}) = 0,$$

so wird man durch Zusammenstellung dieser mit (3) eine algebraische Beziehung von der Form herstellen können

$$(5) \qquad z_{21} = \Omega(x, z_{11}, z_{12}).$$

Beachtet man, dass nach (2)

$$(6) \qquad \frac{dz_{11}}{dx} = a_{11} z_{11} + a_{12} z_{12}, \quad \frac{dz_{12}}{dx} = a_{21} z_{11} - a_{11} z_{12}$$

ist, dass ferner nach der ersten der Gleichungen (2)

$$(7) \qquad z_{22} = \frac{1}{a_{12}}\left(\frac{dz_{21}}{dx} - a_{11} z_{21}\right),$$

also nach (5)

---

das System (1) auf (2) reducirt haben, das dem Werthe ζ_1 von z_1 entsprechende Integral η_1 durch den Ausdruck

$$\eta_1 = e^{\frac{1}{2}\int (A_{11} + A_{22})\, dx} \zeta_1$$

bestimmt und somit in Folge (α) durch die Differentialgleichung erster Ordnung definirt sein

$$\frac{d\eta_1}{dx} = [Q + \tfrac{1}{2}(A_{11} + A_{22})]\eta_1 ;$$

es wäre also das System (1) der Annahme entgegen nicht irreductibel — also muss auch das Differentialgleichungssystem (2) irreductibel sein.

$$z_{22} = \frac{1}{a_{12}}\left\{\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial z_{11}}(a_{11}z_{11} + a_{12}z_{12}) + \frac{\partial \Omega}{\partial z_{12}}(a_{21}z_{11} - a_{11}z_{12}) - a_{11}\Omega\right\}$$

ist, so erhält man durch Einsetzen in die Gleichung (3) die folgende Beziehung

$$\frac{z_{11}}{a_{12}}\left\{\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial z_{11}}(a_{11}z_{11} + a_{12}z_{12}) + \frac{\partial \Omega}{\partial z_{12}}(a_{21}z_{11} - a_{11}z_{12}) - a_{11}\Omega\right\} - z_{12}\Omega = C,$$

welche ausser x nur die Grössen z_{11} und z_{12} enthält. Aber diese Gleichung muss eine in allen diesen Grössen identische sein; denn wäre dies nicht der Fall, so ergäbe sich z_{12} als algebraische Function von z_{11}, was der Annahme der Irreductibilität des Differentialgleichungsystems (2) nach der früher gegebenen Definition derselben widerstreitet. Es wird somit die Gleichung (9) auch bestehen bleiben, wenn man für z_{11} und z_{12} beliebige andere Integralsysteme ζ_{11} und ζ_{12} der Differentialgleichungen (2) setzt; bestimmt man nun eine Grösse ζ_{21} aus der Gleichung

$$\zeta_{21} = \Omega(x, \zeta_{11}, \zeta_{12}), \tag{10}$$

und zu dieser eine Grösse ζ_{22} aus der Beziehung

$$\zeta_{22} = \frac{1}{a_{12}}\left(\frac{d\zeta_{21}}{dx} - a_{11}\zeta_{21}\right), \tag{11}$$

so werden die Grössen ζ_{11}, ζ_{12}, ζ_{21}, ζ_{22} offenbar die Gleichung befriedigen

$$\zeta_{11}\zeta_{22} - \zeta_{12}\zeta_{21} = C, \tag{12}$$

da die Werthe ζ_{21}, ζ_{22} aus (10) und (11) in (12) eingesetzt die identische Gleichung (9) liefern. Nun waren ζ_{11} und ζ_{12} ein Integralsystem von (2), und wir behaupten, dass auch ζ_{21} und ζ_{22}, welche durch die Gleichungen (10) und (11) bestimmt sind, ebenfalls ein Integralsystem dieser Differentialgleichungen bilden. Denn differentiirt man die Gleichung (12) und benutzt die Beziehungen

$$\frac{d\zeta_{11}}{dx} = a_{11}\zeta_{11} + a_{12}\zeta_{12}, \quad \frac{d\zeta_{12}}{dx} = a_{21}\zeta_{11} - a_{11}\zeta_{12}, \quad \frac{d\zeta_{21}}{dx} = a_{11}\zeta_{21} + a_{12}\zeta_{22},$$

so ergiebt sich unmittelbar

$$\frac{d\zeta_{22}}{dx} = a_{21}\zeta_{21} - a_{11}\zeta_{22}, \tag{13}$$

und somit ζ_{21} und ζ_{22} ein Integralsystem von (2). In der Gleichung (12) sind also ζ_{11} und ζ_{12} ein willkürliches, ζ_{21} und ζ_{22} ein dazu passendes System von Integralen des Differentialgleichungsystems (2), so dass wir

$$(14)\qquad \begin{cases} \zeta_{11} = \mu_1 z_{11} + \mu_2 z_{21} & \zeta_{12} = \mu_1 z_{12} + \mu_2 z_{22} \\ \zeta_{21} = m_1 z_{11} + m_2 z_{21} & \zeta_{22} = m_1 z_{12} + m_2 z_{22} \end{cases}$$

erhalten, worin μ_1, μ_2 völlig willkürlich, m_1, m_2 aber so zu bestimmen sind, dass die Gleichung (12) befriedigt wird oder dass, wie mit Rücksicht auf (3) unmittelbar zu sehen,

$$(15)\qquad \mu_1 m_2 - m_1 \mu_2 = 1$$

wird. Wir finden also zunächst, dass die Gleichung (10) die Form annimmt

$$(16)\quad m_1 z_{11} + m_2 z_{21} = \Omega(x, \mu_1 z_{11} + \mu_2 z_{21}, \mu_1 z_{12} + \mu_2 z_{22}),$$

oder nach (5) und (7)

$$(17)\qquad m_1 z_{11} + m_2 \Omega(x, z_{11}, z_{12})$$
$$= \Omega\Big[x, \mu_1 z_{11} + \mu_2 \Omega(x, z_{11}, z_{12}),$$
$$\mu_1 z_{12} + \frac{\mu_2}{a_{12}}\Big(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial z_{11}}(a_{11} z_{11} + a_{12} z_{12})$$
$$+ \frac{\partial \Omega}{\partial z_{12}}(a_{21} z_{11} - a_{11} z_{12}) - a_{11}\Omega\Big)\Big],$$

worin μ_1 und μ_2 beliebige, m_1 und m_2 von diesen abhängige und durch die Gleichung (15) mit einander verbundene Zahlen bedeuten. Da aber die Gleichung (17) gegen die frühere Annahme eine algebraische Beziehung zwischen z_{11} und z_{12} liefern würde, so muss diese eine in allen in ihr vorkommenden Grössen identische sein, und man erhält aus (17), wenn man $\mu_2 = 0$ setzt, nach (15)

$$(18)\quad \Omega[x, \mu_1 z_{11}, \mu_1 z_{12}] = m_1 z_{11} + \frac{1}{\mu_1}\Omega(x, z_{11}, z_{12}),$$

welche wiederum in z_{11} und z_{12} identisch sein muss. Differentiirt man diese Gleichung nach z_{11} und z_{12}, so ergiebt sich

$$(19)\qquad \frac{\partial \Omega(x, \mu_1 z_{11}, \mu_1 z_{12})}{\partial \mu_1 z_{11}}\mu_1 = m_1 + \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial \Omega(x, z_{11}, z_{12})}{\partial z_{11}}$$

und

$$(20)\qquad \frac{\partial\Omega[x,\mu_1 z_{11},\mu_1 z_{12}]}{\partial\mu_1 z_{12}}\mu_1=\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial\Omega(x,z_{11},z_{12})}{\partial z_{12}},$$

und wenn man diese beiden Gleichungen mit dem nach μ_1 genommenen Differential von (18)

$$(21)\qquad \frac{\partial\Omega[x,\mu_1 z_{11},\mu_1 z_{12}]}{\partial\mu_1 z_{11}}z_{11}+\frac{\partial\Omega[x,\mu_1 z_{11},\mu_1 z_{12}]}{\partial\mu_1 z_{12}}z_{12}$$
$$=\frac{dm_1}{d\mu_1}z_{11}-\frac{1}{\mu_1^2}\Omega(x,z_{11},z_{12})$$

verbindet, so folgt

$$(22)\quad m_1 z_{11}+\frac{1}{\mu_1}z_{11}\frac{\partial\Omega(x,z_{11},z_{12})}{\partial z_{11}}+\frac{1}{\mu_1}z_{12}\frac{\partial\Omega(x,z_{11},z_{12})}{\partial z_{12}}$$
$$=\mu_1\frac{dm_1}{d\mu_1}z_{11}-\frac{1}{\mu_1}\Omega(x,z_{11},z_{12})$$

oder

$$(23)\qquad z_{11}\frac{\partial\Omega(x,z_{11},z_{12})}{\partial z_{11}}+z_{12}\frac{\partial\Omega(x,z_{11},z_{12})}{\partial z_{12}}$$
$$=\mu_1\left(\mu_1\frac{dm_1}{d\mu_1}-m_1\right)z_{11}-\Omega(x,z_{11},z_{12}).$$

Diese Gleichung soll nun eine in den Grössen x, z_{11}, z_{12} identische sein, und man sieht leicht, dass, wenn χ irgend eine willkürliche Function bedeutet, jeder in dem Ausdrucke

$$(24)\quad \Omega(x,z_{11},z_{12})=\frac{1}{z_{11}}\chi\left(x,\frac{z_{12}}{z_{11}}\right)+\frac{\mu_1^2 m_1'-m_1\mu_1}{2}z_{11}$$

enthaltene Werth von Ω der Gleichung (23) Genüge leistet, oder dass mit Berücksichtigung von (5), wenn ausserdem

$$\frac{\mu_1^2 m_1'-m_1\mu_1}{2}=c$$

gesetzt wird,

$$z_{21}=\frac{1}{z_{11}}\chi\left(x,\frac{z_{12}}{z_{11}}\right)+cz_{11}$$

oder

$$(25)\qquad z_{12}=z_{11}\omega\big(x,z_{11}(z_{21}-cz_{11})\big)$$

folgt, worin ω zunächst noch eine willkürliche, aber der Forderung gemäss algebraische Function sein darf.

Ersetzt man in (25) wie oben in (16) z_{11} durch z_{21}, z_{12} durch z_{22}, nimmt also $\mu_1=0$, $\mu_2=1$, so dass nach (15) $m_1=-1$ wird, und z_{21} durch $-z_{11}+m_2 z_{21}$ zu ersetzen ist, so geht die Gleichung (25) in

$$(26)\qquad z_{22} = z_{21}\,\omega(x,\, z_{21}[-z_{11} + (m_2 - c)z_{21}])$$

über, und es folgt aus (25) und (26) nach (3)

$$(27)\; z_{11}z_{21}\{\omega(x, z_{21}[-z_{11} + (m_2 - c)z_{21}]) - \omega(x, z_{11}(z_{21} - cz_{11}))\} = C,$$

welche wiederum, da zwischen z_{11} und z_{21} der Irreductibilität des Differentialgleichungsystems wegen keine algebraische Beziehung bestehen darf, eine identische sein muss. Zunächst werde angenommen, dass c von Null verschieden ist; setzt man sodann $z_{21} = cz_{11}$, so folgt, wenn

$$cz_{11}^2 = t \quad \text{und} \quad m_2 - c = k$$

gesetzt wird, für beliebige t

$$(28)\qquad \omega(x, (kc - 1)t) = \frac{C}{t} + \omega(x, 0),$$

welche Gleichung offenbar unmöglich ist. Ist dagegen $c = 0$, so geht die Gleichung (27) in

$$(29)\quad z_{11}z_{21}\{\omega(x, z_{21}[-z_{11} + m_2 z_{21}]) - \omega(x, z_{11}z_{21})\} = C$$

über, und wenn man unter der Voraussetzung, dass m_2 von Null verschieden ist,

$$z_{11} = m_2 z_{21} \quad \text{und} \quad m_2 z_{21}^2 = t$$

setzt, so wird

$$(30)\qquad \omega(x,\, t) = \omega(x,\, 0) - \frac{C}{t},$$

welche Gleichung wiederum unstatthaft ist; es bleibt somit nur noch der Fall $c = 0$, $m_2 = 0$ zu betrachten übrig, für welchen die Gleichungen (25) und (26) in

$$(31)\qquad z_{12} = z_{11}\,\omega(x,\, z_{11}z_{21})$$

und

$$(32)\qquad z_{22} = z_{21}\,\omega(x,\, -z_{11}z_{21})$$

übergehen. Setzt man aber in die erste dieser beiden Gleichungen $z_{11} + z_{21}$ statt z_{11}, und $z_{12} + z_{22}$ statt z_{12}, so muss wegen $\mu_1 = \mu_2 = 1$ statt z_{21} nach (15) $m_1 z_{11} + (m_1 + 1)z_{21}$ substituirt werden, und man erhält

$$(33)\; z_{12} + z_{22} = (z_{11} + z_{21})\,\omega(x, (z_{11} + z_{21})[m_1 z_{11} + (m_1 + 1)z_{21}]),$$

oder in Verbindung mit (31) und (32) die wiederum identische Gleichung

$$(34) \qquad z_{11}\,\omega(x, z_{11}z_{21}) + z_{21}\,\omega(x, -z_{11}z_{21})$$
$$= (z_{11} + z_{21})\,\omega(x, (z_{11} + z_{21})[m_1 z_{11} + (m_1 + 1) z_{21}]).$$

Setzt man in dieser $z_{21} = 0$, so folgt

$$(35) \qquad z_{11}\omega(x, 0) = z_{11}\omega(x, m_1 z_{11}^2),$$

und somit wieder $m_1 = 0$, so dass (34) in

$$z_{11}\omega(x, z_{11}z_{21}) + z_{21}\omega(x, -z_{11}z_{21}) = (z_{11} + z_{21})\omega(x, z_{21}(z_{11} + z_{21}))$$

übergeht, woraus sich für $z_{11} = 0$

$$z_{21}\omega(x, 0) = z_{21}\omega(x, z_{21}^2)$$

ergeben würde, was wieder nicht angeht; es ist somit die Möglichkeit der Annahme einer algebraischen Beziehung von der Form (5) also auch (4) ausgeschlossen, und wir erhalten daher den Satz,

dass für ein irreductibles lineares homogenes Differentialgleichungsystem zweiter Klasse in der Normalform eine algebraische Beziehung zwischen den Elementen eines simultanen Fundamentalsystems von Integralen überhaupt nicht existiren kann.

Dass dieser Satz auch für Differentialgleichungsysteme 2ter Klasse, welche nicht die Normalform besitzen, gültig bleibt, geht aus der Natur der Substitutionen

$$y_1 = e^{\frac{1}{2}\int (A_{11} + A_{22})\,dx} z_1, \quad y_2 = e^{\frac{1}{2}\int (A_{11} + A_{22})\,dx} z_2$$

hervor, welche das System in die Normalform überführen, und aus der Ueberlegung, dass eine algebraische Beziehung zwischen den Elementen simultaner Fundamentalsysteme von Integralen eine homogene sein wird, da sie unverändert bleiben muss für die Substitutionen beliebiger Integrale, also linearer Functionen der Fundamentalintegrale.

VII. Ueber die allgemeine Form der Beziehungen zwischen Integralen linearer Differentialgleichungssysteme beliebiger Klasse und Quadraturen algebraischer Functionen.

1. Sei das lineare Differentialgleichungssystem n^{ter} Klasse vorgelegt

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n + A_{1n+1} \\ \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2n}y_n + A_{2n+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \cdots + A_{nn}y_n + A_{nn+1}, \end{cases}$$

in welchem $A_{\alpha\beta}$ algebraische Functionen von x bedeuten, und sei *ein* Integralelement y_{11} eines simultanen Fundamentalsystems

$$y_{11},\ y_{12},\ \cdots y_{1n}$$

eine algebraische Function von k Integralen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_k$ der k irreductibeln Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(2)\, F_1\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}\right)=0,\ F_2\left(x, z_2, \frac{dz_2}{dx}\right)=0, \cdots F_k\left(x, z_k, \frac{dz_k}{dx}\right)=0,$$

also z. B. y_{11} eine Lösung der algebraischen Gleichung

$$(3)\quad Y_1^{\nu} + \varphi_1(x, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_k)\, Y_1^{\nu-1} + \cdots + \varphi_\nu(x, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_k) = 0,$$

in welcher $\varphi_1, \dots \varphi_k$ rationale Functionen bedeuten, so folgt unmittelbar durch Differentiation von (3) nach x mit Berücksichtigung der Gleichungen (2), dass auch alle Differentialquotienten von y_{11} algebraische Functionen von $x, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_k$ sind, und da aus der ersten der Gleichungen (1) durch successive Differentiation mit Benutzung der übrigen Gleichungen (1) sich ein Gleichungssystem der Form ergiebt

$$(4)\begin{cases}\frac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n + A_{1n+1} \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = B_{21}y_1 + B_{22}y_2 + \cdots + B_{2n}y_n + B_{2n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} = B_{n-11}y_1 + B_{n-12}y_2 + \cdots + B_{n-1n}y_n + B_{n-1n+1}\,,\end{cases}$$

in welchem die Grössen $B_{21}, \ldots B_{n-1n+1}$ wieder algebraische Functionen von x bedeuten, so folgt, *dass, wenn y_{11}, also auch dessen Ableitungen algebraische Functionen von $x, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k$ sind, sich im Allgemeinen auch die zugehörigen Elemente des simultanen Integralsystems $y_{12}, \ldots y_{1n}$ algebraisch durch eben diese Grössen ausdrücken lassen werden**).

Wendet man nun mit Benutzung dieser Bemerkung den im VI. Abschnitte des ersten Kapitels hergeleiteten Satz I. auf das lineare Differentialgleichungsystem (1) an, so ergiebt sich der folgende, für die weiteren Anwendungen wichtige Satz:

Ist für ein lineares Differentialgleichungsystem (1), *in welchem die Grössen $A_{\alpha\beta}$ algebraische Functionen von x bedeuten, ein Integralelement y_{11} desselben eine algebraische Function von x und k Integralen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k$ der irreductibeln Differentialgleichungen erster Ordnung* (2) *von der Form*

$$(5) \qquad \varphi(x, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k, y_{11}) = 0\,,$$

so wird unter der Voraussetzung, dass nicht schon zwischen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k$ und x eine algebraische Relation stattfindet, diese Beziehung (5) *erhalten bleiben, wenn man für $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k$ beliebige andere Integrale der irreductibeln Differentialgleichungen* (2)**) *und für y_{11} ein passendes Integralelement des Systems* (1) *substituirt; und zwar: bildet man nach den Auseinandersetzungen*

*) Für den Fall, dass die durch Differentiation entstehenden Gleichungen identisch werden, ist das System (1) offenbar auf ein lineares System niederer Klasse zurückführbar.

**) wobei die Annahme der Irreductibilität wegen der Ausschliessung einer algebraischen Relation der Integrale unter einander, also auch der Existenz algebraischer Integrale selbst nur die *algebraische* Irreducti-

des ersten Kapitels eine Function t_1, *welche die Lösung einer mit Adjungirung von* $x, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k$ *und den Coefficienten* $A_{\alpha\beta}$ *der Differentialgleichungen algebraisch irreductibeln Gleichung*

$$(6)\quad t^\mu + \omega_1(x, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_k, A_{\alpha\beta}) t^{\mu-1} + \cdots + \omega_\mu(x, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_k, A_{\alpha\beta}) = 0$$

ist, und durch welche mit Hinzuziehung von $x, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k, A_{\alpha\beta}$ *sich die den Gleichungen* (2) *entsprechenden Werthe von*

$$\frac{d\zeta_1}{dx}, \frac{d\zeta_2}{dx}, \ldots \frac{d\zeta_k}{dx}$$

rational ausdrücken lassen, und stellt den mit Adjungirung von $x, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k, A_{\alpha\beta}$ *und* t_1 *irreductibeln Factor der Gleichung* (3) *auf, der zu einer seiner Lösungen das Integralelement* y_{11} *hat und lauten möge:*

$$(7)\qquad Y_1^\delta + \psi_1(x, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_k, A_{\alpha\beta}, t_1) Y_1^{\delta-1} + \cdots$$
$$+ \psi_\delta(x, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_k, A_{\alpha\beta}, t_1) = 0,$$

so werden zunächst die zugehörigen Elemente eines simultanen Integralsystems im Allgemeinen rational durch Y_1 *und dessen Ableitungen, also nach* (7) *und* (6) *rational durch* $x, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k, t_1, A_{\alpha\beta}$ *und* Y_1 *ausdrückbar sein und somit die Form haben*

$$(8)\quad \begin{cases} Y_2 = R_2(x, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_k, A_{\alpha\beta}, t_1, Y_1) \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ Y_n = R_n(x, \zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_k, A_{\alpha\beta}, t_1, Y_1), \end{cases}$$

worin $R_2, R_3, \ldots R_n$ *rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten; dann werden einerseits sowohl für die gegebenen Werthe von* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k$ *und* t_1 *alle* δ *Lösungen* Y_1 *der Gleichung* (7) *mit den zugehörigen eindeutig aus* (8) *hervorgehenden Werthen von* $Y_2, \ldots Y_n$ *ein simultanes Integralsystem von* (1) *bilden, als auch dasselbe stattfinden, wenn in* (7) *und* (8) *statt* t_1 *jede*

bilität der Differentialgleichungen (2) in Bezug auf die Differentialquotienten

$$\frac{dz_1}{dx}, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{dz_k}{dx}$$

erfordert.

beliebige der μ Lösungen der Gleichung (6) *gewählt wird, andererseits werden auch, wenn für $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k$ beliebige andere Integrale $\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \ldots \bar{\zeta}_k$ ihrer resp. Differentialgleichungen* (2) *und eine willkürliche dazu gehörige Lösung $\bar{t}$ der Gleichung* (6) *für t_1 gewählt wird, die sämmtlichen δ Lösungen der Gleichung*

$$(9) \qquad \bar{Y}_1^\delta + \psi_1(x, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \cdots \bar{\zeta}_k, A_{\alpha\beta}, \bar{t})\, \bar{Y}_1^{\delta-1} + \cdots + \psi_\delta(x, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \cdots \bar{\zeta}_k, A_{\alpha\beta}, \bar{t}) = 0$$

sowie die dazugehörigen Werthe von

$$(10) \qquad \begin{cases} \bar{Y}_2 = R_2(x, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \cdots \bar{\zeta}_k, A_{\alpha\beta}, \bar{t}, \bar{Y}_1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{Y}_n = R_n(x, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \cdots \bar{\zeta}_k, A_{\alpha\beta}, \bar{t}, \bar{Y}_1) \end{cases}$$

stets zusammengehörige Elemente eines Integralsystems der Differentialgleichungen (1) *liefern.*

2. Wenn das System (2) der Differentialgleichungen erster Ordnung die Form hat

$$(11) \quad \frac{dz_1}{dx} = f_1(s_1)\frac{ds_1}{dx}, \quad \frac{dz_2}{dx} = f_2(s_2)\frac{ds_2}{dx}, \cdots \frac{dz_k}{dx} = f_k(s_k)\frac{ds_k}{dx},$$

worin $f_1, f_2, \ldots f_k$ algebraische Functionen ihrer Argumente, und $s_1, s_2, \ldots s_k$ algebraische Functionen von x sind, so sieht man aus dem eben ausgesprochenen Satze und den in dem angeführten Kapitel für diesen speciellen Fall gegebenen Auseinandersetzungen zunächst, dass, wenn zwischen einem Integralelement y_{11} des Differentialgleichungsystems (1) und den k algebraisch von einander unabhängigen Quadraturen

$$(12)\, i_1 = \left(\int f_1(s)\,ds\right)_{s=s_1}, i_2 = \left(\int f_2(s)\,ds\right)_{s=s_2}, \cdots i_k = \left(\int f_k(s)\,ds\right)_{s=s_k}$$

eine algebraische Beziehung besteht, die mit Adjungirung von

$$x, A_{\alpha\beta}, s_1, s_2, \ldots s_k, f_1(s_1), f_2(s_2) \ldots f_k(s_k), i_1, i_2, \ldots i_k$$

durch die irreductible algebraische Gleichung dargestellt sein mag

$$(13)\; Y_1^\nu + \varphi_1(x, A_{\alpha\beta}, s_1, \cdots s_k, f_1(s_1), \cdots f_k(s_k), i_1, \cdots i_k)\, Y_1^{\nu-1} + \cdots + \varphi_\nu(x, A_{\alpha\beta}, s_1, \cdots s_k, f_1(s_1), \cdots f_k(s_k), i_1, \cdots i_k) = 0,$$

deren eine Lösung y_{11} ist, dann auch, wenn wieder mit Hülfe von (1) und (13) die zugehörigen Integralelemente in der im Allgemeinen gültigen Form

$$(14)\begin{cases} Y_2 = \Re_2(x, A_{\alpha\beta}, s_1, \cdots s_k, f_1(s_1), \cdots f_k(s_k), i_1, \cdots i_k, Y_1) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ Y_n = \Re_n(x, A_{\alpha\beta}, s_1 \cdots s_k, f_1(s_1), \cdots f_k(s_k), i_1, \cdots i_k, Y_1) \end{cases}$$

dargestellt werden, worin $\Re_2, \Re_3, \ldots \Re_n$ rationale Functionen bedeuten, sämmtliche Lösungen der Gleichung

$$(15)\ \overline{Y}_1^{\nu} + \varphi_1(x, A_{\alpha\beta}, s_1, \cdots s_k, f_1(s_1), \cdots f_k(s_k), i_1 + c_1, \cdots i_k + c_k)\, \overline{Y}_1^{\nu-1}$$
$$\cdots + \varphi_k(x, A_{\alpha\beta}, s_1, \cdots s_k, f_1(s_1), \cdots f_k(s_k), i_1 + c_1, \cdots i_k + c_k) = 0$$

zusammengestellt mit den Beziehungen

$$(16)\begin{cases} \overline{Y}_2 = \Re_2(x, A_{\alpha\beta}, s_1, \cdots s_k, f_1(s_1), \cdots f_k(s_k), i_1 + c_1, \cdots i_k + c_k, \overline{Y}_1) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \overline{Y}_n = \Re_n(x, A_{\alpha\beta}, s_1, \cdots s_k, f_1(s_1), \cdots f_k(s_k), i_1 + c_1, \cdots i_k + c_k, \overline{Y}_1), \end{cases}$$

worin $c_1, c_2, \ldots c_k$ willkürliche Constanten bedeuten, Integralsysteme der Differentialgleichungen (1) liefern.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass dieser Satz auch noch mit Rücksicht auf das vorhergegangene Theorem darin allgemeiner ausgesprochen werden könnte, dass man für die algebraischen Functionen von x

$$s_1, \ldots s_k, f_1(s_1), \ldots f_k(s_k)$$

diejenige algebraische Function t von x einführt, durch welche sich diese mit Hülfe der Coefficienten der Differentialgleichungen *rational* ausdrücken lassen; von dieser Bemerkung werden wir im nächsten Kapitel mannigfache Anwendungen zu machen haben.

3. Aus dem eben aufgestellten Satze können wir nun schon einige wichtige Folgerungen für den Grad der Gleichung (13) herleiten. Fassen wir für eine beliebige, aber bestimmte Wahl der Constanten $c_1, c_2, \ldots c_k$ ein durch die Gleichungen (15) und (16) definirtes Integralsystem

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$$

der Differentialgleichungen (1) auf, so werden auch, wenn wir statt dieser $c_1, c_2, \ldots c_k$

$$c_1, c_2, \cdots c_r + \delta c_r, \cdots c_k$$

setzen, worin δc_r eine unendlich kleine constante Grösse bedeutet, die entsprechenden Ausdrücke

$$\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2, \ldots \overline{\eta}_n$$

ein Integralsystem dieser Differentialgleichungen bilden, und somit

$$\frac{\overline{\eta}_1 - \eta_1}{\delta c_r}, \quad \frac{\overline{\eta}_2 - \eta_2}{\delta c_r}, \quad \ldots \frac{\overline{\eta}_n - \eta_n}{\delta c_r}$$

oder

$$\frac{\delta \eta_1}{\delta c_r}, \quad \frac{\delta \eta_2}{\delta c_r}, \quad \ldots \frac{\delta \eta_n}{\delta c_r}$$

zusammengehörige Integrale des Differentialgleichungsystemes

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = A_{11} y_1 + A_{12} y_2 + \cdots + A_{1n} y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = A_{21} y_1 + A_{22} y_2 + \cdots + A_{2n} y_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{dy_n}{dx} = A_{n1} y_1 + A_{n2} y_2 + \cdots + A_{nn} y_n \end{cases}$$

sein, welches entweder das reducirte von (1) ist, oder wenn dieses selbst homogen war, mit jenem identisch ist. Da diese Schlüsse nun für wiederholte Differentiation beliebiger der k Constanten $c_1, c_2, \ldots c_k$ gültig bleiben, so erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn ein algebraisches lineares homogenes oder nicht homogenes Differentialgleichungsystem ein algebraisch irreductibel von x, den Coefficienten des Differentialgleichungsystems, den algebraisch von einander unabhängigen Quadraturen

$$i_1 = \left(\int f_1(s)\,ds\right)_{s=s_1}, \; i_2 = \left(\int f_2(s)\,ds\right)_{s=s_2}, \ldots i_k = \left(\int f_k(s)\,ds\right)_{s=s_k},$$

und den algebraischen Functionen von x

$$s_1, s_2, \ldots s_k, f_1(s_1), f_2(s_2), \ldots f_k(s_k)$$

abhängiges Integralelement η_1 *besitzt, woraus sich im Allgemeinen die ähnliche Abhängigkeit für die ergänzenden Integralelemente* $\eta_2, \ldots \eta_n$ *in der oben dargelegten Art ergiebt, so werden, wenn man in diesen Ausdrücken für* $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ *die Quadraturen* i_1, $i_2, \ldots i_k$ *um die willkürlichen Constanten* $c_1, c_2, \ldots c_k$ *vermehrt, die Ausdrücke*

$$\frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k}\eta_1}{\partial c_1^{\mu_1}\partial c_2^{\mu_2}\ldots\partial c_k^{\mu_k}}, \quad \frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k}\eta_2}{\partial c_1^{\mu_1}\partial c_2^{\mu_2}\ldots\partial c_k^{\mu_k}}, \quad \ldots \quad \frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k}\eta_k}{\partial c_1^{\mu_1}\partial c_2^{\mu_2}\ldots\partial c_k^{\mu_k}}$$

wiederum für willkürliche Werthe der Constanten $c_1, c_2, \ldots c_k$ *zusammengehörige Integralsysteme des zu* (1) *gehörigen reducirten homogenen linearen Differentialgleichungssystems* (17) *bilden; setzt man sämmtliche Constanten gleich Null, so erhält man als ein particuläres Integralsystem dieses reducirten Differentialgleichungssystems die Ausdrücke*

$$\frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k}\eta_1}{\partial i_1^{\mu_1}\partial i_2^{\mu_2}\ldots\partial i_k^{\mu_k}}, \quad \frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k}\eta_2}{\partial i_1^{\mu_1}\partial i_2^{\mu_2}\ldots\partial i_k^{\mu_k}}, \quad \ldots \quad \frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k}\eta_n}{\partial i_1^{\mu_1}\partial i_2^{\mu_2}\ldots\partial i_k^{\mu_k}},$$

wobei das reducirte Differentialgleichungssystem zugleich das vorgelegte ist, wenn das letztere selbst schon ein homogenes war.

4. Greifen wir nun eine der Quadraturen i_r heraus, so werden wir also nach dem eben bewiesenen Satze für das reducirte System (17) die folgenden n particulären Integralsysteme erhalten

$$(18) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\eta_1}{\partial i_r}, & \dfrac{\partial\eta_2}{\partial i_r}, & \ldots \dfrac{\partial\eta_n}{\partial i_r} \\[2ex] \dfrac{\partial^2\eta_1}{\partial i_r^2}, & \dfrac{\partial^2\eta_2}{\partial i_r^2}, & \ldots \dfrac{\partial^2\eta_n}{\partial i_r^2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial^{n+1}\eta_1}{\partial i_r^{n+1}}, & \dfrac{\partial^{n+1}\eta_2}{\partial i_r^{n+1}}, & \ldots \dfrac{\partial^{n+1}\eta_n}{\partial i_r^{n+1}}, \end{cases}$$

die nach den früher bewiesenen allgemeinen Sätzen, da nur n simultane Fundamentalsysteme von Integralen für die Differentialgleichungen (17) bestehen können, durch Gleichungen von der Form mit einander verbunden sein müssen:

$$
(19) \quad \begin{cases}
\alpha_0 \dfrac{\partial^{n+1} \eta_1}{\partial i_r^{n+1}} + \alpha_1 \dfrac{\partial^n \eta_1}{\partial i_r^n} + \cdots + \alpha_n \dfrac{\partial \eta_1}{\partial i_r} = 0 \\
\alpha_0 \dfrac{\partial^{n+1} \eta_2}{\partial i_r^{n+1}} + \alpha_1 \dfrac{\partial^n \eta_2}{\partial i_r^n} + \cdots + \alpha_n \dfrac{\partial \eta_2}{\partial i_r} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_0 \dfrac{\partial^{n+1} \eta_n}{\partial i_r^{n+1}} + \alpha_1 \dfrac{\partial^n \eta_n}{\partial i_r^n} + \cdots + \alpha_n \dfrac{\partial \eta_n}{\partial i_r} = 0,
\end{cases}
$$

in denen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ Constanten bedeuten, und diese Gleichungen müssen offenbar in den in ihnen vorkommenden Grössen $i_1, i_2, \ldots i_k$ identisch sein, da $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ algebraische Functionen von $x, i_1, i_2, \ldots i_k$ sind, und im entgegengesetzten Falle sich gegen die Voraussetzung algebraische Beziehungen zwischen den Quadraturen $i_1, i_2, \ldots i_k$ ergeben würden. Fasst man nun eine dieser Gleichungen z. B.

$$
(20) \quad \alpha_0 \frac{\partial^{n+1} \eta_\varrho}{\partial i_r^{n+1}} + \alpha_1 \frac{\partial^n \eta_\varrho}{\partial i_r^n} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial \eta_\varrho}{\partial i_r} = 0
$$

auf, so kann diese wegen ihrer Identität in all' den Grössen, die sie enthält, als eine Differentialgleichung $n + 1^{\text{ter}}$ Ordnung mit der unabhängigen Variabeln i_r, der abhängigen Variabeln η_ϱ und den constanten Coefficienten $\alpha_0, \ldots \alpha_n$ aufgefasst werden, welche, da η_ϱ algebraisch von i_r abhängen sollte, ein algebraisches Integral haben würde. Da aber nach den im Abschnitte I. dieses Kapitels gegebenen Auseinandersetzungen von der Eindeutigkeit der Integrale linearer Differentialgleichungen singuläre Punkte der unabhängigen Variabeln i_r nur diejenigen sein können, welche es für die Coefficienten der Differentialgleichungen sind, diese aber hier Constanten waren, so folgt zunächst, dass für alle im Endlichen gelegenen Punkte, für welche η_ϱ nebst seinen n ersten Ableitungen beliebig gegebene endliche Werthe annehmen soll, die Integrale um diese Punkte herum endlich, stetig und eindeutig sein müssen*). Daraus folgt sogleich, dass η_ϱ sich

*) Wir discutiren hier nach den früher auseinandergesetzten allgemeinen Principien die Form der Integrale, die wir später, da das Differentialgleichungsystem constante Coefficienten hat, allgemein werden angeben können.

durch eine *Maclaurin*'sche Reihe, welche für alle Werthe von i_r convergent ist, darstellen lasse und somit, da es eine algebraische Function von i_r sein sollte, *eine ganze Function dieser Grösse sein wird.*

Aber es ist auch leicht zu sehen, dass η_ϱ *höchstens vom* n^{ten} *Grade in Bezug auf* i_r ist; denn wäre es vom $n+p^{\text{ten}}$ Grade, so würde aus der Gleichung (20) durch Einsetzen

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

sich ergeben, was ausgeschlossen ist.

Wir erhalten daher den folgenden Satz:

Wenn ein System von n linearen homogenen oder nicht homogenen Differentialgleichungen ein algebraisch irreductibel von x, den Coefficienten des Differentialgleichungsystems (1), *den algebraisch von einander unabhängigen Quadraturen* $i_1, i_2, \ldots i_k$ *und den algebraischen Functionen von x*

$$s_1, s_2, \ldots s_k, f_1(s_1), f_2(s_2), \ldots f_k(s_k)$$

abhängiges Integralelement η_1 *besitzt, so muss dieses eine ganze Function dieser Quadraturen sein, welche keine derselben in einem höheren Grade als dem* n^{ten} *enthält.*

Es mag noch hinzugefügt werden, dass, wenn das ursprüngliche Differentialgleichungsystem selbst ein homogenes war, man statt des Integralsystemes (18) des reducirten Differentialgleichungsystems die Zusammenstellung

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{llll} \eta_1, & \eta_2, & \ldots & \eta_n \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial i_r}, & \frac{\partial \eta_2}{\partial i_r}, & \ldots & \frac{\partial \eta_n}{\partial i_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^n \eta_1}{\partial i_r^n}, & \frac{\partial^n \eta_2}{\partial i_r^n}, & \ldots & \frac{\partial^n \eta_n}{\partial i_r^n} \end{array}\right.$$

wählen konnte, und wenn man nun hierauf genau dieselben Schlüsse wie oben anwendet, so sieht man sogleich,

dass im Falle der Homogeneität des linearen Differentialgleichungsystemes (1) *die ganze Function* η_1 *der Transcendenten* $i_1, i_2, \ldots i_k$ *keine derselben in einem höheren Grade als dem* $n-1^{\text{ten}}$ *enthalten wird.*

Beachtet man nun, dass die Coefficienten der einzelnen Glieder dieser ganzen Functionen der Quadraturen algebraische Functionen von x sind, und dass man durch successive Differentiation nach diesen Transcendenten $i_1, \ldots i_k$ nach dem oben bewiesenen Satze Elemente simultaner Integralsysteme des reducirten linearen Differentialgleichungsystems erhält, so folgt, da man so oft differentiiren kann, bis man zu einem jeden Coefficienten jener ganzen Function der Transcendenten gelangt,

dass unter den gemachten Voraussetzungen das reducirte lineare Differentialgleichungsystem algebraische Integralsysteme besitzen muss,

welche jedoch auch in Constanten übergehen können.

Hat somit das reducirte Differentialgleichungsystem keine algebraischen Integrale — die auch Constanten sein können — so kann auch das ursprüngliche keine Integrale besitzen, welche algebraisch aus Quadraturen algebraischer Functionen zusammengesetzt sind.

5. Wir wollen diese Betrachtungen mit der Herleitung einiger wichtigen Eigenschaften linearer Differentialgleichungsysteme mit einem algebraischen Integralsysteme beschliessen.

Wenn in einem Systeme homogener linearer Differentialgleichungen

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}\, y_1 + A_{12}\, y_2 + \cdots + A_{1n}\, y_n \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}\, y_1 + A_{22}\, y_2 + \cdots + A_{2n}\, y_n \\[1ex] \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\[1ex] \dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1}\, y_1 + A_{n2}\, y_2 + \cdots + A_{nn}\, y_n \end{cases}$$

alle Coefficienten *rationale* Functionen von x sind, und es ist ein Integralelement y_{11} eine algebraische Function von x, so werden sich

$$(23)\qquad \frac{dy_{11}}{dx}, \quad \frac{d^2 y_{11}}{dx^2}, \quad \ldots \frac{d^{n-1} y_{11}}{dx^{n-1}}$$

als Ableitungen einer algebraischen Function bekanntlich als ganze Functionen von y_{11} mit in x rationalen Coefficienten

ausdrücken lassen und von einem Grade in y_{11}, der um eine Einheit kleiner ist als der Grad der die algebraische Function y_{11} definirenden irreductibeln Gleichung. Da aber die Ableitungen (23), wie durch Differentiation der ersten der Gleichungen (22) mit steter Benutzung der übrigen Gleichungen desselben Systems folgt, sich, wenn die zu y_{11} gehörigen Elemente eines Fundamentalsystems mit $y_{12}, y_{13}, \ldots y_{1n}$ bezeichnet werden, als lineare Functionen von $y_{11}, y_{12}, y_{13}, \ldots y_{1n}$ mit in x rationalen Coefficienten ergeben, so *werden im Allgemeinen*) die zu y_{11} gehörigen Integralelemente eines Systems sämmtlich ganze Functionen von y_{11} mit in x rationalen Coefficienten sein*, die wir in der Form darstellen wollen

$$(24)\quad y_{11}, y_{12} = r_1(x, y_{11}),\ y_{13} = r_2(x, y_{11}), \ldots y_{1n} = r_{n-1}(x, y_{11}).$$

Sei nun die irreductible algebraische Gleichung, von welcher y_{11} eine Lösung ist

$$(25)\qquad y^\nu + R_1(x)\, y^{\nu-1} + \cdots + R_\nu(x) = 0,$$

so werden, da das Differentialgleichungsystem (22) durch die Werthereihe (24) befriedigt werden soll, wenn wir

$$\frac{dy_{11}}{dx} = \varrho_1(x, y_{11}),\quad \frac{dy_{12}}{dx} = \frac{dr_1(x, y_{11})}{dx} = \varrho_2(x, y_{11}), \cdots$$
$$\frac{dy_{1n}}{dx} = \frac{dr_{n-1}(x, y_{11})}{dx} = \varrho_n(x, y_{11})$$

setzen, worin offenbar die ϱ_α wieder ganze Functionen $\nu - 1^{\text{ten}}$ Grades von y_{11} mit in x rationalen Coefficienten sein werden, die Gleichungen

$$(26)\left\{\begin{array}{l}
\varrho_1(x, y_{11}) = A_{11} y_{11} + A_{12} r_1(x, y_{11}) + \cdots + A_{1n} r_{n-1}(x, y_{11}) \\
\varrho_2(x, y_{11}) = A_{21} y_{11} + A_{22} r_1(x, y_{11}) + \cdots + A_{2n} r_{n-1}(x, y_{11}) \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\varrho_n(x, y_{11}) = A_{n1} y_{11} + A_{n2} r_1(x, y_{11}) + \cdots + A_{nn} r_{n-1}(x, y_{11})
\end{array}\right.$$

für alle x erfüllt sein. Da aber die ϱ- und r-Functionen nur ganze Functionen vom $\nu - 1^{\text{ten}}$ Grade in y_{11} waren, so

*) wieder mit der oben in Betreff der Zerfällbarkeit des Systems gemachten Beschränkung.

werden die Gleichungen (26) wegen der Irreductibilität der Gleichung (25) in y_{11} identisch sein müssen, und somit auch für jede andere Lösung von (25) befriedigt werden, d. h. wenn wir irgend eine andere Lösung dieser Gleichung mit $y_{\lambda 1}$ bezeichnen, so werden der Werthereihe (24) entsprechend auch

$$(27) \qquad y_{\lambda 1},\ y_{\lambda 2} = r_1(x, y_{\lambda 1}),\ \ldots y_{\lambda n} = r_{n-1}(x, y_{\lambda 1})$$

ein Integralsystem der gegebenen Differentialgleichungen (22) bilden.

Nun können entweder, da λ die Werthe $1, 2, \ldots \nu$ annehmen kann, die so sich ergebenden ν Integralsysteme alle selbständigen, d. h. nicht durch homogene lineare Relationen mit constanten Coefficienten verbundenen algebraischen Integralsysteme in sich schliessen, oder es giebt noch andere erste algebraische Elemente eines Fundamentalsystems; ist das letztere der Fall, so wird wieder eine der Gleichung (25) analoge irreductible Gleichung

$$(28) \qquad y^{\mu} + P_1(x)\, y^{\mu-1} + \cdots + P_{\mu}(x) = 0$$

existiren, deren *sämmtliche* Lösungen wiederum Elemente algebraischer Integralsysteme der Differentialgleichungen (22) bilden, und es könnten nun alle ersten algebraischen Elemente, die nicht durch constante Coefficienten homogen linear mit einander verbunden sind, durch die beiden Gleichungen erschöpft sein; ist dies nicht der Fall, so bildet man eine neue der Gleichung (28) analoge Beziehung u. s. w. Multiplicirt man nun alle diese Gleichungen (25), (28) u. s. w. mit einander, so erhält man eine algebraische Gleichung von der Form

$$(29) \qquad y^{\sigma} + \Re_1(x)\, y^{\sigma-1} + \cdots + \Re_{\sigma}(x) = 0,$$

worin $\Re_1(x), \ldots \Re_{\sigma}(x)$ rationale Functionen von x bedeuten, und von welcher alle ersten selbständigen algebraischen Integralelemente der Differentialgleichungen (22) Lösungen sind, während alle übrigen Lösungen ebenfalls erste Elemente algebraischer Integralsysteme dieser Differentialgleichungen bilden, und es ist klar, dass diese Gleichung nicht zwei gleiche Lösungen hat, da sie aus *verschiedenen irreductibeln* Polynomen durch Multiplication entstanden ist.

Nennt man somit die σ verschiedenen Lösungen der Gleichung (29)

$$\eta_{11}, \eta_{21}, \dots \eta_{\sigma 1},$$

und bildet

$$y_1 = c_1\eta_{11} + c_2\eta_{21} + \cdots + c_\sigma\eta_{\sigma 1}, \tag{30}$$

so sind alle durch (30) *dargestellten Werthe für willkürliche Werthe der* $c_1, \dots c_\sigma$ *erste algebraische Integralelemente der Differentialgleichungen* (22), *und andere giebt es nicht.*

Nehmen wir nun an, dass *sämmtliche* Integralelemente des linearen Differentialgleichungsystems algebraische Functionen von x sind, so wird $\sigma \geqq n$ sein, und also entweder alle $\sigma = n$ Lösungen der Gleichung (29) Fundamentalelemente liefern, oder wenn $\sigma > n$, so werden $\sigma - n$ Lösungen linear mit constanten Coefficienten durch die n Fundamentalelemente oder die entsprechenden n Lösungen von (29) darstellbar sein. Da in Folge dessen jedenfalls y_1 in eine lineare homogene Function der Form umgesetzt werden kann

$$y_1 = C_1\eta_{11} + C_1\eta_{21} + \cdots + C_n\eta_{n1}, \tag{31}$$

worin $C_1, C_2, \dots C_n$ willkürliche Constanten, und $\eta_{11}, \eta_{21}, \dots \eta_{n1}$ die n algebraischen Fundamentalelemente sein mögen, so folgt aus den Auseinandersetzungen des ersten Kapitels (Abschnitt II.), dass sich

$$\eta_{11}, \eta_{21}, \dots \eta_{n1} \tag{32}$$

durch das für eine willkürliche Wahl der $C_1, C_2, \dots C_n$ definirte algebraische Integral y_1 rational ausdrücken lassen mit Hülfe der Coefficienten der die Grössen (32) definirenden algebraischen Gleichungen also rationaler Functionen von x, und da alle ersten Integralelemente des gegebenen Differentialgleichungsystems in der Form (31) darstellbar waren, so erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn alle Integralelemente eines homogenen linearen Differentialgleichungsystems mit rationalen Coefficienten algebraische Functionen sind, so besitzen dieselben ein Integralelement, durch welches sich alle anderen rational ausdrücken lassen.

6. Lassen wir jetzt die Bedingung fallen, dass die Coefficienten des Differentialgleichungsystems (22) rationale Func-

tionen von x seien und setzen dieselben wieder als beliebig gegebene algebraische Functionen voraus, so wird ein algebraisches Integralelement y_{11}, das im Allgemeinen nach den eben gemachten Auseinandersetzungen ein gleichartiges algebraisches Integralsystem nach sich zieht, als die Lösung einer mit Adjungirung von x und der Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ des Differentialgleichungsystems (22) irreductibeln Gleichung von der Form aufgefasst werden dürfen

$$(33) \qquad y^{\nu} + R_1(x, A_{\alpha\beta}) y^{\nu-1} + \cdots + R_{\nu}(x, A_{\alpha\beta}) = 0,$$

worin die Functionen $R_1, \ldots R_{\nu}$ rationale Functionen von x und der algebraischen Coefficienten des Differentialgleichungsystems bedeuten.

Da nun die Differentialquotienten von $A_{\alpha\beta}$ bekanntlich rationale Functionen von x und $A_{\alpha\beta}$ selbst sind, so zeigen genau dieselben Schlüsse, wie die oben auf die Gleichung (25) angewandten, vermöge der angenommenen Irreductibilität der Gleichung (33), dass *sämmtliche Lösungen dieser Gleichung wiederum Elemente algebraischer Integralsysteme der Differentialgleichungen* (22) *bilden.*

Nehmen wir nun an, dass man von dem Differentialgleichungsystem (22) wüsste, dass dasselbe $n-1$ transcendente, nicht algebraisch auf einander reducirbare Systeme von Fundamentalintegralen und nur *ein* algebraisches mit jenen simultanes Fundamentalsystem von Integralen

$$y_{11}, \; y_{12}, \ldots y_{1n}$$

besitze, welche als Lösungen der mit Adjungirung von x und $A_{\alpha\beta}$ irreductibeln algebraischen Gleichungen

$$(34) \quad \begin{cases} y_1^{\nu} + F_{11}(x, A_{\alpha\beta}) y_1^{\nu-1} + \cdots + F_{1\nu}(x, A_{\alpha\beta}) = 0 \\ y_2^{\nu} + F_{21}(x, A_{\alpha\beta}) y_2^{\nu-1} + \cdots + F_{2\nu}(x, A_{\alpha\beta}) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n^{\nu} + F_{n1}(x, A_{\alpha\beta}) y_n^{\nu-1} + \cdots + F_{n\nu}(x, A_{\alpha\beta}) = 0 \end{cases}$$

definirt sein mögen, deren Gradzahl ν nach den vorigen Auseinandersetzungen offenbar als eine gemeinsame betrachtet werden darf.

Bezeichnet man nun das System transcendenter Fundamentalintegrale mit

$$\begin{array}{l} Y_{21}, \; Y_{22}, \; \ldots \; Y_{2n} \\ Y_{31}, \; Y_{32}, \; \ldots \; Y_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_{n1}, \; Y_{n2}, \; \ldots \; Y_{nn}, \end{array}$$

so wird jedes andere Integralsystem der Differentialgleichungen (22) die Form haben

$$(35) \qquad \begin{cases} \eta_1 = c_1 y_{11} + c_2 Y_{21} + \cdots + c_n Y_{n1} \\ \eta_2 = c_1 y_{12} + c_2 Y_{22} + \cdots + c_n Y_{n2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \eta_n = c_1 y_{1n} + c_2 Y_{2n} + \cdots + c_n Y_{nn}, \end{cases}$$

und also auch $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ ein entsprechendes algebraisches Lösungsystem der Gleichungen (34) bedeuten dürfen. Da aber dann gegen die Annahme zwischen den analogen transcendenten Integralelementen eine algebraische Beziehung stattfinden würde, so müssen, wenn $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ Lösungen der Gleichungen (34) bedeuten,

$$c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$$

sein, und daher, wenn für die Gleichung

$$(36) \qquad y_\varrho^\nu + F_{\varrho 1}(x, A_{\alpha\beta}) y_\varrho^{\nu-1} + \cdots + F_{\varrho\nu}(x, A_{\alpha\beta}) = 0$$

die Lösungen mit $y_{1\varrho}, y_{2\varrho}, \ldots y_{\nu\varrho}$ bezeichnet werden,

$$(37) \qquad y_{2\varrho} = k_2 y_{1\varrho}, \; y_{3\varrho} = k_3 y_{1\varrho}, \; \ldots \; y_{\nu\varrho} = k_\nu y_{1\varrho}$$

sein müssen, worin $k_2, k_3, \ldots k_\nu$ Constanten bedeuten.

Ist nun der erste nicht verschwindende Coefficient der Gleichung (36) der λ^{te}, so wird die Summe der Combinationen der Lösungen der Gleichung (36) zur λ^{ten} Klasse

$$(38) \qquad K y_{1\varrho}^\lambda = F_{\varrho\lambda}(x, A_{\alpha\beta})$$

liefern, worin K eine Constante bedeutet, d. h. es wird $y_{1\varrho}$ die Lösung einer binomischen Gleichung, also die λ^{te} Wurzel aus einer in x und $A_{\alpha\beta}$ rational zusammengesetzten Function sein.

Wir finden somit,

dass, wenn ein algebraisches homogenes lineares Differentialgleichungsystem n^{ter} *Klasse* $n-1$ *algebraisch von einander unabhängige transcendente Integralsysteme und nur ein algebraisches mit jenen simultanes Fundamentalsystem von Integralen besitzt, die Elemente dieses letzteren nothwendig die Lösungen binomischer, in der Variabeln* x *und den Coefficienten der Differentialgleichungen rationaler Gleichungen von demselben Grade sind, also durch Wurzelzeichen aus Functionen von diesem Charakter dargestellt werden können.*

Es folgt daraus,

dass, wenn ein homogenes lineares Differentialgleichungsystem 2ter *Klasse ein transcendentes und ein algebraisches System von Fundamentalintegralen besitzt, das letztere sich durch Wurzelzeichen aus Functionen darstellen lässt, welche rational aus* x *und den Coefficienten der Differentialgleichungen zusammengesetzt sind.*

Viertes Kapitel.

Ueber die analytischen Ausdrücke für die Integrale algebraischer Differentialgleichungssysteme.

I. Ueber Differentialgleichungssysteme erster Klasse von der Form $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

Nachdem wir im Vorhergehenden die allgemeinen Eigenschaften beliebiger Differentialgleichungssysteme sowie einzelner umfassender und besonders wichtiger Klassen solcher Systeme entwickelt haben, gehen wir dazu über, uns die Frage vorzulegen, welcher Art die analytischen Ausdrücke sind, die als Integrale eines Differentialgleichungssystems bezeichnet wurden oder, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, *die Methoden für die Integration von Differentialgleichungen* auseinanderzusetzen, wobei für den vorliegenden Zweck nur solche Methoden zur Sprache kommen sollen, welche zur Behandlung umfassenderer Arten von Differentialgleichungen gleichmässig dienen und nicht auf speciellen Kunstgriffen, wie sie einzelnen Differentialgleichungen angepasst sind, beruhen.

1. Wir wollen uns zunächst mit algebraischen Differentialgleichungssystemen *erster Klasse* beschäftigen, welche allgemein die Form haben

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

worin f als algebraisch irreductible Function der beiden Variabeln x und y betrachtet werden darf, oder

$$(2)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + \varphi_1(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1}(x,y)\frac{dy}{dx} + \varphi_n(x,y) = 0,$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ rationale Functionen von x und y bedeuten, und von diesen Differentialgleichungen wiederum zuerst die einfachste Art derselben, nämlich die in der Form

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx} = f(x)$$

oder

$$(4)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + \varphi_1(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + \varphi_n(x) = 0$$

enthaltenen herausgreifen, deren Integrale man durch das Zeichen

$$(5)\qquad y = \int f(x)\,dx$$

darstellt, und, wie wir schon früher hervorgehoben haben, *Quadraturen* nennt.

Da das allgemeine Integral der Differentialgleichungen (3) oder (4) nur *eine* willkürliche Constante enthält, y aber um eine beliebige additive Constante vermehrt die Differentialgleichung unverändert lässt,

so erhält man das allgemeine Integral von (3), indem man irgend ein particuläres Integral um eine beliebige additive Constante vermehrt.

Wenn $f(x)$, wie es in (5) der Fall ist, eine algebraische Function bedeutet, so wird die dazugehörige Quadratur im Allgemeinen ein Abel'sches Integral genannt.

Man bezeichnet eine solche Quadratur auch gewöhnlich, gleichgültig ob $f(x)$ algebraisch oder transcendent ist, als *ein unbestimmtes Integral,* und man erkennt aus der Definition einer solchen Quadratur zugleich unmittelbar,

dass die Quadratur einer Summe von Functionen gleich ist der Summe der Quadraturen der einzelnen Functionen.

Bestimmt man der Differentialgleichung (3) gemäss nach früheren Auseinandersetzungen für den nicht singulären Werth $x = x_0$ den Werth $y = 0$ für das Integral, und setzt die Function in einer beliebigen von x_0 aus gezogenen Linie, auf welcher kein singulärer Punkt von $f(x)$ liegt, durch Er-

mittlung der successiven Incremente fort, so erhält man nach Früherem ein particuläres Integral, das man gewöhnlich *das bestimmte, von der unteren Grenze x_0 bis zur oberen Grenze x genommene Integral von $f(x)$ nennt und mit*

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

bezeichnet, wobei die von x_0 nach x laufende Curve der Integrationsweg genannt wird, und diese Definition ist offenbar identisch mit der durch die Gleichung

$$y = \lim_{n=\infty} \{ f(x_0) dx_0 + f(x_1) dx_1 + f(x_2) dx_2 + \cdots + f(x_n) dx_n \}$$

gegebenen, in welcher $x_0, x_1, \ldots x_n$ unendlich viele aufeinander folgende, auf der gegebenen von x_0 nach x laufenden Curve gelegene Punkte bedeuten, von denen der Voraussetzung nach keiner ein singulärer ist.

Fixirt man auf dem Integrationswege einen Punkt α, so erhält man für y nicht mehr eine Function von x, sondern eine Constante

$$\eta = \int_{x_0}^{\alpha} f(x)\, dx,$$

welche den speciellen Werth des particulären Integrales für $x = \alpha$ angiebt.

Was zunächst die einfachste Art von Differentialgleichungen der Form (3) betrifft, in welchen nämlich $f(x)$ eine ganze Function von x darstellt, so ist unmittelbar zu sehen, dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \tag{6}$$

die Form hat

$$y = c + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_m}{m+1} x^{m+1}, \tag{7}$$

wie durch Einsetzen in (6) unmittelbar folgt, wenn c eine willkürliche Constante bedeutet, oder anders ausgedrückt,

die Quadratur einer ganzen Function m^{ten} Grades ist wiederum eine ganze Function und zwar vom $m + 1^{\text{ten}}$ Grade.

Ist $f(x)$ in der Gleichung (3) eine rational gebrochene Function, so wird sich die Aufsuchung des Integrales dieser Differentialgleichung, wie wir sogleich zeigen wollen, zurückführen lassen auf die Integration von ähnlich gestalteten einfacheren Fundamentalformen solcher Differentialgleichungen, nämlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-\alpha} \tag{8}$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-\alpha)^\mu}, \tag{9}$$

worin μ eine positive ganze Zahl grösser als die Einheit ist.

Es lässt sich nämlich, wie in den Elementen gezeigt wird, jede gebrochene irreductible rationale Function

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

worin

$$\psi(x) = k(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_\varrho)^{m_\varrho}, \tag{10}$$

k eine Constante, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varrho$ von einander verschiedene, reelle oder complexe, Nullwerthe der Function $\psi(x)$ und $m_1, m_2, \ldots m_\varrho$ ganze positive Zahlen bedeuten, in folgender Form in Partialbrüche zerlegen

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_\lambda x^\lambda \\ &+ \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2m_2}}{(x-\alpha_2)^{m_2}} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{A_{\varrho 1}}{x-\alpha_\varrho} + \frac{A_{\varrho 2}}{(x-\alpha_\varrho)^2} + \cdots + \frac{A_{\varrho m_\varrho}}{(x-\alpha_\varrho)^{m_\varrho}},\end{aligned} \tag{11}$$

worin $a_0, \ldots a_\lambda, A_{11}, \ldots A_{\varrho m_\varrho}$ Constanten sind. Hieraus ergiebt sich schon unmittelbar, dass die Quadratur

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx$$

sich auf die Quadratur der ganzen Function $a_0 + a_1 x + \cdots + a_\lambda x^\lambda$, die vorher ausgeführt worden, und auf eine Summe

von Einzelquadraturen reducirt, die sämmtlich Integrale von Differentialgleichungen der Form (8) und (9) sind, so dass wir uns somit nur mit der Integration dieser letzteren beiden Differentialgleichungen zu beschäftigen haben.

Was zunächst die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-\alpha)^{\mu}} \tag{12}$$

angeht, in welcher $\mu > 1$ ist, so ist durch Einsetzen unmittelbar zu erkennen, dass

$$y = \frac{1}{-\mu+1} \frac{1}{(x-\alpha)^{\mu-1}} + c \tag{13}$$

das allgemeine Integral derselben ist.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-\alpha} \tag{14}$$

hat jedoch kein, in derartigen geschlossenen algebraischen Formen darstellbares Integral, und da dieselbe dadurch, dass man x statt $x - \alpha$ substituirt, in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \tag{15}$$

übergeht, so wird es sich also nur um die Integration der Gleichung (15) handeln. Man nennt nun dasjenige particuläre Integral dieser Differentialgleichung, welches für $x = 1$ den Werth Null annimmt, den *Logarithmus* von x, und bezeichnet dasselbe

$$y = \log x. \tag{16}$$

Diese Function tritt somit als Integral der Differentialgleichung (15) auf, und ihre Eigenschaften werden aus der Natur der sie definirenden Differentialgleichung zu ermitteln sein. Jedenfalls ist durch diese Einführung mit Rücksicht auf Gleichung (11) das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \tag{17}$$

in der Form darstellbar

$$(18)\quad y = c + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_\lambda}{\lambda + 1} x^{\lambda+1}$$

$$+ A_{11} \log(x - \alpha_1) - A_{12} \frac{1}{x - \alpha_1} - \frac{A_{13}}{2} \frac{1}{(x - \alpha_1)^2} - \cdots$$

$$- \frac{A_{1m_1}}{m_1 - 1} \frac{1}{(x - \alpha_1)^{m_1 - 1}}$$

$$+ A_{21} \log(x - \alpha_2) - A_{22} \frac{1}{x - \alpha_2} - \frac{A_{23}}{2} \frac{1}{(x - \alpha_2)^2} - \cdots$$

$$- \frac{A_{2m_2}}{m_2 - 1} \frac{1}{(x - \alpha_2)^{m_2 - 1}}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ A_{\varrho 1} \log(x - \alpha_\varrho) - A_{\varrho 2} \frac{1}{x - \alpha_\varrho} - \frac{A_{\varrho 3}}{2} \frac{1}{(x - \alpha_\varrho)^2} - \cdots$$

$$- \frac{A_{\varrho m_\varrho}}{m_\varrho - 1} \frac{1}{(x - \alpha_\varrho)^{m_\varrho - 1}},$$

und wir erhalten somit den Satz,

dass die Quadratur einer jeden rationalen Function sich durch rationale Functionen und Logarithmen von ganzen linearen Functionen der Variabeln additiv darstellen lässt,

oder anders ausgedrückt,

die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

worin $\varphi(x)$ *und* $\psi(x)$ *ganze Functionen von* x *sind, lässt sich auf die Integration der Differentialgleichung*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

zurückführen.

Die Natur der logarithmischen Function, als Integral der Differentialgleichung (15) aufgefasst, lässt sich nun nach den oben entwickelten allgemeinen Sätzen leicht ermitteln. Da die rechte Seite der Differentialgleichung überall eindeutig und nur für $x = 0$ unendlich ist, so ist der Nullpunkt der einzige im Endlichen gelegene singuläre Punkt. Betrachtet man nun den Punkt $x = 1$, für den $\log x$ den Werth Null annehmen sollte, so wird nach den früheren Sätzen $\log x$ in der Umgebung von $x = 1$ und zwar in einem Kreise bis zum singulären

Punkte $x = 0$ hin sich nach positiven steigenden Potenzen von $x - 1$ entwickeln lassen, und es lautet die Entwicklung, wenn man die successiven Differentialquotienten aus der Gleichung (15) berechnet,

(19) $\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots,$

und nach den früher angegebenen Principien kann man nun $\log x$ über die ganze x-Ebene hin in Potenzreihen fortsetzen.

Um eine charakteristische Eigenschaft der logarithmischen Function unmittelbar aus der Differentialgleichung (15) herzuleiten, bemerke man, dass für zwei willkürliche Werthe x_1 und x_2 der unabhängigen Variabeln sich nach (15)

$$d \log x_1 = \frac{dx_1}{x_1} \quad \text{und} \quad d \log x_2 = \frac{dx_2}{x_2},$$

und aus diesen beiden

$$d(\log x_1 + \log x_2) = \frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} = \frac{d(x_1 x_2)}{x_1 x_2} = d \log x_1 x_2$$

ergiebt, und man erhält somit, wenn man berücksichtigt, dass, wenn die unabhängige Variable den Werth 1 annimmt, die logarithmische Function verschwinden sollte, die Functionalbeziehung

$$\log x_1 + \log x_2 = \log x_1 x_2 .$$

Es bleibt uns somit für die Discussion der Differentialgleichung nur noch zu untersuchen übrig, welche Werthveränderung das Integral der Differentialgleichung (15) erleidet, wenn die unabhängige Variable x den singulären Punkt $x = 0$ umkreist; da aber in diesem Falle, wenn x den Nullpunkt in einem Kreise mit dem Radius r umzieht, diese Variable in die Form

$$x = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

gesetzt werden kann, wobei φ die reellen Werthe von 0 bis 2π durchläuft, so wird in Folge der oben aufgestellten Functionalgleichung der Lauf der Function bei der Bewegung der unabhängigen Variabeln um den Nullpunkt durch

$$y = \log r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \log r + \log(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

dargestellt werden können. Da aber für

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \text{oder} \quad dz = i(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\varphi = iz\,d\varphi$$

sich

$$\frac{d(i\varphi)}{dz} = \frac{1}{z}$$

ergiebt, und für $\varphi = 0$ $z = 1$ ist, so wird nach der Definition der logarithmischen Function

$$i\varphi = \log z = \log(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

sein, und somit y in

$$y = \log r + i\varphi$$

übergehen. Hieraus folgt aber sogleich, *dass bei einer jedesmaligen Umkreisung des Nullpunktes die logarithmische Function um $2\pi i$ zunimmt, und dass dieselbe somit eine unendlich vieldeutige ist.*

2. Lassen wir jetzt für die Differentialgleichung (3) die Bedingung fallen, dass $f(x)$ eine rationale Function von x ist, und fassen dieselbe wieder als allgemeine algebraische Function auf, so ist zunächst klar, dass, wenn die algebraische Function

$$t = f(x) \tag{20}$$

oder die algebraisch irreductible Gleichung

$$t^\mu + f_1(x)t^{\mu-1} + \cdots + f_\mu(x) = 0, \tag{21}$$

in welcher $f_1(x), \ldots f_\mu(x)$ rationale Functionen von x sind, so beschaffen ist, dass sich t und x *rational* durch eine einzige Variable u ausdrücken lassen, das Problem der Integration der zugehörigen Differentialgleichung, die nach (3) und (21) die Form hat

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^\mu + f_1(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\mu-1} + \cdots + f_\mu(x) = 0, \tag{22}$$

auf den früheren Fall zurückführbar ist. Denn da der Voraussetzung gemäss

$$x = \varphi(u), \quad \frac{dy}{dx} = \psi(u) \tag{23}$$

sein soll, worin φ und ψ rationale Functionen bedeuten, so folgt aus diesen beiden Gleichungen die Differentialgleichung

(24) $$\frac{dy}{du} = \psi(u)\varphi'(u),$$

und somit eine Differentialgleichung der Form (17), deren Integral auf rationale und logarithmische Functionen führte; sei

(25) $$y = F(u) + c$$

das gefundene Integral, so wird diese Gleichung, mit

(26) $$x = \varphi(u)$$

zusammengestellt, die allgemeine Integralbeziehung zwischen y und x für die Differentialgleichung (22) liefern.

Man nennt nun bekanntlich *eine algebraische Function t von x, welche die Eigenschaft hat, dass sie selbst wie ihre Variable sich durch eine dritte veränderliche Grösse rational ausdrücken lassen, eine unicursale algebraische Function*,

und wir erhalten somit nach den obigen Auseinandersetzungen den nachfolgenden Satz:

Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

in welcher $f(x)$ eine unicursale algebraische Function bedeutet, lässt sich stets in dem Sinne durch rationale und logarithmische Functionen integriren, dass x eine rationale, y eine rational-logarithmische Function einer Hülfsvariabeln ist.

Benutzt man nun den bekannten algebraischen Satz, dass, wenn t eine unicursale algebraische Function von x ist, es stets eine Variable v giebt, durch die nicht bloss x und t rational ausdrückbar sind, sondern die auch selbst umgekehrt rational durch x und t ausgedrückt werden kann, so würde sich der eben ausgesprochene Satz auch in die folgende Form bringen lassen:

Das allgemeine Integral der obigen unicursalen algebraischen Differentialgleichung lässt sich stets als rational-logarithmische Function einer rationalen Verbindung der unabhängigen und abhängigen Variabeln ausdrücken, enthält also nur diejenige algebraische Irrationalität, die in der Differentialgleichung selbst vorkam.

Daraus folgt, dass jede Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} = \omega\left(x, \sqrt{a + bx + cx^2}\right), \tag{27}$$

worin ω eine rationale Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet, in der angegebenen Weise integrirbar ist; denn setzt man

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = x\sqrt{c} + u, \tag{28}$$

$$\text{oder } u = \sqrt{a + bx + cx^2} - x\sqrt{c},$$

so folgt unmittelbar

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{u^2 - a}{b - 2u\sqrt{c}} \\ \sqrt{a + bx + cx^2} &= -\frac{u^2\sqrt{c} - ub + a\sqrt{c}}{b - 2u\sqrt{c}}, \end{aligned}\right. \tag{29}$$

also auch

$$\omega\left(x, \sqrt{a + bx + cx^2}\right) = R(u), \tag{30}$$

worin R eine rationale Function bedeutet.

Wir finden somit,

dass jede Differentialgleichung der Form (27) *integrirbar ist durch rational-logarithmische Functionen des Argumentes* $\sqrt{a + bx + cx^2} - x\sqrt{c}$, *so dass in der That in die Argumente selbst nur diejenige Irrationalität eintritt, die schon in der Differentialgleichung enthalten war.*

Es mag bemerkt werden, dass man dasjenige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

welches für $x = 0$ selbst verschwindet, mit

$$y = \operatorname{arc} \sin x \tag{31}$$

bezeichnet.

3. Im Allgemeinen sind nun die Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{32}$$

worin $f(x)$ eine nicht unicursale algebraische Function von x bedeutet, nicht auf algebraisch-logarithmische Functionen zurückführbar; ist dies jedoch der Fall, so wird ein dem eben ausgesprochenen Satze ganz ähnliches allgemeines Theorem gelten. Denn sei das Integral y_1 der Differentialgleichung (32) durch den Ausdruck gegeben

$$(33) \qquad y_1 = F(x, \log v_1, \log v_2, \dots \log v_m),$$

worin F eine algebraische Function der eingeschlossenen Grössen, $v_1, v_2, \dots v_m$ algebraische Functionen von x bedeuten, so wird, weil $\log v_1, \dots \log v_m$ Integrale der Differentialgleichungen

$$(34) \qquad \frac{dz_1}{dx} = \frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{dx}, \quad \dots \frac{dz_m}{dx} = \frac{1}{v_m}\frac{dv_m}{dx}$$

sind, dieser algebraische Zusammenhang nach dem letzten Satze des 1. Kapitels jedenfalls ein linearer von der Form sein müssen

$$(35) \quad y_1 = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_m \log v_m,$$

worin u eine algebraische Function von x, und $A_1, A_2, \dots A_m$ Constanten sind.

Benutzen wir ferner den in Abschn. VI. 4. des ersten Kapitels entwickelten Satz für unseren Fall, so wird sich, weil die dortige Gleichung (53) hier durch (32) zu ersetzen ist, und die Integrale der letzteren sämmtlich nur um eine additive Constante verschieden sein können, die Form des Integrales (35) in eine einfachere umsetzen lassen; bildet man nämlich eine algebraische Function t_1, welche die Lösung einer mit Adjungirung von x und $f(x)$ irreductibeln Gleichung δ^{ten} Grades

$$(36) \qquad t^\delta + \psi_1(x, f(x))\, t^{\delta-1} + \cdots + \psi_\delta(x, f(x)) = 0$$

ist, und durch welche die algebraischen Functionen

$$u, v_1, v_2, \dots v_m$$

mit Hülfe von x rational ausdrückbar sind, so werden nach dem oben angeführten Satze, wenn mit $t_1, t_2, \dots t_\delta$ die Lösungen der Gleichung (36) und mit

$$u_\alpha, v_1^{(\alpha)}, v_2^{(\alpha)}, \dots v_m^{(\alpha)}$$

die der Lösung t_α entsprechenden, aus den eben hergestellten rationalen Ausdrücken hervorgehenden Werthe von u, v_1, v_2, ... v_m bezeichnet werden, die δ Werthe für y

$$(37)\begin{cases} y_1 = u_1 + A_1 \log v_1^{(1)} + A_2 \log v_2^{(1)} + \cdots + A_m \log v_m^{(1)} \\ y_2 = u_2 + A_1 \log v_1^{(2)} + A_2 \log v_2^{(2)} + \cdots + A_m \log v_m^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_\delta = u_\delta + A_1 \log v_1^{(\delta)} + A_2 \log v_2^{(\delta)} + \cdots + A_m \log v_m^{(\delta)} \end{cases}$$

Integrale der Differentialgleichung (32) sein; da sich diese aber, wie schon hervorgehoben, nur um eine additive Constante unterscheiden können, so erhält man durch Addition der Gleichungen (37), wenn man von einer additiven Constanten absieht, mit Rücksicht auf das oben bewiesene Functionaltheorem des Logarithmus

$$(38)\qquad y_1 = \frac{1}{\delta}\sum_1^\delta{}_\varrho\, u_\varrho + \frac{A_1}{\delta}\log v_1^{(1)}.v_1^{(2)}\,...\,v_1^{(\delta)} + \cdots$$
$$+ \frac{A_m}{\delta}\log v_m^{(1)}.v_m^{(2)}\,...\,v_m^{(\delta)},$$

und wenn man beachtet, dass sowohl

$$\sum_1^\delta{}_\varrho\, u_\varrho \quad \text{als auch} \quad v_\nu^{(1)}.v_\nu^{(2)}\,...\,v_\nu^{(\delta)}$$

rationale symmetrische Functionen der Lösungen t_1, t_2, ... t_δ der Gleichung (36) sind, sich also rational durch x und $f(x)$ ausdrücken lassen, so folgt der nachstehende Satz, der sich später als specieller Fall eines weit allgemeineren ergeben wird:

Ist das Integral einer algebraischen Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

eine algebraisch-logarithmische Function von x, also nothwendig von der Gestalt

$$(39)\quad y_1 = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_m \log v_m,$$

worin u, v_1, v_2, ... v_m algebraische Functionen von x, und

$A_1, A_2, \ldots A_m$ Constanten sind, so lässt sich dieses Integral stets auf die Form bringen

$$(40)\quad y_1 = U + \frac{A_1}{\delta}\log V_1 + \frac{A_2}{\delta}\log V_2 + \cdots + \frac{A_m}{\delta}\log V_m,$$

worin δ eine ganze positive Zahl, und $U, V_1, V_2, \ldots V_m$ rationale Functionen von x und $f(x)$ sind, also rational aus x und derjenigen algebraischen Irrationalität zusammengesetzt sind, die in der gegebenen Differentialgleichung enthalten ist.

4. Aber nicht bloss die *rationale Form* der algebraisch-logarithmischen Integrale der Differentialgleichung (32) lässt sich feststellen, sondern man kann auch die Natur der in diese Ausdrücke eintretenden Functionen ermitteln. Habe nämlich die Differentialgleichung

$$(41)\qquad \frac{dy}{dx} = Y_1,$$

in welcher Y_1 eine Lösung der irreductibeln algebraischen Gleichung

$$(42)\quad Y^{k\mu} + f_1(x)Y^{(k-1)\mu} + f_2(x)Y^{(k-2)\mu} + \cdots + f_k(x) = 0$$

ist, worin $f_1(x), \ldots f_k(x)$ rationale Functionen von x bedeuten, ein Integral, welches sich algebraisch durch x und durch ϱ algebraisch von einander unabhängige Logarithmen von algebraischen Functionen ausdrücken lässt, so muss sich dieses Integral zunächst nach dem vorigen Satze in der Form darstellen lassen

$$(43)\quad y_1 = u + A_1\log v_1 + A_2\log v_2 + \cdots + A_\varrho \log v_\varrho,$$

worin $A_1, \ldots A_\varrho$ constante, $u, v_1, v_2, \ldots v_\varrho$ aber rational durch x und Y_1 darstellbare Grössen bedeuten, welche sich bekanntlich stets als ganze Functionen des $k\mu - 1^{\text{ten}}$ Grades von Y_1 ausdrücken lassen mit in x rationalen Coefficienten. Setzt man diesen Werth von (43) in (41) ein, so muss diese Gleichung, da $\frac{dY_1}{dx}$ wiederum vermöge (42) rational und ganz durch Y_1 ausdrückbar ist, weil (42) irreductibel angenommen war, von allen Lösungen eben dieser Gleichung befriedigt werden, oder mit anderen Worten, es wäre

$$(44)\quad y_2 = \bar{u} + A_1 \log \bar{v}_1 + A_2 \log \bar{v}_2 + \cdots + A_\varrho \log \bar{v}_\varrho$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$(45)\qquad \frac{dy}{dx} = Y_2,$$

wenn sich $u, \bar{v}_1, \ldots \bar{v}_\varrho$ von $u, v_1, \ldots v_\varrho$ nur dadurch unterscheiden, dass an Stelle von Y_1 in ihren rationalen Ausdrücken von x und Y_1 *irgend eine andere* Lösung Y_2 der Gleichung (42) gesetzt worden ist.

Da nun für Y_2 die Lösung εY_1 der Gleichung (42) genommen werden kann, worin ε durch den Ausdruck

$$(46)\qquad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$$

definirt ist, und somit aus den beiden Gleichungen

$$(47)\qquad \frac{dy_1}{dx} = Y_1, \quad \frac{dy_2}{dx} = \varepsilon Y_1$$

die Beziehung

$$(48)\qquad y_2 - \varepsilon y_1 = k$$

gefolgert werden kann, wenn k eine Constante bedeutet, so erhält man aus (43) und (44) die Beziehung

$$(49)\quad \bar{u} - \varepsilon u + A_1(\log \bar{v}_1 - \varepsilon \log v_1) + A_2(\log \bar{v}_2 - \varepsilon \log v_2) + \cdots$$
$$+ A_\varrho(\log \bar{v}_\varrho - \varepsilon \log v_\varrho) = k,$$

für welche die Existenzbedingungen zu untersuchen sind. Da nun $\bar{u}, u, \bar{v}_1, v_1 \ldots \bar{v}_\varrho, v_\varrho$ sämmtlich algebraische Functionen von x sind, so können wir alle diese Functionen als algebraische Functionen einer von diesen z. B. v_ϱ betrachten. Habe nun $\bar{u}$ als Function von v_ϱ aufgefasst im Punkte $v_\varrho = 0$ einen Cyclus von $\bar{\mathfrak{u}}$ Elementen, u einen solchen von $\mathfrak{u}$, $\bar{v}_\alpha$ einen von $\bar{\mathfrak{v}}_\alpha$, und v_α einen solchen von $\mathfrak{v}_\alpha$ Elementen, so ist klar, dass, wenn man v_ϱ seinen Nullpunkt

$$(50)\qquad k_\varrho = \lambda\, \bar{\mathfrak{u}}\, \mathfrak{u}\, \bar{\mathfrak{v}}_1\, \mathfrak{v}_1 \ldots \bar{\mathfrak{v}}_{\varrho-1}\, \mathfrak{v}_{\varrho-1}\, \bar{\mathfrak{v}}_\varrho\text{-mal},$$

worin λ eine beliebige ganze Zahl bedeutet, umkreisen lässt, alle jene algebraischen Functionen von v_ϱ zu ihrem Ausgangswerthe zurückkommen werden, und da $\log v_\varrho$ wegen

$$v_\varrho = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

wie oben gezeigt, in $\log v_\varrho + 2k_\varrho \pi i$ übergeht, während alle andern Logarithmen jedenfalls auch ihre früheren Werthe vermehrt um ganze Vielfache von $2\pi i$ annehmen, so geht die Gleichung (49) in

$$(51)\quad \bar{u} - \varepsilon u + A_1[\log \bar{v}_1 + 2\bar{k}_1 \pi i - \varepsilon(\log v_1 + 2k_1 \pi i)]$$
$$+ A_2[\log \bar{v}_2 + 2\bar{k}_2 \pi i - \varepsilon(\log v_2 + 2k_2 \pi i)] + \cdots$$
$$+ A_{\varrho-1}[\log \bar{v}_{\varrho-1} + 2\bar{k}_{\varrho-1} \pi i - \varepsilon(\log v_{\varrho-1} + 2k_{\varrho-1} \pi i)]$$
$$+ A_\varrho[\log \bar{v}_\varrho + 2\bar{k}_\varrho \pi i - \varepsilon(\log v_\varrho + 2k_\varrho \pi i)]$$

über, worin jedenfalls die ganze Zahl k_ϱ von Null verschieden ist. Durch Subtraction von (49) und (51) folgt die wichtige Beziehung

$$(52)\quad A_1(\bar{k}_1 - \varepsilon k_1) + A_2(\bar{k}_2 - \varepsilon k_2) + \cdots$$
$$+ A_{\varrho-1}(\bar{k}_{\varrho-1} - \varepsilon k_{\varrho-1}) + A_\varrho(\bar{k}_\varrho - \varepsilon k_\varrho) = 0.$$

Ausserdem ist leicht zu sehen, dass

$$(53)\quad \bar{u} - \varepsilon u = C$$

sein muss, worin C eine Constante bedeutet.

Denn denken wir uns statt der Gleichung (49) die allgemeinste lineare Relation mit constanten Coefficienten zwischen einer algebraischen Function und σ Logarithmen von algebraischen Functionen

$$(54)\quad B_1 \log V_1 + B_2 \log V_2 + \cdots + B_\sigma \log V_\sigma = U,$$

so kann man wiederum alle Functionen $V_1, \ldots V_{\sigma-1}$ und U als algebraische Functionen von V_σ auffassen, und ebenso wie oben durch Umkreisung des Nullpunktes von V_σ die Beziehung herleiten

$$(55)\quad B_1[\log V_1 + 2\mu_1 \pi i] + \cdots + B_{\sigma-1}[\log V_{\sigma-1} + 2\mu_{\sigma-1}\pi i]$$
$$+ B_\sigma[\log V_\sigma + 2\mu_\sigma \pi i] = U,$$

worin $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{\sigma-1}, \mu_\sigma$ ganze Zahlen bedeuten, von denen die letztere von Null verschieden ist; durch Abziehen der Gleichung (54) folgt:

$$(56)\quad \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \cdots + \mu_{\sigma-1} B_{\sigma-1} + \mu_\sigma B_\sigma = 0,$$

und somit geht die Gleichung (54), wenn der Werth von B_σ aus (56) eingesetzt wird, in

$$(57)\qquad B_1 \log\left(\frac{V_1}{V_\sigma^{\frac{\mu_1}{\mu_\sigma}}}\right) + B_2 \log\left(\frac{V_2}{V_\sigma^{\frac{\mu_2}{\mu_\sigma}}}\right) + \cdots + B_{\sigma-1} \log\left(\frac{V_{\sigma-1}}{V_\sigma^{\frac{\mu_{\sigma-1}}{\mu_\sigma}}}\right) = U$$

über. Sind nun alle Logarithmanden in dieser Gleichung Constanten, so würde auch U eine Constante sein; ist dies jedoch nicht der Fall, so leite man genau so, wie man aus (54) die Gleichung (57) entwickelt hat, aus (57), die wir kürzer in der Form

$$(58)\quad B_1 \log W_1 + B_2 \log W_2 + \cdots + B_{\sigma-1} \log W_{\sigma-1} = U$$

schreiben wollen, worin $W_1, \ldots W_{\sigma-1}$ wiederum algebraische Functionen bedeuten, die Beziehung

$$(59)\qquad B_1 \log\left(\frac{W_1}{W_{\sigma-1}^{\frac{\nu_1}{\nu_{\sigma-1}}}}\right) + B_2 \log\left(\frac{W_2}{W_{\sigma-1}^{\frac{\nu_2}{\nu_{\sigma-1}}}}\right) + \cdots + B_{\sigma-2} \log\left(\frac{W_{\sigma-2}}{W_{\sigma-1}^{\frac{\nu_{\sigma-2}}{\nu_{\sigma-1}}}}\right) = U$$

ab; fährt man so fort, so gelangt man, wenn nicht schon früher alle Logarithmanden, also auch U sich als constant ergaben, zu einer Gleichung

$$(60)\qquad B_1 \log T_1 = U,$$

worin T_1 eine algebraische Function ist, was unmöglich, wenn nicht T_1 also auch U eine Constante ist. Wir finden somit,

dass für jede in logarithmischen Transcendenten algebraischer Logarithmanden lineare mit constanten Coefficienten versehene Relation

$$(61)\qquad A_1 \log V_1 + A_2 \log V_2 + \cdots + A_\sigma \log V_\sigma = U$$

*die Grösse U eine Constante sein muss**).

*) Es mag noch bemerkt werden, dass für eine beliebige irreductible algebraische Relation zwischen logarithmischen Functionen algebraischer Logarithmanden

Aus der Gleichung (49) *folgt somit, dass $\bar{u} - \varepsilon u$ einer Constanten gleich ist.*

Da aber u eine rationale Function von x und Y_1 ist, sich also vermöge der Gleichung (42) in die Form setzen lässt

$$(62)\qquad u = F_0(x) + F_1(x)\, Y_1 + F_2(x)\, Y_1^2 + \cdots + F_{k\mu-1}(x)\, Y_1^{k\mu-1},$$

worin $F_0(x), \ldots F_{k\mu-1}(x)$ rationale Functionen von x bedeuten, so wird

$$(63)\qquad \bar{u} = F_0(x) + \varepsilon F_1(x)\, Y_1 + \varepsilon^2 F_2(x)\, Y_1^2 + \cdots + \varepsilon^{k\mu-1} F_{k\mu-1}(x)\, Y_1^{k\mu-1}$$

und somit nach (53)

$$(64)\; \bar{u} - \varepsilon u = (1-\varepsilon)\, F_0(x) + \varepsilon(\varepsilon - 1)\, F_2(x)\, Y_1^2 + \varepsilon(\varepsilon^2-1) F_3(x)\, Y_1^3 + \cdots + \varepsilon(\varepsilon^{k\mu-2}-1) F_{k\mu-1}(x)\, Y_1^{k\mu-1} = C,$$

worin C eine Constante und ε eine μ^{te} Einheitswurzel war. Da aber die Gleichung (42) eine irreductible sein sollte, so müssen in (64) die einzelnen Coefficienten verschwinden, und da, weil μ eine primitive Einheitswurzel war, nur

$$\varepsilon^\mu = \varepsilon^{2\mu} = \cdots = \varepsilon^{(k-1)\mu} = 1$$

ist, so werden alle $F_\alpha(x)$ mit Ausnahme von $F_1(x)$, $F_{\mu+1}(x)$, $F_{2\mu+1}(x), \ldots F_{(k-1)\mu+1}(x)$ verschwinden müssen, so dass nach (62) *die Function u die Form hat*

$$(65)\qquad u = Y_1 \{ F_1(x) + F_{\mu+1}(x)\, Y_1^\mu + F_{2\mu+1}(x)\, Y_1^{2\mu} + \cdots + F_{(k-1)\mu+1}(x)\, Y_1^{(k-1)\mu} \},$$

worin die $F_\alpha(x)$ rationale Functionen bedeuten.

$$(\text{A})\qquad F(x, \log V_1, \log V_2, \ldots \log V_\sigma) = 0$$

oben bewiesen war, dass unter der Voraussetzung, dass nicht schon einige dieser logarithmischen Functionen algebraisch von einander abhängen, die Relation (A) eine lineare mit constanten Coefficienten sein muss, und dass somit der oben bewiesene Satz auf den folgenden führt:

Jede algebraische Beziehung zwischen σ logarithmischen Functionen, die nicht schon in geringerer Zahl algebraisch von einander abhängen, lautet

$$A_1 \log V_1 + A_2 \log V_2 + \cdots + A_\sigma \log V_\sigma = A,$$

worin $A, A_1, \ldots A_\sigma$ Constanten bedeuten.

Soll nun in dem Integralausdrucke (43) nur *ein* Logarithmus vorkommen, dieser also die Form haben

$$y_1 = u + A_1 \log v_1, \tag{66}$$

so würde die Gleichung (52) lauten

$$\bar{k}_1 - \varepsilon k_1 = 0, \tag{67}$$

worin k_1, also auch $\bar{k}_1$ von Null verschieden ist. Da aber eine primitive μ^{te} Einheitswurzel bekanntlich nur dann eine rationale Zahl sein kann, wenn $\mu = 1$ oder 2, also $\varepsilon = \pm 1$ ist, so ergiebt sich zunächst der folgende Satz:

Die Differentialgleichung (41), *deren rechte Seite der Gleichung* (42) *genügt, kann nur dann algebraisch-logarithmische Integrale von der Form*

$$y_1 = u + A_1 \log v_1$$

besitzen, wenn $\mu = 1$ oder 2 ist; u ist durch Y_1 in der Form (65) *dargestellt.*

Soll das Integral die Form haben

$$y_1 = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2, \tag{68}$$

so würde die Gleichung (52) lauten

$$A_1(\bar{k}_1 - \varepsilon k_1) + A_2(\bar{k}_2 - \varepsilon k_2) = 0 \tag{69}$$

und hieraus

$$A_2 = - A_1 \frac{\bar{k}_1 - \varepsilon k_1}{\bar{k}_2 - \varepsilon k_2}, \tag{70}$$

so dass (68) in

$$y_1 = u + A_1 \left\{ \log v_1 - \frac{\bar{k}_1 - \varepsilon k_1}{\bar{k}_2 - \varepsilon k_2} \log v_2 \right\} \tag{71}$$

übergeht. Nach den obigen Auseinandersetzungen wird dieser Ausdruck ein Integral der Differentialgleichung (45) werden, wenn wir in den rationalen Functionen v_1 und v_2 von x und Y_1 statt Y_1 die Grösse Y_2 setzen; nehmen wir nun für Y_2 die Lösung $\varepsilon^2 Y_1$ der Gleichung (42), so wird

$$y_2 = u + A_1 \left\{ \log \bar{v}_1 - \frac{\bar{k}_1 - \varepsilon k_1}{\bar{k}_2 - \varepsilon k_2} \log \bar{\bar{v}}_2 \right\} \tag{72}$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d\bar{\bar{y}}}{dx} = \varepsilon^2 Y_1, \tag{73}$$

worin $\bar{\bar{u}}$, $\bar{\bar{v}}_1$ und $\bar{\bar{v}}_2$ aus u, v_1 und v_2 hervorgehen, indem in diesen rationalen Functionen von x und Y_1 statt Y_1 überall $\varepsilon^2 Y_1$ gesetzt wird. Da aber aus

$$\frac{dy_1}{dx} = Y_1, \quad \frac{dy_2}{dx} = \varepsilon^2 Y_1 \tag{74}$$

folgt, dass

$$y_2 - \varepsilon^2 y_1 = k, \tag{75}$$

worin k eine Constante bedeutet, so liefern die Gleichungen (71) und (72) die Beziehung

$$\bar{\bar{u}} - \varepsilon^2 u + A_1 \left\{ \log \bar{\bar{v}}_1 - \varepsilon^2 \log v_1 - \frac{\bar{\bar{k}}_1 - \varepsilon k_1}{\bar{\bar{k}}_2 - \varepsilon k_2} (\log \bar{\bar{v}}_2 - \varepsilon^2 \log v_2) \right\} = k. \tag{76}$$

Daraus folgt zunächst wieder nach dem oben bewiesenen Satze, dass

$$\bar{\bar{u}} - \varepsilon^2 u = L \tag{77}$$

sein muss, worin L eine Constante bedeutet; da ferner

$$\begin{aligned} \bar{\bar{u}} = F_0(x) + \varepsilon^2 F_1(x)\, Y_1 + \varepsilon^4 F_2(x)\, Y_1^2 + \cdots \\ + \varepsilon^{2(k\mu-1)} F_{k\mu-1}(x)\, Y_1^{k\mu-1} \end{aligned} \tag{78}$$

und somit

$$\begin{aligned} u - \varepsilon^2 u = (1 - \varepsilon^2)\, F_0(x) + \varepsilon^2 (\varepsilon^2 - 1)\, F_2(x)\, Y_1^2 \\ + \varepsilon^2 (\varepsilon^4 - 1)\, F_3(x)\, Y_1^3 + \cdots \\ + \varepsilon^2 (\varepsilon^{2k\mu-4} - 1)\, F_{k\mu-1}(x)\, Y_1^{k\mu-1} = L \end{aligned} \tag{79}$$

ist, so ergiebt sich hieraus, dass alle $F_\alpha(x)$ verschwinden müssen mit Ausnahme von $F_1(x)$, $F_{\mu+1}(x)$, $F_{2\mu+1}(x)$, ... $F_{(k-1)\mu+1}(x)$ für den Fall, dass μ eine ungerade Zahl ist, und dass, wenn μ gerade ist, alle $F_\alpha(x)$ verschwinden müssen mit Ausnahme von $F_1(x)$, $F_{\frac{\mu}{2}+1}(x)$, $F_{\mu+1}(x)$, $F_{\frac{3\mu}{2}+1}(x)$, $F_{2\mu+1}(x)$, ... $F_{(k-1)\mu+1}(x)$, so dass für *ungerade* μ

$$\begin{aligned} u = Y_1 \{ F_1(x) + F_{\mu+1}(x)\, Y_1^\mu + F_{2\mu+1}(x)\, Y_1^{2\mu} + \cdots \\ + F_{(k-1)\mu+1}(x)\, Y_1^{(k-1)\mu} \}, \end{aligned} \tag{80}$$

und *für gerade* μ

$$(81)\quad u = Y_1 \Big\{ F_1(x) + F_{\frac{\mu}{2}+1}(x)\, Y_1^{\frac{\mu}{2}} + F_{\mu+1}(x)\, Y_1^{\mu} + F_{\frac{3\mu}{2}+1}(x)\, Y^{\frac{3\mu}{2}} + \cdots + F_{(k-1)\mu+1}(x)\, Y_1^{(k-1)\mu} \Big\}$$

wird. Setzt man in Gleichung (76) $\frac{k-L}{A_1}$ gleich der Constanten m und betrachtet in der Gleichung

$$(82)\quad \log \bar{v}_1 - \varepsilon^2 \log v_1 - \frac{\bar{k}_1 - \varepsilon k_1}{\bar{k}_2 - \varepsilon k_2} (\log \bar{\bar{v}}_2 - \varepsilon^2 \log v_2) = m$$

wieder $\bar{\bar{v}}_1$, v_1, $\bar{\bar{v}}_2$ als Functionen von v_2, so erhält man, wenn man v_2 so oft seinen Nullpunkt umkreisen lässt, dass $\bar{\bar{v}}_1$, v_1, $\bar{v}_2$ ihre Ausgangswerthe wieder annehmen, die Beziehung

$$(83)\quad \bar{n}_1 - \varepsilon^2 n_1 - \frac{\bar{k}_1 - \varepsilon k_1}{\bar{k}_2 - \varepsilon k_2} (\bar{n}_2 - \varepsilon^2 n_2) = 0,$$

worin $\bar{n}_1$, n_1, $\bar{n}_2$, n_2 ganze Zahlen bedeuten, von denen jedenfalls die letztere von Null verschieden ist. Indem vorher k_2 die Anzahl der Umläufe bezeichnete, die v_2 machte, um v_1, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ebenfalls an ihre Stelle zu bringen, hier n_2 die Umläufe, die wiederum v_2 macht, um v_1, v_1, $\bar{\bar{v}}_2$ an ihre Stelle zu führen, so werden, wenn wir als Zahl der Umläufe für beide Fälle das kleinste gemeinsame Vielfache beider nehmen, $n_1 = k_1$ und $n_2 = k_2$ sein, und somit die Gleichung (83) in

$$(84)\quad \bar{n}_1 - \varepsilon^2 k_1 - \frac{\bar{k}_1 - \varepsilon k_1}{\bar{k}_2 - \varepsilon k_2} (\bar{n}_2 - \varepsilon^2 k_2) = 0$$

übergehen, oder es wird ε die Lösung der quadratischen*) ganzzahligen Gleichung sein

$$(85)\quad (\bar{k}_1 k_2 - k_1 \bar{k}_2)\varepsilon^2 + (\bar{n}_2 k_1 - k_2 \bar{n}_1)\varepsilon + (\bar{n}_1 \bar{k}_2 - \bar{n}_2 \bar{k}_1) = 0,$$

und dies kann, wie aus den Elementen der Algebra bekannt ist, nur für $\mu = 3$, 4 oder 6 statthaben.

*) Es ist aus den obigen Ausdrücken leicht zu sehen, dass, wenn der erste oder dritte Coefficient dieser quadratischen Gleichung verschwindet, ε also eine rationale Zahl wird, die beiden Logarithmen der Reductionsform sich zu *einem* Logarithmus einer algebraischen Function von x zusammensetzen, wir somit zu dem schon oben behandelten Falle zurückgeführt werden.

Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die Differentialgleichung (41), *deren rechte Seite der Gleichung* (42) *genügt, kann nur dann algebraisch-logarithmische Integrale von der Form*

$$y_1 = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2$$

besitzen, wenn μ *die Werthe* 3, 4 *oder* 6 *hat;* u *ist dann in seiner Form durch die Gleichungen* (80) *oder* (81) *bestimmt.*

Für die Reduction auf drei Logarithmen finden wir als nothwendige Bedingung $\mu = 5, 8, 10$ oder 12, u. s. w.; doch gehen wir auf eine fernere Untersuchung dieser Fragen hier nicht weiter ein, da es uns nur darauf ankam, die Methoden darzulegen, nach denen derartige Fragen zu behandeln sind, die, wie wir nachher sehen werden, sich für beliebige lineare Differentialgleichungsysteme in genau derselben Weise durchführen lassen.

5. Im Allgemeinen werden aber die Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{86}$$

in welcher $f(x)$ eine algebraische Function bedeutet, nicht auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar sein, sondern je nach der Beschaffenheit von $f(x)$ wesentlich neue Transcendenten definiren; wenn die Differentialgleichung (86) von der Form ist

$$f_0(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x) = 0,$$

worin $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ ganze Functionen von x sind, so werden die Integrale derselben, wenn die Discriminante

$$f_1(x)^2 - 4 f_0(x) f_2(x)$$

nur drei oder vier Lösungen in ungerader Vielfachheit besitzt, *elliptische* Integrale, wenn mehr, dann *hyperelliptische* Integrale genannt; allgemein heissen die Integrale der Differentialgleichungen von der Form

$$f_0(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + f_1(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \cdots + f_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_n(x) = 0,$$

wie schon oben erwähnt, *Abel*'sche Integrale.

Es wird zunächst darauf ankommen, den Charakter der Integrale der Differentialgleichung (86) um die singulären Punkte herum festzustellen.

Sei x_0 ein Werth von x, um den herum $f(x)$ die Entwicklung besitzt

$$(87) \qquad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots,$$

so wird

$$(88) \qquad y = \eta + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x - x_0)^3 + \cdots$$

sein, wenn dem $x = x_0$ der willkürliche Werth η für y zugeordnet wird; ist dagegen $f(x)$ für $x = x_0$ eindeutig, aber unendlich, so dass

$$(89) \qquad f(x) = a_{-n}(x - x_0)^{-n} + a_{-n+1}(x - x_0)^{-n+1} + \cdots$$
$$+ a_{-1}(x - x_0)^{-1} + a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots$$

wird, so nimmt y die Form an

$$(90) \quad y = \frac{a_{-n}}{-n+1}(x - x_0)^{-n+1} + \frac{a_{-n+1}}{-n+2}(x - x_0)^{-n+2} + \cdots$$
$$+ a_{-1}\log(x - x_0) + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \cdots,$$

und in diesem Falle kann also dem $x = x_0$ nur der Werth $y = \infty$ zugeordnet werden; das Integral der Differentialgleichung bleibt somit eindeutig und unendlich, wenn $a_{-1} = 0$ ist, im entgegengesetzten Falle wird es unendlich vieldeutig wie die logarithmische Function $\log(x - x_0)$.

Ist jedoch die algebraische Function $f(x)$ im Punkte $x = x_0$ mehrdeutig, so wird, wenn sie daselbst einen endlichen Werth annimmt,

$$(91) \qquad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{\frac{1}{\nu}} + a_2(x - x_0)^{\frac{2}{\nu}} + \cdots,$$

und somit wieder mit Zuordnung eines willkürlichen Werthes η von y

$$(92) \quad y = \eta + a_0(x - x_0) + \frac{\nu a_1}{\nu+1}(x - x_0)^{\frac{\nu+1}{\nu}} + \frac{\nu a_2}{\nu+2}(x - x_0)^{\frac{\nu+2}{\nu}} + \cdots,$$

also um $x = x_0$ herum wieder ν-deutig sein, und ist endlich $f(x)$ in dem ν-fachen Verzweigungspunkte x_0 unendlich, also

$$(93)\quad f(x) = a_{-n}(x-x_0)^{\frac{-n}{\nu}} + a_{-n+1}(x-x_0)^{\frac{-n+1}{\nu}} + \cdots$$
$$+ a_{-1}(x-x_0)^{-\frac{1}{\nu}} + a_0 + a_1(x-x_0)^{\frac{1}{\nu}} + \cdots,$$

so wird,

1) wenn $n < \nu$,

$$(94)\quad y = \eta + \frac{\nu a_{-n}}{\nu - n}(x-x_0)^{\frac{\nu-n}{\nu}} + \frac{\nu a_{-n+1}}{\nu+1-n}(x-x_0)^{\frac{\nu+1-n}{\nu}} + \cdots$$

mit Zuordnung des willkürlichen Werthes η eine in $x = x_0$ ν-deutige Function,

2) wenn $n = \nu$,

$$(95)\quad y = a_{-\nu}\log(x-x_0) + \nu a_{-\nu+1}(x-x_0)^{\frac{1}{\nu}} + \cdots$$

mit Zuordnung des Werthes $y = \infty$ eine wie ein Logarithmus unendlich vieldeutige Function, und

3) wenn $n > \nu$

$$(96)\quad y = \frac{\nu a_{-n}}{\nu - n}(x-x_0)^{-\frac{n-\nu}{\nu}} + \frac{\nu a_{-n+1}}{\nu+1-n}(x-x_0)^{-\frac{n-\nu-1}{\nu}} + \cdots$$

eine mit Zuordnung des Werthes $y = \infty$ ν-deutige oder logarithmisch unendlich vieldeutige Function, je nachdem in der Entwicklung (93) das Glied mit der negativen ersten Potenz fehlt oder darin enthalten ist.

Wir finden somit,

dass die Integrale der Differentialgleichung (86) *in den singulären Punkten stets nur algebraisch oder logarithmisch vieldeutig und unendlich werden,*

und es ist leicht, die Entwicklungsform in der Umgebung eines jeden Punktes festzustellen.

6. Nachdem die Untersuchung der Eigenschaften der Integrale der Differentialgleichung (86) in den singulären Punkten durch deren Entwicklung ermöglicht ist, bleibt uns noch, um analog den früheren Auseinandersetzungen über rationale Differentialgleichungen der Form (17) zu verfahren, übrig, das Functionaltheorem aufzustellen, dem die Integrale der Differentialgleichung (86) genügen, und das uns später auch für die linearen Differentialgleichungsysteme beliebiger Klasse wichtige Schlüsse gestatten wird.

Sei z eine durch die irreductible algebraische Gleichung von der Dimension n

$$(97)\quad P(x, z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots + p_{n-1} z + p_n = 0,$$

in welcher p_δ eine ganze Function δ^{ten} Grades von x bedeutet, definirte algebraische Function, und sei die zu integrirende Differentialgleichung der Form (86) dargestellt durch

$$(98)\quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, z),$$

worin φ eine rationale Function von x und z bedeutet. Wenn wir mit (97) eine andere algebraische Gleichung von der ν^{ten} Dimension

$$(99)\quad Q(x, z) = q_0 z^\nu + q_1 z^{\nu-1} + q_2 z^{\nu-2} + \cdots + q_{\nu-1} z + q_\nu = 0$$

zusammenstellen, in welcher q_δ wiederum eine ganze Function δ^{ten} Grades von x vorstellt, deren Coefficienten unbestimmt und mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bezeichnet werden mögen, und eliminiren die Grösse z zwischen den Gleichungen (97) und (99), so wird sich eine Gleichung im Allgemeinen vom $\mu = n \cdot \nu^{\text{ten}}$ Grade

$$(100)\quad F(x) = 0$$

ergeben, deren Lösungen

$$(101)\quad x_1, x_2, \ldots x_\mu$$

diejenigen Werthe von x liefern, für welche die beiden Gleichungen (97) und (99) gemeinsame z-Werthe haben, die sich, wie aus der Eliminationstheorie bekannt, im Allgemeinen als rationale Functionen der entsprechenden x-Werthe und der Coefficienten der beiden Gleichungen in der Form ergeben

$$(102)\quad z_\varrho = r(x_\varrho, a_1, a_2, a_3, \cdots).$$

Lässt man nun in der Gleichung (99) die Grössen a_1, a_2, a_3, ... sich um da_1, da_2, da_3, ... ändern, so werden auch die Coefficienten der Gleichung (100), also auch deren Lösungen (101) sich um unendlich kleine Grössen vermehrt haben, so dass

$$(103)\quad \frac{\partial F}{\partial x_\varrho} dx_\varrho + \frac{\partial F}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial F}{\partial a_2} da_2 + \frac{\partial F}{\partial a_3} da_3 + \cdots = 0$$

oder

(104) $dx_\varrho = R_1(x_\varrho, a_1, a_2, \cdots)\, da_1 + R_2(x_\varrho, a_1, a_2, \cdots)\, da_2 + \cdots$

wird, worin $R_1, R_2, \ldots$ rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten.

Bezeichnen wir nun die den Werthen x_ϱ, z_ϱ entsprechenden Werthe eines Integrales der Differentialgleichung (98) mit y_ϱ, so folgt, dass

(105) $$dy_1 + dy_2 + \cdots + dy_\mu$$

$$= \{\varphi(x_1, z_1) R_1(x_1, a_1, a_2, \cdots) + \varphi(x_2, z_2) R_1(x_2, a_1, a_2, \cdots) + \cdots\}\, da_1$$

$$+ \{\varphi(x_1, z_1) R_2(x_1, a_1, a_2, \cdots) + \varphi(x_2, z_2) R_2(x_2, a_1, a_3, \cdots) + \cdots\}\, da_2$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

oder, da die Klammern vermöge (102) symmetrische rationale Functionen der Lösungen der Gleichung (100), also rational durch deren Coefficienten ausdrückbar sind,

(106) $$dy_1 + dy_2 + \cdots + dy_\mu$$
$$= \varrho_1(a_1, a_2, \cdots)\, da_1 + \varrho_2(a_1, a_2, \cdots)\, da_2 + \cdots,$$

worin $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ rationale Functionen bedeuten.

Lassen wir nun die Grössen $a_1, a_2, \ldots$ von irgend einem Anfangsystem $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots$ bis zu irgend einem Endsysteme $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots$ gehen, so werden die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ von einem bestimmten Anfangsysteme $x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \ldots x_\mu^{(0)}$ auf festen, durch die Variationen der a bestimmten Curven zu einem bestimmten Endsysteme $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots x_\mu^{(1)}$ laufen, und wenn wir nunmehr alle zugehörigen Gleichungen zusammenaddiren und berücksichtigen, dass auf der rechten Seite Integrale rationaler Differentiale von $a_1, a_2, \ldots$ sich ergeben, die sich also wie oben gezeigt rational und logarithmisch durch a_1, $a_2, \ldots$ ausdrücken lassen, so folgt auf Grund früher erklärter Bezeichnungen

(107) $$\int_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(1)}} dy + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2^{(1)}} dy + \cdots + \int_{x_\mu^{(0)}}^{x_\mu^{(1)}} dy = \text{rat. log}\,(a_1, a_2, \cdots),$$

worin die Integrationswege fest bestimmt sind, oder, wenn das Integral der Differentialgleichung (98) mit $J(x, z)$ bezeichnet wird

$$(108)\ \int_{x_1^{(0)},\, z_1^{(0)}}^{x_1^{(1)},\, z_1^{(1)}} dJ(x,z) + \int_{x_2^{(0)},\, z_2^{(0)}}^{x_2^{(1)},\, z_2^{(1)}} dJ(x,z) + \cdots + \int_{x_\mu^{(0)},\, z_\mu^{(0)}}^{x_\mu^{(1)},\, z_\mu^{(1)}} dJ(x,z) = \text{rat.}\log(a_1, a_2, \cdots).$$

Sei nun σ die Anzahl der in der Gleichung (99) enthaltenen unbestimmten Coefficienten $a_1, a_2, \ldots,$ so werden wir in dieser Gleichung die Werthe $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_\sigma^{(0)}$ im Allgemeinen so wählen können, dass dieselbe durch das willkürlich bestimmte, aber der Gleichung (97) genügende Werthesystem

$$(109)\qquad x_1^{(0)}, z_1^{(0)};\ x_2^{(0)}, z_2^{(0)};\ \ldots x_\sigma^{(0)}, z_\sigma^{(0)}$$

befriedigt wird, und ebenso $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots a_\sigma^{(1)}$ so, dass den Gleichungen (97) und (99) das willkürlich gewählte Werthesystem

$$(110)\qquad x_1^{(1)}, z_1^{(1)};\ x_2^{(1)}, z_2^{(1)};\ \ldots x_\sigma^{(1)}, z_\sigma^{(1)}$$

genügt, und dann lassen sich die Werthe

$$x_{\sigma+1}^{(0)}, z_{\sigma+1}^{(0)};\ \ldots x_\mu^{(0)}, z_\mu^{(0)};\ x_{\sigma+1}^{(1)}, z_{\sigma+1}^{(1)};\ \ldots x_\mu^{(1)}, z_\mu^{(1)}$$

in folgender Weise einfach bestimmen. Setzt man nämlich das Werthesystem (109) in die Gleichung (99) ein, so werden die Grössen $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_\sigma^{(0)}$, da sie als Coefficienten nur linear in dieser Gleichung enthalten sind, sich sämmtlich *rational* durch das Werthesystem (109) ausdrücken lassen; beachtet man nun, dass die Gleichung (100) in die Form gesetzt werden kann

$$(111)\ F(x) = (x - x_1^{(0)})(x - x_2^{(0)}) \cdots (x - x_\sigma^{(0)})(x - x_{\sigma+1}^{(0)}) \cdots (x - x_\mu^{(0)}) = 0,$$

und dass die Coefficienten von $F(x)$ rational aus $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_\sigma^{(0)}$ d. h. rational aus dem Werthesystem (109) zusammengesetzt sind, so folgt aus (111) durch Division der linken Seite $F(x)$ durch das Product der σ ersten linearen Factoren, dass $x_{\sigma+1}^{(0)}, \ldots x_\mu^{(0)}$ sich als Lösungen einer algebraischen Gleichung $\mu - \sigma^{\text{ten}}$ Grades darstellen lassen, deren Coefficienten rationale Functionen des Werthesystems (109) sind, und das-

selbe gilt für das Werthesystem (110), so dass sich aus (108) zunächst der folgende Satz ergiebt:

Stellt man mit der algebraischen Gleichung (97) *die Gleichung* (99) *zusammen, welche* σ *willkürliche Constanten besitzt, so kann man* 2σ *Werthesysteme*

$$(112)\quad x_1^{(0)},\ z_1^{(0)};\ \ldots x_\sigma^{(0)},\ z_\sigma^{(0)};\qquad (113)\quad x_1^{(1)},\ z_1^{(1)};\ \ldots x_\sigma^{(1)},\ z_\sigma^{(1)}$$

der Gleichung (97) *willkürlich so wählen, dass, wenn* μ *der Grad der Eliminationsgleichung von* z *zwischen* (97) *und* (99) *ist, für die Differentialgleichung* (98) *die Integralbeziehung stattfindet*

$$(114)\quad \int_{x_1^{(0)},\, z_1^{(0)}}^{x_1^{(1)},\, z_1^{(1)}} dJ(x,z) + \cdots + \int_{x_\sigma^{(0)},\, z_\sigma^{(0)}}^{x_\sigma^{(1)},\, z_\sigma^{(1)}} dJ(x,z) = -\int_{x_{\sigma+1}^{(0)},\, z_{\sigma+1}^{(0)}}^{x_{\sigma+1}^{(1)},\, z_{\sigma+1}^{(1)}} dJ(x,z) - \cdots - \int_{x_\mu^{(0)},\, z_\mu^{(0)}}^{x_\mu^{(1)},\, z_\mu^{(1)}} dJ(x,z)$$

$$+ \text{rat.} \log\left(x_1^{(0)},\ z_1^{(0)};\ \ldots\, x_\sigma^{(0)},\ z_\sigma^{(0)};\ x_1^{(1)},\ z_1^{(1)};\ \ldots x_\sigma^{(1)},\ z_\sigma^{(1)}\right),$$

worin $x_{\sigma+1}^{(0)}, \ldots x_\mu^{(0)}$ *sowie* $x_{\sigma+1}^{(1)}, \ldots x_\mu^{(1)}$ *Lösungen zweier algebraischer Gleichungen des* $\mu - \sigma^{\text{ten}}$ *Grades sind, deren Coefficienten* r a t i o n a l *aus dem Werthesysteme* (112) *resp.* (113) *zusammengesetzt sind, und deren zugehörige algebraische Irrationalitäten* $z_{\sigma+1}^{(0)}, \ldots z_\mu^{(0)}$ *und* $z_{\sigma+1}^{(1)} \ldots z_\mu^{(1)}$, *wie aus dem oben angegebenen Eliminationsverfahren hervorgeht, so beschaffen sind, dass sich*

$$z_\lambda^{(0)} \quad \text{resp.} \quad z_\lambda^{(1)}$$

r a t i o n a l durch

$$x_\lambda^{(0)};\ x_1^{(0)},\ z_1^{(0)};\ \ldots x_\sigma^{(0)},\ z_\sigma^{(0)} \ \text{resp.}\ x_\lambda^{(1)};\ x_1^{(1)},\ z_1^{(1)};\ \ldots x_\sigma^{(1)},\ z_\sigma^{(1)}$$

ausdrücken lassen.

Man kann nun statt der Gleichung (99), ohne die linke Seite der Gleichung (108) zu ändern, offenbar jede andere Gleichung ν^{ter} Dimension setzen, welche mit (97) dieselben Werthesysteme

$$(115)\qquad x_1,\ z_1;\ x_2,\ z_2;\ \ldots x_\mu,\ z_\mu$$

gemein hat; bildet man nun unter der Annahme, dass $\nu > n$ ist, die Gleichung ν^{ter} Dimension

$$(116)\qquad S(x,z) = Q(x,z) - R(x,z)\, P(x,z) = 0,$$

worin $R(x, z)$ ein ganzes Polynom $\nu - n^{\text{ter}}$ Dimension dar-

stellt, so ist zunächst ersichtlich, dass die Gleichung (116) durch die P und Q gemeinsamen Werthesysteme ebenfalls befriedigt wird, andererseits werden die noch unbestimmten

$$\frac{(\nu-n+1)(\nu-n+2)}{2}$$

Coefficienten der Function $\nu-n^{\text{ter}}$ Dimension $R(x,z)$ so bestimmt werden können, dass

$$\frac{(\nu-n+1)(\nu-n+2)}{2} \quad \text{von den} \quad \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$$

Coefficienten des Polynoms ν^{ter} Dimension $S(x,z)$ verschwinden, und somit die Gleichung (116) nur noch mit Abzug einer multiplicatorischen Constanten

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}-\frac{(\nu-n+1)(\nu-n+2)}{2}-1=n\nu-\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$
$$=\mu-\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

zu bestimmende Constanten $a_1, a_2, \ldots$ besitzt. Daraus folgt aber, da oben σ die Anzahl der Constanten $a_1, a_2, \ldots$ war, dass wir in der Gleichung (114)

$$\sigma=\mu-\frac{(n-1)(n-2)}{2} \tag{117}$$

wählen dürfen, und *dass somit die Anzahl $\mu-\sigma$ der auf der rechten Seite der Gleichung* (114) *stehenden Integrale nur von der Dimension n der Gleichung* (97) *abhängt, während die Zahl σ der Integrale der linken Seite der Gleichung vermöge der willkürlich zu wählenden Dimension ν beliebig gross genommen werden kann.*

Wählt man zur Bestimmung der σ Constanten $a_1, a_2, \ldots$ unter den Werthesystemen (112) und (113) sämmtliche δ singuläre Werthesysteme der Gleichung (97), so dass die Gleichung μ^{ten} Grades (100) δ doppelte Lösungen besitzt, so werden sich die auf die singulären Werthesysteme bezüglichen Integrale herausheben, und wir erhalten somit, da dann nach (117) auf der rechten Seite von (114) nur

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\delta=p \tag{118}$$

Integrale bleiben, worin p das *Geschlecht* der algebraischen

Gleichung (97) bezeichnet, den folgenden Satz, welcher das *Abel'sche Theorem* genannt wird:

Ist

$$p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_{n-1} z + p_n = 0 \tag{119}$$

eine algebraische Gleichung von der Dimension n und dem Geschlechte p, und bezeichnet man mit $J(x, z)$ das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, z), \tag{120}$$

worin φ eine rationale Function bedeutet, so ist stets für jedes k

$$\begin{aligned}\int_{x_1^{(0)}, z_1^{(0)}}^{x_1^{(1)}, z_1^{(1)}} dJ(x, z) + \int_{x_2^{(0)}, z_2^{(0)}}^{x_2^{(1)}, z_2^{(1)}} dJ(x, z) + \cdots + \int_{x_k^{(0)}, z_k^{(0)}}^{x_k^{(1)}, z_k^{(1)}} dJ(x, z) \\ = -\int_{X_1^{(0)}, Z_1^{(0)}}^{X_1^{(1)}, Z_1^{(1)}} dJ(x, z) - \cdots - \int_{X_p^{(0)}, Z_p^{(0)}}^{X_p^{(1)}, Z_p^{(1)}} dJ(x, z) \\ + u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\varepsilon \log v_\varepsilon,\end{aligned} \tag{121}$$

worin

$$X_1^{(0)}, \ldots X_p^{(0)} \quad \text{sowie} \quad X_1^{(1)}, \ldots X_p^{(1)}$$

die Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades von der Form

$$\begin{aligned}X^p + f_1(x_1, z_1; x_2, z_2; \cdots x_k, z_k) X^{p-1} + \cdots \\ + f_p(x_1, z_1; x_2, z_2; \cdots x_k, z_k) = 0\end{aligned} \tag{122}$$

sind, in welcher $f_1, \ldots f_p$ rationale symmetrische Functionen der eingeschlossenen Grössen sind, denen der Index 0 *resp.* 1 *oben anzufügen ist, $A_1, \ldots A_\varepsilon$ Constanten, $u, v_1, \ldots v_\varepsilon$ ebenfalls rationale symmetrische Functionen aller unteren und oberen Grenzen der linken Seite von* (121) *sind, und wobei die algebraischen Irrationalitäten $Z_1^{(0)}, \ldots Z_p^{(0)}$ resp. $Z_1^{(1)}, \ldots Z_p^{(1)}$ rational ausdrückbar sind durch den resp. X-Werth und wiederum rationale symmetrische Verbindungen der eben bezeichneten Grössen.*

7. So wie nun oben für die Differentialgleichung (32) sich vermöge des Functionaltheorems des Logarithmus für den Fall der Zurückführbarkeit ihrer Integrale auf algebraisch-

logarithmische Functionen der wichtige Satz ableiten liess, dass in den Integralwerth keine anderen algebraischen Irrationalitäten eintreten als die in der Differentialgleichung enthaltenen, so wird sich nunmehr vermöge des *Abel*'schen Theorems ein ähnlicher ganz allgemeiner Satz ableiten lassen, der später auf beliebige lineare Differentialgleichungssysteme ausgedehnt werden soll.

Sei nämlich das Integral y_1 der Differentialgleichung (32) algebraisch durch x, logarithmische Functionen von algebraischen Functionen von x und durch Integrale $z_1, z_2, \ldots z_k$ der resp. Differentialgleichungen

$$(123)\quad \frac{dz}{dx} = f_1(s_1)\frac{ds_1}{dx},\ \frac{dz}{dx} = f_2(s_2)\frac{ds_2}{dx},\ \cdots \frac{dz}{dx} = f_k(s_k)\frac{ds_k}{dx}$$

ausgedrückt, in welchen $f_1, f_2, \ldots f_k$ algebraische Functionen ihrer Argumente, und $s_1, s_2, \ldots s_k$ algebraische Functionen von x bedeuten, so wird zunächst wieder nach dem oben zu (32) angeführten Satze, wenn

$$(124)\qquad z_1 = J_1(s_1, f_1(s_1)),\ \cdots z_k = J_k(s_k, f_k(s_k))$$

gesetzt wird, die Form der Beziehung nothwendig eine lineare von der Art

$$(125)\quad y_1 = u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_m \log v_m + B_1 J_1(s_1, f_1(s_1)) + \cdots + B_k J_k(s_k, f_k(s_k))$$

sein, worin $u, v_1, \ldots v_m$ algebraische Functionen von x und $A_1, \ldots A_m, B_1, \ldots B_k$ Constanten bedeuten. Aus dem zweiten oben angeführten Satze des ersten Kapitels folgt ferner, dass, wenn wir jetzt wieder eine algebraische Function t_1 von x bilden, welche die Lösung einer mit Adjungirung von x und $f(x)$ irreductibeln Gleichung δ^{ten} Grades

$$(126)\quad t^\delta + \psi_1(x, f(x))\, t^{\delta-1} + \cdots + \psi_\delta(x, f(x)) = 0$$

ist, und durch welche sich die sämmtlichen algebraischen Functionen

$$(127)\quad u, v_1, v_2, \ldots v_m, s_1, f_1(s_1), s_2, f_2(s_2), \ldots s_k, f_k(s_k)$$

rational ausdrücken lassen, wenn wir ferner die der Lösung

t_α vermöge der rationalen Ausdrücke in t entsprechenden Werthe der Grössen (127) mit

$$(128)\quad u_\alpha,\ v_1^{(\alpha)},\ v_2^{(\alpha)}, \ldots v_m^{(\alpha)},\ s_1^{(\alpha)},\ f_1(s_1^{(\alpha)}),\ s_2^{(\alpha)},\ f_2(s_2^{(\alpha)}), \ldots s_k^{(\alpha)}, f_k, (s_k^{(\alpha)})$$

bezeichnen, die δ Werthe für y

$$(129)\begin{cases} y_1 = u_1 + A_1 \log v_1^{(1)} + \cdots + A_m \log v_m^{(1)} + B_1 J_1(s_1^{(1)}, f_1(s_1^{(1)})) + \cdots \\ \qquad\qquad + B_k J_k(s_k^{(1)}, f_k(s_k^{(1)})) \\ y_2 = u_2 + A_1 \log v_1^{(2)} + \cdots + A_m \log v_m^{(2)} + B_1 J_1(s_1^{(2)}, f_1(s_1^{(2)})) + \cdots \\ \qquad\qquad + B_k J_k(s_k^{(2)}, f_k(s_k^{(2)})) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_\delta = u_\delta + A_1 \log v_1^{(\delta)} + \cdots + A_m \log v_m^{(\delta)} + B_1 J_1(s_1^{(\delta)}, f_1(s_1^{(\delta)})) + \cdots \\ \qquad\qquad + B_k J_k(s_k^{(\delta)}, f_k(s_k^{(\delta)})) \end{cases}$$

sämmtlich Integrale von (32) sein werden, und somit auch wie oben von einer additiven Constanten abgesehen

$$(130)\quad y_1 = \frac{1}{\delta}\sum_1^\delta{}^\varrho u_\varrho + \frac{A_1}{\delta}\log v_1^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_1^{(\delta)} + \cdots$$
$$+ \frac{A_m}{\delta}\log v_m^{(1)} v_m^{(2)} \cdots v_m^{(\delta)} + \frac{B_1}{\delta}\sum_1^\delta{}^\varrho J_1(s_1^{(\varrho)}, f_1(s_1^{(\varrho)})) + \cdots$$
$$+ \frac{B_k}{\delta}\sum_1^\delta{}^\varrho J_k(s_k^{(\varrho)}, f_k(s_k^{(\varrho)})).$$

Beachtet man nun wieder, dass die Wertheverbindungen

$$\sum_1^\delta{}^\varrho u_\delta,\quad v_\alpha^{(1)} v_\alpha^{(2)} \ldots v_\alpha^{(\delta)},$$

sowie die symmetrischen Functionen von

$$s_\alpha^{(1)},\ f_\alpha(s_\alpha^{(1)});\ s_\alpha^{(2)},\ f_\alpha(s_\alpha^{(2)});\ \ldots\ s_\alpha^{(\delta)},\ f_\alpha(s_\alpha^{(\delta)})$$

rationale symmetrische Functionen der Lösungen der Gleichung (126), also rational durch x und $f(x)$ ausdrückbar sind, so folgt durch Anwendung des oben ausgesprochenen *Abel*'schen Theorems, indem man die unteren Integralgrenzen constant setzt, der nachstehende Satz:

Ist das Integral einer algebraischen Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

eine algebraische Function von x, von Logarithmen algebraischer Functionen und Integralen von Differentialgleichungen der Form (123), *oder von Abel'schen Integralen, also nothwendig von der Gestalt*

$$y_1 = u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_m \log v_m + B_1 J_1(s_1, f_1(s_1)) + \cdots + B_k J_k(s_k, f_k(s_k)),$$

worin $u, v_1, \ldots v_m, s_1, \ldots s_k$ algebraische Functionen von x, $f_1, f_2, \ldots f_k$ algebraische Functionen ihrer Argumente, $A_1, \ldots A_m, B_1, \ldots B_k$ Constanten bedeuten, so lässt sich dieses Integral stets auf die Form bringen

$$(131) \quad y_1 = U + C_1 \log V_1 + \cdots + C_\mu \log V_\mu + \frac{B_1}{\delta} \sum_1^{p_1} {}^{\varrho} J_1(\tau_{\varrho 1}, f_1(\tau_{\varrho 1})) + \cdots + \frac{B_k}{\delta} \sum_1^{p_k} {}^{\varrho} J_k(\tau_{\varrho k}, f_k(\tau_{\varrho k})),$$

worin δ eine ganze positive Zahl, $C_1, \ldots C_\mu, B_1, \ldots B_k$ Constanten, $p_1, p_2, \ldots p_k$ das Geschlecht der algebraischen Irrationalitäten $f_1(s), f_2(s), \ldots f_k(s)$, ferner $U, V_1, \ldots V_\mu$ rationale Functionen von x und $f(x)$, und $\tau_{1\alpha}, \tau_{2\alpha}, \ldots \tau_{p_\alpha \alpha}$ Lösungen einer algebraischen Gleichung p_α^{ten} Grades von der Form

$$(132) \quad \tau^{p_\alpha} + F_1(x, f(x))\,\tau^{p_\alpha - 1} + \cdots + F_{p_\alpha}(x, f(x)) = 0,$$

in welcher $F_1, \ldots F_{p_\alpha}$ rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, endlich $f_\alpha(\tau_{1\alpha}), f_\alpha(\tau_{2\alpha}), \ldots f_\alpha(\tau_{p_\alpha \alpha})$ rationale Functionen von den resp. $\tau_{1\alpha}, \tau_{2\alpha}, \ldots \tau_{p_\alpha \alpha}$ und den Grössen $x, f(x)$ sind.

8. Wir werden im Folgenden das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} \tag{133}$$

zu betrachten haben, welches man ein *elliptisches Integral erster Gattung* nennt, und dessen Beschaffenheit um die singulären Punkte der Differentialgleichung, die offenbar $x = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind, untersucht werden soll.

Aus den früheren Auseinandersetzungen ist zunächst ersichtlich, dass das Integral y um einen beliebigen Punkt ξ der Ebene — ausser um $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — eine nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x - \xi$ fortschreitende Entwicklung besitzt; greifen wir jedoch einen der singulären Punkte z. B. α heraus, so wird die Differentialgleichung (133) in der Umgebung von α lauten:

$$\frac{dy}{dx} = (x-\alpha)^{-\frac{1}{2}} (a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + \cdots),$$

worin a_0 von Null verschieden ist, und somit

$$y - \eta = 2a_0(x-\alpha)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} a_1 (x-\alpha)^{\frac{3}{2}} + \cdots, \tag{134}$$

also das Integral zweideutig und endlich. Setzt man ferner, um das Integral in der Umgebung des unendlich entfernten Punktes zu untersuchen,

$$x = \frac{1}{t}, \tag{135}$$

so geht (133) in

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha t)(1-\beta t)(1-\gamma t)(1-\delta t)}} \tag{136}$$

über, und da $t = 0$ weder ein Verzweigungspunkt noch ein Discontinuitätspunkt der rechten Seite ist, also, wenn die Quadratwurzel für $t = 0$ positiv genommen wird,

$$\frac{dy}{dt} = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$$

und somit

$$y - \eta = t + \frac{b_1}{2} t^2 + \cdots$$

ist, so lautet die Entwicklung von y um den unendlich entfernten Punkt herum

$$(137) \qquad y - \eta = x^{-1} + \frac{b_1}{2} x^{-2} + \cdots,$$

ist also dort eindeutig und endlich, und wir finden somit,

dass das Integral der Differentialgleichung (133) *eine für alle endlichen und unendlichen Werthe der Variabeln endlich bleibende Function ist.*

Wir wollen nunmehr untersuchen, welche Werthveränderung das Integral bei Umkreisung der singulären Punkte erleidet.

Fassen wir den singulären Punkt α in's Auge und lassen y von $x = 0$ ausgehend einen geschlossenen Weg um α beschreiben, der aus der von 0 nach α gehenden Geraden, einem unendlich kleinen um α gelegten Kreise und derselben von α nach 0 zurückführenden Geraden bestehen soll, so wird der Werth des Integrales der Differentialgleichung, wenn zur Abkürzung

$$(138) \qquad (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) = R(x)$$

gesetzt und beachtet wird, dass bei einer Umkreisung von α die Quadratwurzel ihr Zeichen ändert, in

$$(139) \qquad \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_{(\alpha)} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} - \int_\alpha^0 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

übergehen; setzt man nun für das um α zu nehmende Kreisintegral

$$(140) \qquad x - \alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

worin r unendlich klein ist, so sieht man sofort, dass, weil

$$dx = ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)d\varphi, \quad \sqrt{x - \alpha} = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

ist,

$$(141) \qquad \int_{(\alpha)} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = 0$$

wird, da der Zähler eines jeden Elementes den Factor $r^{\frac{1}{2}}$ für unendlich kleine r behält, und es geht somit die Veränderung des Integrales nach (139) in

(142) $$A = 2\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

über. Aber durch die Umkreisung des Punktes α ist auch die Differentialgleichung (133) verändert worden, indem $\sqrt{R(x)}$ in $-\sqrt{R(x)}$ überging, und es würde somit, wenn man den singulären Punkt α noch einmal umkreiste, damit auch die Differentialgleichung ihre frühere Form wieder annimmt, die Veränderung des Integrales $A - A = 0$ geworden sein. Lässt man jedoch das Integral zugleich die Punkte α und β, α und γ, α und δ umkreisen, so wird einerseits die Differentialgleichung unverändert bleiben, andererseits wird, wenn

(143) $$B = 2\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad C = 2\int_0^\gamma \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad D = 2\int_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

gesetzt wird, die Veränderung des Integrales

(144) $$2(A - B), \quad 2(A - C), \quad 2(A - D)$$

sein, und da wir die Variable x beliebig oft diese Umkreisungen machen lassen können, *so werden also zu jedem Werthe von x unendlich viele Integralwerthe der Differentialgleichung* (133) *gehören, die sich alle um Grössen der Form*

(145) $$2m_1(A - B) + 2m_2(A - C) + 2m_3(A - D)$$

unterscheiden, worin m_1, m_2, m_3 beliebige positive oder negative ganze Zahlen bedeuten.

Aber es ist leicht zu sehen, dass die Grössen (144) nicht von einander unabhängig sind. Denn da, wie vorher gezeigt worden, der unendlich entfernte Punkt kein singulärer ist, also für eine Umkreisung des unendlich entfernten Punktes das Integral der Differentialgleichung (133) eindeutig bleibt, andererseits eine solche aber das Integral um $A - B + C - D$ ändert, so muss

(146) $$A - B + C - D = 0$$

sein oder

(147) $$A - D = (A - C) - (A - B),$$

so dass für beliebige Umkreisungen der singulären Punkte das Integral nach (145) *um*

$$(148)\qquad 2\mu(A-B)+2\nu(A-C)$$

zunimmt, worin μ *und* ν *beliebige ganze Zahlen bedeuten.*

Man nennt die Grössen

$$(149)\qquad 2(A-B)=\omega_1,\quad 2(A-C)=\omega_2$$

die *Periodicitätsmoduln* des Integrales der Differentialgleichung (133).

9. Nachdem wir die Veränderung der Integrale der Differentialgleichung (133) bei beliebiger Umkreisung der singulären Punkte festgestellt haben, wollen wir das zugehörige Functionaltheorem, als speciellen Fall des *Abel*schen Theorems, entwickeln.

Setzt man der Gleichung (97) entsprechend

$$(150)\qquad z^2-(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=0,$$

so dass die Differentialgleichung (133) der Gleichung (98) analog in

$$(151)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{z}$$

übergeht, und stellt man mit (150) die der Gleichung (99) entsprechende Gleichung

$$(152)\qquad z-(\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}+a_1x+a_2x^2)=0$$

zusammen, so wird das Eliminationsresultat (100) lauten:

$$(153)\qquad F(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$
$$-\left(\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}+a_1x+a_2x^2\right)^2=0$$

oder

$$(154)\ x^4(a_2^2-1)+x^3(2a_1a_2+\Sigma\alpha)+x^2\left(a_1^2+2a_2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}-\Sigma\alpha\beta\right)$$
$$+x\left(2a_1\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}+\Sigma\alpha\beta\gamma\right)=0.$$

Da nun eine der Lösungen dieser Gleichung constant Null ist, also nicht mit einer Aenderung von a_1 und a_2 variirt, so wird den Gleichungen (103) und (105) gemäss das zu $x=0$ gehörige Integral aus dem *Abel*'schen Theorem herausfallen, und, wenn wir nunmehr a_1 und a_2 so bestimmen, dass die Gleichung (152) durch die beliebigen Werthesysteme $x_1, z_1;\ x_2, z_2$ befriedigt wird, dass also

(155) $z_1 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} = a_1 x_1 + a_2 x_1^2, \quad z_2 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} = a_1 x_2 + a_2 x_2^2$

ist, so wird die Gleichung

$$(156) \qquad x^3(a_2^2 - 1) + x^2(2a_1 a_2 + \Sigma\alpha)$$
$$+ x(a_1^2 + 2a_2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} - \Sigma\alpha\beta) + (2a_1\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} + \Sigma\alpha\beta\gamma) = 0$$

zu den Lösungen x_1 und x_2 die Lösung x_3 liefern von der Art, dass sich nach (103) die Beziehung ergiebt

$$(157) \quad \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1-\alpha)(x_1-\beta)(x_1-\gamma)(x_1-\delta)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{(x_2-\alpha)(x_2-\beta)(x_2-\gamma)(x_2-\delta)}}$$
$$+ \frac{dx_3}{\sqrt{(x_3-\alpha)(x_3-\beta)(x_3-\gamma)(x_3-\delta)}}$$
$$= - da_1 \sum_{1,2,3}^{\varrho} \frac{\frac{\partial F}{\partial a_1}}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_\varrho}}$$
$$- da_2 \sum_{1,2,3}^{\varrho} \frac{\frac{\partial F}{\partial a_2}}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_\varrho}}.$$

Da aber nach (153)

$$(158) \qquad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 2\left(\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} + a_1 x + a_2 x^2\right) x$$
$$= 2x\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)},$$
$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = 2\left(\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} + a_1 x + a_2 x^2\right) x^2$$
$$= 2x^2\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)},$$

so gehen die beiden Summen der rechten Seite in

$$\sum_{1,2,3}^{\varrho} \frac{x_\varrho}{\frac{\partial F}{\partial x_\varrho}} \quad \text{und} \quad \sum_{1,2,3}^{\varrho} \frac{x_\varrho^2}{\frac{\partial F}{\partial x_\varrho}}$$

über und verschwinden daher beide nach einem bekannten elementaren Satze über rationale Functionen, da $F(x)$ vom 4ten Grade und die Zähler vom ersten resp. zweiten Grade sind.

Lässt man nun das Integral der Differentialgleichung (151) für $x = 0$ selbst den Werth Null annehmen, so geht die Gleichung (157) in

$$(159)\quad \int\limits_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} + \int\limits_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$$

$$= -\int\limits_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$$

über, d. h. *es lassen sich zwei Integralwerthe für beliebig gegebene Argumente und dazu bestimmte Irrationalitäten zu einem ebensolchen Integralwerth vereinigen,* für welchen das Argument x_3 in der folgenden Weise bestimmt wird; aus den Gleichungen (155) folgt nämlich

$$(160)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{(z_1 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})\,x_2^2 - (z_2 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})\,x_1^2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)} \\[2ex] a_2 = \dfrac{(z_2 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})\,x_1 - (z_1 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})\,x_2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)} \end{cases},$$

und die Gleichung (156) liefert

$$(161)\quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{2a_1\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} + \Sigma\alpha\beta\gamma}{a_2^2 - 1},$$

so dass sich mit Benutzung von (160)

$$(162)\quad x_3 = \frac{\left\{2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}\left((z_1 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})x_2^2 - (z_2 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})x_1^2\right) + \Sigma\alpha\beta\gamma\cdot x_1 x_2 (x_2 - x_1)\right\}(x_1 - x_2)}{\left((z_2 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})x_1 - (z_1 - \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})x_2\right)^2 - x_1^2 x_2^2 (x_2 - x_1)^2}$$

ergiebt und nach (152)

$$(163)\quad z_3 = \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} + a_1 x_3 + a_2 x_3^2.$$

Die elliptischen Integrale gehören also zum Geschlechte $p = 1$.

Es mag hinzugefügt werden, dass, wenn die Differentialgleichung (151) in der sogenannten Normalform*)

---

*) Das allgemeine elliptische Differential ist, wie die Elemente der Integralrechnung lehren, durch Substitutionen beliebigen Grades auf die Normalform reducirbar; es genügt hier, die lineare Transformation

$$z = \frac{\gamma + \beta}{2} + \frac{\gamma - \beta}{2}\,\frac{x - \mu}{1 - \mu x}$$

anzuführen, welche, wie unmittelbar zu verificiren, wenn μ und k durch die Gleichungen

$$(164) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

gegeben ist, worin k eine Constante bedeutet und der *Modul* des elliptischen Integrales genannt wird, wie aus (159) und (162) leicht zu entnehmen,

$$(165) \quad \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$= -\int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

wird für

$$(166) \quad x_3 = \frac{x_1\sqrt{(1-x_2{}^2)(1-k^2x_2{}^2)} + x_2\sqrt{(1-x_1{}^2)(1-k^2x_1{}^2)}}{1-k^2x_1{}^2x_2{}^2}.$$

10. Es bleibt uns nun noch, den Untersuchungen des Abschnittes I. 4. dieses Kapitels analog, zu zeigen, wie die Kenntniss dieser Eigenschaften der elliptischen Differentialgleichungen wieder die Mittel zur Aufstellung von Untersuchungsmethoden an die Hand giebt, um für den Fall, dass *Abel*'sche Differentialgleichungen auf elliptische reducirbar sind, die Natur der letzteren zu erforschen, genau wie es oben für den Fall der Reduction auf algebraisch-logarithmische Functionen gelungen war.

Bestehe also zwischen dem Integrale y_1 der Differentialgleichung

---

$$\frac{1+\mu}{1-\mu} = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\,\frac{1-k}{1+k}$$

und

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \frac{(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)}$$

bestimmt sind, das Differential

$$\frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}}$$

in

$$\frac{1}{M}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

überführt, worin

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\gamma-\beta)(\delta-\alpha)}{k}}$$

ist.

$$(167) \qquad \frac{dy}{dx} = Y_1,$$

in welcher Y_1 eine Lösung der irreductibeln algebraischen Gleichung

$$(168) \quad Y^m + f_1(x) Y^{m-1} + f_2(x) Y^{m-2} + \cdots + f_m(x) = 0$$

ist, algebraisch-logarithmischen Functionen und anderen *Abel*'schen Integralen eine algebraische Beziehung, so wird diese, wie oben gezeigt worden, stets von der Form (131) sein, und wenn wir annehmen, dass in dieser Relation auch elliptische Integrale enthalten sind, für welche das Geschlecht der Einheit gleich war, so wird die rechte Seite der Gleichung (131) einen Posten von der Form

$$(169) \qquad \frac{B}{\delta} J(\tau, f(\tau)) = \frac{B}{\delta}\int^{\tau} r(t, f(t))\, dt$$

enthalten, worin r eine rationale Function von t und $f(t)$ bedeutet,

$$(170) \qquad f(t) = \sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\delta)},$$

und nach dem dort ausgesprochenen Theorem, da $p = 1$ ist, τ eine rationale Function von x und Y_1 von der Form

$$(171) \qquad \tau = R(x, Y_1)$$

und

$$(172) \qquad f(\tau) = \varrho(x, Y_1)$$

ist, worin ϱ ebenfalls eine rationale Function ausdrückt.

Da aber aus (171) folgt, dass nach (168)

$$(173) \qquad d\tau = R_1(x, Y_1)\, dx,$$

worin R_1 rational aus x und Y_1 zusammengesetzt ist, und somit nach (172)

$$(174) \qquad \frac{d\tau}{f(\tau)} = R_2(x, Y_1)\, dx$$

wird, worin R_2 wiederum rational ist, so finden wir,

dass, wenn in der oben angenommenen algebraischen Beziehung zwischen dem Integrale y_1 der Differentialgleichung (167) *und Abel'schen Integralen ein elliptisches Integral, das zur*

Irrationalität $f(t)$ in (170) gehört, vorkommt, dann auch stets ein zu einer zugeordneten Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = R_2(x, Y_1), \tag{175}$$

in welcher R_2 eine rationale Function bedeutet, gehöriges Integral zugleich das Integral der elliptischen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}} \tag{176}$$

sein wird, worin τ und $\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}$ rational durch x und Y_1 ausgedrückt sind.

Sei nun Y_1, wie früher, die Lösung einer Gleichung der Form

$$Y^{k\mu} + f_1(x) Y^{(k-1)\mu} + f_2(x) Y^{(k-2)\mu} + \cdots + f_k(x) = 0, \tag{177}$$

und sei

$$\int^x Y_1\, dx = \int^\tau \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\delta)}}, \tag{178}$$

worin τ und $\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}$ rationale Functionen von x und Y_1 sind, so wird aus den zur Gleichung (43) angegebenen Gründen, wenn wieder

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}} \tag{179}$$

gesetzt wird,

$$\int^x \varepsilon Y_1\, dx = \int^{\tau_1} \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\delta)}} \tag{180}$$

sein, worin τ_1 und die zugehörige Irrationalität so aus x und εY_1 zusammengesetzt sind, wie es τ und die entsprechende Irrationalität aus x und Y waren, und aus (178) und (180) ergiebt sich somit

$$\int^{\tau_1} \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\delta)}} = \varepsilon \int^{\tau} \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\delta)}}, \tag{181}$$

worin offenbar τ algebraisch von τ_1 abhängt. Besteht aber wiederum eine solche Beziehung, so muss vermöge des durch die Gleichung (131) ausgesprochenen Satzes auch

$$(182) \quad \int^{\tau_1} \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\delta)}} = \frac{\varepsilon}{\delta} \int^{\tau_2} \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\delta)}}$$

sein, worin τ_2 und die zugehörige Irrationalität durch τ_1 und dessen Irrationalität *rational* ausdrückbar ist.

Nennen wir nun die früher definirten Periodicitätsmoduln des obigen elliptischen Integrales ω_1 und ω_2, so wird, da eine Veränderung der Integrationswege in (182) auf beiden Seiten nur Multipla der Periodicitätsmoduln hinzufügen kann,

$$(183) \quad \begin{cases} \delta\,\omega_1 = \varepsilon a_1 \omega_1 + \varepsilon a_2 \omega_2 \\ \delta\,\omega_2 = \varepsilon b_1 \omega_1 + \varepsilon b_2 \omega_2 \end{cases}$$

sein müssen, und somit ε eine Lösung der Gleichung

$$(184) \quad \begin{vmatrix} a_1 \varepsilon - \delta & a_2 \varepsilon \\ b_1 \varepsilon & b_2 \varepsilon - \delta \end{vmatrix} = 0$$

sein, also *die Lösung einer ganzzahligen quadratischen Gleichung sein müssen.* Nun zeigt aber eine elementare algebraische Betrachtung, dass, weil

$$(185) \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}} = \cos\frac{2\pi}{\mu} + i \sin\frac{2\pi}{\mu},$$

also hier $\cos\frac{2\pi}{\mu}$ eine rationale Zahl sein müsste, dies nur für $\mu = 2, 3, 4, 6$ der Fall sein, oder dass ε nur die Werthe haben kann

$$(186) \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{2}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{4}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{6}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = Y_1,$$

in welcher Y_1 die Lösung einer irreductibeln algebraischen Gleichung

$$Y^{\lambda\mu} + f_1(x)\, Y^{(\lambda-1)\mu} + f_2(x)\, Y^{(\lambda-2)\mu} + \cdots + f_\lambda(x) = 0$$

ist, kann nur dann mit einer Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}},$$

worin τ eine algebraische Function von x ist, ein Integral gemein haben, wenn $\mu = 2, 3, 4, 6$ ist,

und die Gleichung (181) zeigt dann, *dass in den Fällen $\mu = 3, 4, 6$ die elliptische Differentialgleichung die Formen haben muss*

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau^3 - 1}}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau^4 - 1}}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau^6 - 1}}.$$

Wir führen diese Untersuchungen, die ebenfalls später in der Theorie der linearen Differentialgleichungen ihre Anwendung finden werden, nicht weiter aus, indem es uns auch hier nur darauf ankam, an einer bestimmten Frage die Methoden zu entwickeln, welche die früher aufgestellten allgemeinen Sätze an die Hand geben; die weitere Ausführung bietet interessante Anwendungen der Kreistheilung auf die Theorie der Differentialgleichungen.

II. Ueber Differentialgleichungssysteme erster Klasse von der Form $\frac{dy}{dx} = f(y)$.

1. Um zunächst einige einfache transcendente Functionen, welche Differentialgleichungen von der Form

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(y)$$

angehören, hervorzuheben, werde die Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = y$$

vorgelegt. Da die rechte Seite derselben für kein endliches x, wenn ein endlicher Werth von y zugeordnet wird, unendlich oder mehrdeutig wird, da ferner, wenn

$$y = \frac{1}{z}$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung (2) in

$$\frac{dz}{dx} = -z \tag{3}$$

übergeht, also für ein endliches x und $z = 0$ d. h. $y = \infty$ die rechte Seite von (3) endlich und eindeutig bleibt, und somit nach den Auseinandersetzungen von III. des ersten Kapitels diese Gleichung nur das identische Integral $z = 0$ besitzt, so folgt, dass die durch die Differentialgleichung (2) definirte Function für alle endlichen x-Werthe endlich und eindeutig ist, und wenn wir dasjenige particuläre Integral herausgreifen, welches für $x = 0$ den Werth 1 annehmen soll, so wird sich wieder unmittelbar durch successives Differentiiren *um $x = 0$ herum in der ganzen unendlichen Ebene gültig* die Darstellung jenes Integrales, welches die *Exponentialfunction* genannt und mit e^x bezeichnet wird, in der Form ergeben

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \tag{4}$$

und es folgt aus der Differentialgleichung dann unmittelbar, dass das allgemeine Integral durch

$$y = ce^x \tag{5}$$

gegeben ist.

Es ist ferner aus der Differentialgleichung (2) unmittelbar ersichtlich, dass die Exponentialfunction die Umkehrungsfunction der logarithmischen Function darstellt, und dass sie also der Functionalgleichung genügt

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}; \tag{6}$$

da endlich die logarithmische Function für denselben Logarithmanden unendlich viele um ganze Vielfache von $2\pi i$ verschiedene Werthe besass, so wird also die Exponentialfunction die durch die Gleichung

$$e^{x + 2m\pi i} = e^x$$

ausgedrückte Eigenschaft besitzen, und somit *eine periodische* Function mit der Periode $2\pi i$ sein.

2. Legen wir noch einen besonders wichtigen Fall der Differentialgleichung (1) zu Grunde

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}, \tag{7}$$

so ist zunächst ersichtlich, dass, wenn dem $x = x_0$ $y = \eta$ zugeordnet wird, worin η von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verschieden, wegen der Eindeutigkeit und Endlichkeit der rechten Seite von (7) als Function von x und y um x_0 und η herum aufgefasst, auch y eine eindeutige Function von x von der Form

$$(8) \qquad y = \eta + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

sein wird. Ist dagegen dem $x = x_0$ der Werth $y = \infty$ zugeordnet, so liefert wiederum die Substitution $y = \frac{1}{z}$ die Differentialgleichung

$$(9) \quad \frac{dz}{dx} = -\sqrt{(1 - \alpha z)(1 - \beta z)(1 - \gamma z)(1 - \delta z)},$$

und da hier entsprechende Werthe $x = x_0$, $z = 0$ sind, für welche die rechte Seite wieder endlich und eindeutig ist, so wird

$$(10) \qquad z = \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)^2 + \cdots,$$

also

$$(11) \quad y = \alpha_1^{-1}(x - x_0)^{-1} + b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots,$$

und somit y um x_0 herum wieder eindeutig. Sollen sich endlich $x = x_0$ und einer der Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ also z. B. $y = \alpha$ entsprechen, so substituire man in (7)

$$(12) \qquad y - \alpha = z^2,$$

und man erhält die Differentialgleichung

$$(13) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{(z^2 + \alpha - \beta)(z^2 + \alpha - \gamma)(z^2 + \alpha - \delta)},$$

welche für $x = x_0$, $z = 0$ wieder wegen der Eindeutigkeit und Endlichkeit der rechten Seite

$$(14) \qquad z = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots,$$

also nach (12)

$$(15) \quad y = \alpha + A_2(x - x_0)^2 + A_3(x - x_0)^3 + \cdots,$$

somit eine eindeutige Function liefert. Wir finden daher,

dass die durch die Differentialgleichung (7) *definirten Integrale in der ganzen Ebene eindeutige Functionen sind.*

Man nennt diese Functionen *elliptische Functionen*, auf deren Eigenschaften hier nicht eingegangen werden kann, und von denen nur bemerkt werden soll, dass dieselben, weil sie, wie aus der Differentialgleichung ersichtlich, wieder die Umkehrungsfunctionen der im vorigen Abschnitte behandelten elliptischen Integrale sind, da die letzteren zwei Periodicitätsmoduln besassen,

selbst doppelt-periodische Functionen sein werden.

Nach der zur Gleichung (164) des vorigen Abschnittes gemachten Anmerkung lässt sich die Differentialgleichung (7) durch die lineare Substitution

$$y = \frac{\gamma + \beta}{2} + \frac{\gamma - \beta}{2} \frac{t - \mu}{1 - \mu t}$$

in die Differentialgleichung

$$\frac{dt}{dx} = M \sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}$$

überführen; bezeichnet man nun das, wie eben nachgewiesen, in der ganzen Ebene eindeutige, doppelt-periodische Integral der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)},$$

welches mit der unabhängigen Variabeln zugleich verschwindet, mit

$$u = sin\, am(x, k),$$

so wird

$$t = \sin am(Mx, k),$$

und somit das Integral der Differentialgleichung (7) durch

$$y = \frac{\gamma + \beta}{2} + \frac{\gamma - \beta}{2} \frac{\sin am(Mx, k) - \mu}{1 - \mu (\sin am(Mx, k)}$$

dargestellt sein.

Es mag genügen, von der Klasse der Differentialgleichungen (1) die beiden wichtigen Fälle (2) und (7) hervorgehoben zu haben, und es soll nun für die allgemeine Differentialgleichung (1), zugleich als Beispiel und zur Vorbereitung für die im nächsten Kapitel zu entwickelnde allgemeine Theorie, wiederum die Frage nach der Natur der

Integrale in der Umgebung der singulären Punkte näher erörtert werden.

3. Entspreche in der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{16}$$

dem Werthe $x = x_0$ ein endlicher Werth η, so wird, wenn y eine um x_0 eindeutige Function von der Form

$$y - \eta = a_n(x - x_0)^n + a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \cdots \tag{17}$$

sein soll, da sich

$$\left(\frac{y - \eta}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = (x - x_0)\,(1 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots) \tag{18}$$

ergiebt, nach dem im ersten Kapitel III. 7. bewiesenen Hülfsatze

$$x - x_0 = \left(\frac{y - \eta}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} + c_1\,(y - \eta)^{\frac{2}{n}} + \cdots \tag{19}$$

folgen, und da durch Differentiation von (17)

$$\frac{dy}{dx} = n a_n (x - x_0)^{n-1} + (n + 1)\,a_{n+1}\,(x - x_0)^n + \cdots \tag{20}$$

oder nach (19)

$$\frac{dy}{dx} = n a_n^{\frac{1}{n}} (y - \eta)^{\frac{n-1}{n}} + d_1 (y - \eta)^{\frac{n}{n}} + \cdots \tag{21}$$

folgt, so ergiebt sich durch Vergleichung von (16) und (21) als nothwendige Bedingung dafür, dass y in dem Punkte x_0, für den η ein n-facher Verzweigungspunkt von $f(y)$ ist, eine eindeutige Function von x wird, die, *dass die Entwicklung der Function $f(y)$ in der Umgebung des Punktes η nach steigenden Potenzen von $(y - \eta)^{\frac{1}{n}}$ mit dem Gliede*

$$(y - \eta)^{\frac{n-1}{n}} \tag{22}$$

beginnt, dass also, wenn $f(y)$ in η eindeutig, also $n = 1$ ist, die Entwicklung von $f(y)$ mit einer Constanten anfängt, d. h. $f(\eta)$ von Null verschieden ist.

Aber es lässt sich auch umgekehrt zeigen, *dass, wenn in der Differentialgleichung* (16) *die Entwicklung von* $f(y)$ *um den Punkt* η *herum n-deutig ist und ein Anfangsglied von der Form* (22) *besitzt, die Differentialgleichung um den entsprechenden Punkt* x_0 *herum ein den Werth* η *annehmendes eindeutiges Integral besitzt.* Denn wenn

$$(23)\qquad \frac{dy}{dx} = c_1(y-\eta)^{\frac{n-1}{n}} + c_2(y-\eta)^{\frac{n}{n}} + \cdots$$

ist, so folgt, wenn

$$(24)\qquad (y-\eta)^{\frac{1}{n}} = z \quad \text{oder} \quad y = z^n + \eta$$

gesetzt wird,

$$(25)\qquad \frac{dz}{dx} = \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n} z + \cdots,$$

worin c_1 von Null verschieden ist, und da diese Differentialgleichung wegen der Natur der rechten Seite vermöge der wiederholt angeführten Sätze ein um x_0 herum eindeutiges, nicht identisch verschwindendes Integral besitzt, so wird auch, wie behauptet worden, nach (24) sich y als ein um x_0 herum eindeutiges Integral der Differentialgleichung (16) ergeben.

Entspricht ferner dem Werthe $x = \infty$ *ein endlicher Werth* η, so führt die Substitution

$$(26)\qquad x = \frac{1}{x_1}$$

die Differentialgleichung (16) in

$$(27)\qquad \frac{dy}{dx_1} = -x_1^{-2} f(y)$$

über, und es geht für den Fall, dass um $x_1 = 0$, $y = \eta$ herum das Integral die Form haben soll

$$(28)\qquad y - \eta = a_n x_1^n + a_{n+1} x_1^{n+1} + \cdots,$$

also

$$(29)\qquad x_1 = \left(\frac{y-\eta}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} + b_2(y-\eta)^{\frac{2}{n}} +$$

ist, die Differentialgleichung (27) in

$$(30)\qquad \frac{dy}{dx_1} = -\left(\left(\frac{y-\eta}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} + b_2(y-\eta)^{\frac{2}{n}} + \cdots\right)^{-2} f(y)$$

über; da nun nach dem eben bewiesenen Satze die Entwicklung der rechten Seite ein Anfangsglied von der Form (22) haben muss, so wird, wenn $x = \infty$, $y = \eta$ sich entsprechen sollen, die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass y um $x = \infty$ herum eindeutig ist, die sein, *dass das Anfangsglied der Entwicklung von $f(y)$ um $y = \eta$ herum lautet*

$$(31)\qquad (y-\eta)^{\frac{n+1}{n}}.$$

Gehen wir endlich zur Betrachtung des Falles über, *dass einem endlichen oder unendlichen Werthe von x ein unendlich grosser Werth von y entspricht,* so zeigt die Substitution

$$(32)\qquad y = \frac{1}{t},$$

welche die Differentialgleichung (16) in

$$(33)\qquad \frac{dt}{dx} = -t^2 f\left(\frac{1}{t}\right)$$

überführt, und dem betreffenden Werthe von x den Werth $t = 0$ zuordnet, auf Grund der eben gewonnenen Resultate unmittelbar, *dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das zugehörige Integral der Differentialgleichung eindeutig sei, die ist, dass das Anfangsglied der Entwicklung von $f(y)$ um $y = \infty$ herum*

$$y^{\frac{n+1}{n}} \quad \text{oder} \quad y^{\frac{n-1}{n}}$$

sein muss, je nachdem der unendlich grosse Werth von y einem endlichen oder unendlich grossen Werthe von x entsprechen soll.

Fassen wir somit die eben erhaltenen Resultate zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

Soll untersucht werden, ob die durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

definirte Function y von x für alle Werthe dieser Variabeln (oder für welche Werthe derselben sie) eine eindeutige Function

ist, so wird die nothwendige und hinreichende Bedingung zu erfüllen sein, dass $f(y)$ *für einen beliebigen endlichen Werth* η, *der ein* n*-facher Verzweigungspunkt sein mag, nach steigenden Potenzen von* $y-\eta$ *entwickelt, wenn der Exponent des Anfangsgliedes kleiner als die positive Einheit ist, mit einem Anfangsgliede von der Form* $(y-\eta)^{\frac{n-1}{n}}$ *beginne, und wenn derselbe grösser als die Einheit ist, mit einem Gliede von der Form* $(y-\eta)^{\frac{n+1}{n}}$, *ferner muss* $f(y)$ *nach fallenden Potenzen von* y *entwickelt, wenn der Exponent des Anfangsgliedes grösser als die positive Einheit ist, mit* $y^{\frac{n+1}{n}}$, *und wenn kleiner, mit* $y^{\overline{\frac{n-1}{n}}}$ *anfangen; in beiden Fällen darf aber der Exponent nicht die positive Einheit sein. Soll nur Eindeutigkeit für alle im Endlichen gelegenen Werthe der* x*-Variabeln statthaben, so muss für jedes endliche* η *die Entwicklung von* $f(y)$ *nach steigenden Potenzen von* $y-\eta$ *mit* $(y-\eta)^{\frac{n-1}{n}}$, *und die Entwicklung nach fallenden Potenzen von* y *mit* $y^{\frac{n+1}{n}}$ *beginnen.*

Im Uebrigen bestimmt sich die Form der um einen x-Werth vieldeutigen Integrale offenbar sogleich aus den oben gegebenen Entwicklungen und deren Umkehrungen, und es ist somit die Untersuchung der Integrale der obigen Differentialgleichung in der Umgebung der singulären Punkte damit erledigt.

4. Um eine Anwendung des eben bewiesenen Satzes von den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu geben, dass ein Integral der Differentialgleichung (16) eine in der ganzen Ebene eindeutige Function ist, soll derselbe zur Beantwortung der Frage benutzt werden, von welchem Grade die ganze Function $R(y)$ sein muss, damit die Differentialgleichung

$$(34) \qquad \frac{dy}{dx} = f\left(y, \sqrt{R(y)}\right),$$

worin f eine rationale Function der eingeschlossenen Grössen bedeutet, ein in der ganzen *endlichen* x-Ebene eindeutiges Integral besitzt.

Da man die rechte Seite der Differentialgleichung auf die Form

$$\frac{\psi_0(y)+\psi_1(y)\sqrt{R(y)}}{\varphi_0(y)+\varphi_1(y)\sqrt{R(y)}} \text{ oder } \frac{[\psi_0(y)+\psi_1(y)\sqrt{R(y)}]\,[\varphi_0(y)-\varphi_1(y)\sqrt{R(y)}]}{\varphi_0^{\,2}(y)-\varphi_1^{\,2}(y)R(y)}$$

bringen kann, in welcher $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $\psi_0(y)$, $\psi_1(y)$ rationale Functionen von y bedeuten, also die Differentialgleichung selbst die Gestalt annimmt

$$(35) \qquad \frac{dy}{dx}=F_0(y)+F_1(y)\sqrt{R(y)},$$

worin $F_0(y)$ und $F_1(y)$ rationale Functionen von y sind, so ist zunächst nach dem vorigen Satze sofort zu erkennen, dass die rechte Seite der Differentialgleichung für kein endliches y unendlich werden darf, dass also $F_0(y)$ und $F_1(y)$ nothwendig *ganze* Functionen sein müssen, wenn diese Differentialgleichung ein in der ganzen endlichen Ebene eindeutiges Integral besitzen soll. Ferner wird, wenn η_1 eine Lösung der Gleichung $R(y)=0$ ist, die wir ohne Einschränkung von mehrfachen Lösungen frei annehmen dürfen, η_1 ein einfacher Windungspunkt der rechten Seite sein, also die Entwicklung derselben in der Umgebung von η_1 nach steigenden Potenzen von $(y-\eta_1)^{\frac{1}{2}}$ fortschreiten und nach dem eben bewiesenen Satze für die Forderung der Eindeutigkeit des Integrals mit dem Gliede

$$(y-\eta_1)^{\frac{1}{2}}$$

beginnen müssen. Daraus ergiebt sich zunächst, dass die rechte Seite von (35) für $y=\eta_1$ verschwinden muss, und dass somit sämmtliche Lösungen von $R(y)=0$ auch $F_0(y)$ zu Null machen müssen. Wir können daher die Differentialgleichung (35) in die Form setzen

$$(36) \qquad \frac{dy}{dx}=R(y)\,\omega_0(y)+\omega_1(y)\sqrt{R(y)},$$

worin $\omega_0(y)$ und $\omega_1(y)$ wiederum ganze Functionen von y bedeuten. Sei nun $R(y)$ vom Grade λ in y, so wird λ eine gerade oder ungerade Zahl sein können. Ist $\lambda=2p$, so wird die Entwicklung der rechten Seite von (36) nach fallenden Potenzen

von y nur ganze Potenzen von y enthalten, also, da in diesem Falle $n = 1$ ist, nach dem obigen Satze mit y^2 beginnen müssen; beachtet man aber, dass dies für beide Vorzeichen der Quadratwurzel geschehen muss, dass sich also nicht in *beiden* Fällen die höheren Potenzen von y wegheben können, so folgt, dass $R(y)$ ein ganzes Polynom höchstens vom 4ten Grade sein kann, und zwar dass, wenn $R(y)$ vom 2ten Grade ist, $\omega_1(y)$ vom ersten und $\omega_0(y)$ vom nullten Grade ist, während, wenn $R(y)$ vom 4ten Grade, $\omega_1(y)$ eine Constante und $\omega_0(y)$ identisch Null sein muss. Ist jedoch $R(y)$ von einem unpaaren Grade $\lambda = 2p + 1$, so ist $y = \infty$ ein einfacher Windungspunkt von $\sqrt{R(y)}$, also $n = 2$, und dann muss die Entwicklung der rechten Seite der Differentialgleichung (36) nach fallenden Potenzen von y nach dem vorigen Satze mit dem Gliede

$$y^{\frac{3}{2}}$$

beginnen, was nur möglich ist, wenn entweder $R(y)$ vom ersten Grade, $\omega_1(y)$ ebenfalls vom ersten Grade und $\omega_0(y)$ eine Constante oder $R(y)$ vom dritten Grade, $\omega_1(y)$ eine Constante und $\omega_0(y)$ identisch Null ist. Wir erhalten somit das folgende Resultat:

Unter allen Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

haben stets und nur die in der Form enthaltenen

$$\frac{dy}{dx} = c_0(y - \eta_1)(y - \eta_2) + (c_1 y + c_2)\sqrt{(y - \eta_1)(y - \eta_2)} \tag{37}$$

$$\frac{dy}{dx} = c\sqrt{(y - \eta_1)(y - \eta_2)(y - \eta_3)(y - \eta_4)} \tag{38}$$

$$\frac{dy}{dx} = c_0(y - \eta_1) + (c_1 y + c_2)\sqrt{y - \eta_1} \tag{39}$$

$$\frac{dy}{dx} = c\sqrt{(y - \eta_1)(y - \eta_2)(y - \eta_3)} \tag{40}$$

für alle endlichen Werthe der Variabeln x eindeutige Integrale.

5. Wir wollen nun noch für die Differentialgleichungen von der Form (1) einige Betrachtungen anstellen, welche

analog sind den im letzten Abschnitte durchgeführten über die Beziehungen von Quadraturen unter einander, und welche darauf beruhten, dass sich jedes Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

durch ein particuläres y_1 derselben in der Form ausdrücken liess

$$y = y_1 + c.$$

Gehen wir nun von der Differentialgleichung (1) aus, so wird sich, wenn ein particuläres Integral derselben mit y_1 bezeichnet wird, aus derselben

$$\frac{dy}{f(y)} = \frac{dy_1}{f(y_1)} \tag{41}$$

ergeben, und es würde somit, wenn in (1) das allgemeine Integral eine algebraische Function eines particulären sein soll, die Differentialgleichung (41) in y und y_1 ein allgemeines algebraisches Integral von der Form

$$y = F(y_1, c) \tag{42}$$

haben müssen. Für den Fall der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{43}$$

war in der That

$$y = cy_1; \tag{44}$$

nehmen wir ferner als speciellen Fall der Differentialgleichung (1) die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

welche für (41) die Beziehung liefert

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-k^2y_1^2)}}, \tag{45}$$

so folgt aus den Gleichungen (165) und (166) des vorigen Abschnittes, dass

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} - \frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-k^2y_1^2)}} = \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}} \tag{46}$$

wird, wenn

$$\eta = \frac{y_1\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} - y\sqrt{(1-y_1^2)(1-k^2y_1^2)}}{1-k^2y^2y_1^2} \tag{47}$$

ist, und da nach Gleichung (45) $d\eta = 0$, also η einer Constanten c gleich sein muss, so ergiebt sich zwischen y und y_1 die Beziehung

$$(48)\qquad \frac{y_1\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} - y\sqrt{(1-y_1^2)(1-k^2y_1^2)}}{1-k^2y^2y_1^2} = c,$$

und die Gleichung (45) hat somit die algebraische Gleichung (48) zwischen y, y_1 und c zum allgemeinen algebraischen Integrale; für $k = 0$ ergiebt sich für die Differentialgleichung

$$(49)\qquad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dy_1}{\sqrt{1-y_1^2}}$$

das allgemeine Integral in der Form

$$(50)\qquad y_1\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-y_1^2} = c.$$

6. Wenn wir nun mit Hülfe des Satzes von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen von Differentialgleichungen wieder Untersuchungen über die algebraischen Relationen anstellen wollen, welche zwischen Integralen von Differentialgleichungen der Form (1) unter einander oder auch zwischen solchen und Quadraturen algebraischer Functionen bestehen, so werden wir in Analogie zu den für Quadraturen angewandten Methoden nur Differentialgleichungen der Form

$$(51)\ \frac{dy}{dx} = y,\ \frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2},\ \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$$

und die durch Quadraturen integrirbaren Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

zu Grunde legen können.

Mag zunächst nach der allgemeinsten Gestalt einer algebraischen Beziehung zwischen Integralen von Differentialgleichungen der Form

$$(52)\qquad \frac{dy}{dx} = y\frac{du}{dx},\ \frac{dy}{dx} = y\frac{du_1}{dx},\ \ldots \frac{dy}{dx} = y\frac{du_\lambda}{dx}$$

oder zwischen

$$e^u,\ e^{u_1},\ e^{u_2},\ \ldots e^{u_\lambda}$$

gefragt werden, worin $u, u_1, u_2, \ldots u_\lambda$ algebraische Functionen

der unabhängigen Variabeln x sind, so wird sich, wenn diese Relation die Gestalt hat

$$(53)\qquad e^u = F(x, e^{u_1}, e^{u_2}, \dots e^{u_k}),$$

nach dem Satze von der Erhaltung der algebraischen Beziehungen und mit Rücksicht darauf, dass alle Integrale einer der Differentialgleichungen (52) nach (44) aus einem particulären durch Multiplication mit einer Constanten hervorgehen, aus (53) die Relation ergeben

$$(54)\qquad C e^u = F(x, c_1 \,.\, e^{u_1}, e^{u_2}, \dots e^{u_k}),$$

und hieraus durch Zusammensetzung mit (53)

$$(55)\quad F(x, c_1 \,.\, e^{u_1}, e^{u_2}, \dots e^{u_k}) = C\, F(x, e^{u_1}, e^{u_2}, \dots e^{u_k}).$$

Da man nun wieder annehmen darf, dass nicht schon zwischen

$$e^{u_1}, e^{u_2}, \dots e^{u_k}$$

eine algebraische Beziehung stattfindet, weil man im entgegengesetzten Falle nach (53) e^u schon von $k-1$ Exponentialfunctionen algebraisch hätte abhängig machen können, so wird die Gleichung (55) eine in $e^{u_1}, e^{u_2}, \dots e^{u_k}$ und c_1 identische Gleichung sein, in welcher C von c_1 abhängt. Setzt man somit zur Abkürzung

$$(56)\quad e^{u_1} = \vartheta_1 \quad \text{und} \quad F(x, \vartheta_1, e^{u_2}, \dots e^{u_k}) = \varphi(\vartheta_1),$$

so dass (55) in

$$(57)\qquad \varphi(c_1\vartheta_1) = C\varphi(\vartheta_1)$$

übergeht, so wird durch Differentiation dieser Gleichung nach ϑ_1 und c_1

$$\frac{d\varphi(c_1\vartheta_1)}{dc_1\vartheta_1} c_1 = C\frac{d\varphi(\vartheta_1)}{d\vartheta_1} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi(c_1\vartheta_1)}{dc_1\vartheta_1}\vartheta_1 = \frac{dC}{dc_1}\varphi(\vartheta_1),$$

und somit

$$(58)\qquad \frac{\frac{d\varphi(\vartheta_1)}{d\vartheta_1}}{\varphi(\vartheta_1)} d\vartheta_1 = c_1 \frac{\frac{dC}{dc_1}}{C} \frac{d\vartheta_1}{\vartheta_1},$$

woraus sich durch Quadratur

$$(59)\qquad \varphi(\vartheta_1) = K\vartheta_1^{a_1}$$

ergiebt, worin a_1 wegen (57) oder

$$K e_1^{u_1} \vartheta_1^{\alpha_1} = C \cdot K \vartheta_1^{\alpha_1} \quad \text{d. h.} \quad C = e_1^{\alpha_1}$$

eine Constante, und K von x, e^{u_2}, e^{u_3}, $\ldots e^{u_k}$ algebraisch abhängig ist. Man schliesst daraus leicht, wenn man ebenso für die anderen Exponentialfunctionen verfährt,

dass die allgemeinste algebraische Beziehung zwischen den Integralen der Differentialgleichungen (52) *oder den Exponentialfunctionen*

$$e^u, \; e^{u_1}, \; e^{u_2}, \ldots e^{u_k},$$

in welchen $u, u_1, u_2, \ldots u_k$ *algebraische Functionen von* x *bedeuten, die Form hat*

$$e^u = P e^{\alpha_1 u_1} \cdot e^{\alpha_2 u_2} \cdots e^{\alpha_k u_k}, \tag{60}$$

worin P *eine algebraische Function von* x, *und* $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ *rationale Constanten sein müssen.*

7. Nach ähnlichen Principien würden sich die allgemeinsten Beziehungen zwischen Integralen von Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}\, \frac{du}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}\, \frac{du}{dx},$$

in welchen u eine algebraische Function von x bedeutet, angeben lassen, wir wollen hier jedoch nur noch die Frage nach der Existenz algebraischer Beziehungen zwischen Integralen von Differentialgleichungen der Form (51) und Quadraturen algebraischer Functionen zu beantworten suchen.

Bestehe also zwischen den k Integralen $J_1, J_2, \ldots J_k$ der Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = f_1(s_1)\frac{ds_1}{dx}, \; \frac{dy}{dx} = f_2(s_2)\frac{ds_2}{dx}, \cdots \frac{dy}{dx} = f_k(s_k)\frac{ds_k}{dx}, \tag{61}$$

den λ Integralen $i_1, i_2, \ldots i_\lambda$ der Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{du_1}{dx}, \; \frac{dy}{dx} = y\frac{du_2}{dx}, \cdots \frac{dy}{dx} = y\frac{du_\lambda}{dx}, \tag{62}$$

und den μ Integralen $j_1, j_2, \ldots j_\mu$ der Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1 - y^2)(1 - k_1^2 y^2)}\frac{dv_1}{dx}, \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k_2^2 y^2)}\frac{dv_2}{dx}, \tag{63}$$

$$\cdots \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k_\mu^2 y^2)}\frac{dv_\mu}{dx},$$

worin $f_1, f_2, \ldots f_k$ algebraische Functionen ihrer Argumente und

$$s_1, \ldots s_k, u_1, \ldots u_\lambda, v_1, \ldots v_\mu$$

algebraische Functionen von x sind, eine algebraische Beziehung von der Form

$$(64) \qquad F(x, J_1, \ldots J_k, i_1, \ldots i_\lambda, j_1, \ldots j_\mu) = 0,$$

und werde angenommen, dass nicht schon zwischen weniger als diesen $k + \lambda + \mu$ Integralen ein algebraischer Zusammenhang existire. Fassen wir das Integral einer der Differentialgleichungen (61) auf z. B. J_ϱ und bezeichnen eines der Integrale $i_1, \ldots i_\lambda, j_1, \ldots j_\mu$ mit ϑ, so wollen wir der Kürze halber der Gleichung (64) die Form geben

$$(65) \qquad J_\varrho = \varphi(\vartheta),$$

worin φ eine algebraische Function bedeutet, welche neben x noch alle anderen Integrale ausser J_ϱ und ϑ enthält. Wenden wir auf diese Beziehung wieder den Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehung an, so wird, weil das allgemeine Integral der Differentialgleichungen (62) und (63) jedenfalls, wie oben nachgewiesen worden, eine algebraische Function eines particulären und einer willkürlichen Constanten ist, welche in unserem Falle durch

$$f(\vartheta, c)$$

bezeichnet werden mag, und jedes Integral der Differentialgleichungen (61) sich von einem derselben nur um eine additive Constante unterscheidet, aus (65) die Beziehung hervorgehen

$$(66) \qquad J_\varrho + C = \varphi(f(\vartheta, c))$$

oder durch Verbindung mit (65)

$$(67) \qquad \varphi(f(\vartheta, c)) = \varphi(\vartheta) + C,$$

und diese Gleichung muss wieder, da J_ϱ in ihr nicht enthalten ist, nach der Annahme der algebraischen Unabhängigkeit von weniger als allen diesen Transcendenten eine in ϑ und c identische sein, wobei C von c abhängig ist.

Die Differentiation nach ϑ und c liefert aus (67)

$$(68)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(f(\vartheta, c))}{\partial f(\vartheta, c)}\dfrac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial\vartheta} = \dfrac{d\varphi(\vartheta)}{d\vartheta} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi(f(\vartheta, c))}{\partial f(\vartheta, c)}\dfrac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial c} = \dfrac{dC}{dc}, \end{cases}$$

und hieraus

$$(69)\quad \frac{d\varphi(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{dC}{dc}\frac{\dfrac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial\vartheta}}{\dfrac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial c}}.$$

Werde nun diejenige der Differentialgleichungen (62), (63), deren Integral ϑ war, kurz mit

$$(70)\quad \frac{dy}{dx} = \Omega(y)\frac{d\omega}{dx}$$

bezeichnet, worin ω eine algebraische Function von x, und $\Omega(y)$ entweder gleich y oder $\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$ ist, so wird der Annahme gemäss

$$(71)\quad \frac{d\vartheta}{dx} = \Omega(\vartheta)\frac{d\omega}{dx},\quad \frac{df(\vartheta, c)}{dx} = \Omega(f(\vartheta, c))\frac{d\omega}{dx},$$

und hieraus

$$(72)\quad \Omega(f(\vartheta, c)) = \Omega(\vartheta)\frac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial\vartheta},$$

welche Gleichung wieder in ϑ und c identisch sein muss. Differentiirt man dieselbe nach ϑ und c, so ergiebt sich

$$(73)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Omega(f(\vartheta, c))}{\partial f(\vartheta, c)}\dfrac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial\vartheta} = \Omega(\vartheta)\dfrac{\partial^2 f(\vartheta, c)}{\partial\vartheta^2} + \dfrac{d\Omega(\vartheta)}{d\vartheta}\dfrac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial\vartheta} \\[2ex] \dfrac{\partial\Omega(f(\vartheta, c))}{\partial f(\vartheta, c)}\dfrac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial c} = \Omega(\vartheta)\dfrac{\partial^2 f(\vartheta, c)}{\partial\vartheta\,\partial c}, \end{cases}$$

oder, wie eine leichte Rechnung zeigt, durch Elimination von

$$\frac{\partial\Omega(f(\vartheta, c))}{\partial f(\vartheta, c)}$$

die Gleichung

$$(74)\quad \Omega(\vartheta) = M\frac{\dfrac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial c}}{\dfrac{\partial f(\vartheta, c)}{\partial\vartheta}},$$

worin M eine Constante in Bezug auf ϑ bedeutet. Mit Hülfe dieser Beziehung ergiebt sich aber aus (69)

$$\frac{d\varphi(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{K}{\Omega(\vartheta)}, \tag{75}$$

worin K wiederum in Bezug auf ϑ constant ist, und somit vermöge (71)

$$\varphi(\vartheta) = K\omega + L, \tag{76}$$

worin K und L, also $\varphi(\vartheta)$ selbst, also auch (65) und (64) das Integral ϑ gar nicht enthalten. Da dies von jedem der Integrale $i_1, \ldots i_\lambda, j_1, \ldots j_\mu$ nachgewiesen werden kann, so erhalten wir den Satz,

dass zwischen Integralen von Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(s)\frac{ds}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = y\frac{du}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\frac{dv}{dx},$$

worin s, u, v algebraische Functionen von x, $f(s)$ eine algebraische Function von s bedeuten, nie eine algebraische Beziehung stattfinden kann,

oder auch auf Grund der angewandten Beweisform,

dass in eine algebraische Beziehung zwischen Abel'schen Integralen nie das Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung eintreten darf, deren allgemeines Integral eine algebraische Function eines particulären Integrales und einer willkürlichen Constanten ist, also nie Exponential- oder elliptische Functionen.

Auf die Behandlung der in den vorigen Abschnitt gehörigen Fragen über die Natur der Quadraturen, welche auf solche niederer Gattung, also auf logarithmische Functionen, elliptische Integrale etc. algebraisch reducirbar sind, sowie der an die obigen Untersuchungen sich anschliessenden Fragen, für welche Differentialgleichungen der Form (1) sich die Integrale algebraisch durch diejenigen von Differentialgleichungen der Form (51) algebraisch ausdrücken lassen, also durch algebraische Functionen von einfach- und doppeltperiodischen Functionen darstellbar sind, soll hier nicht eingegangen werden.

III. Ueber quadrirbare Differentialgleichungssysteme beliebiger Klasse.

1. *Wir wollen ein Differentialgleichungssystem von der Form*

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x)\,\psi_1(y_1) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \varphi_2(x)\,\psi_2(y_1)\,\chi_2(y_2) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \varphi_n(x)\,\psi_n(y_1)\,\chi_n(y_2)\ldots\omega_n(y_n), \end{cases}$$

in welchem $\varphi_1, \ldots \varphi_n, \psi_1, \ldots \psi_n, \chi_2, \ldots \chi_n, \ldots \omega_n$ *algebraische Functionen ihrer Argumente bedeuten, ein quadrirbares nennen,* und zwar aus folgendem Grunde: wenn

$$(2)\qquad \frac{dt}{dx} = \varphi_1(x)$$

gesetzt wird, so geht die erste Differentialgleichung in

$$(3)\qquad \frac{dy_1}{dt} = \psi_1(y_1)$$

über, also werden zunächst (2) und (3) die Form der in den beiden letzten Abschnitten behandelten Differentialgleichungen haben; sei jetzt hieraus y_1 als Function von t, t als Function von x, also y_1 als Function von x ermittelt, so dass

$$(4)\qquad \varphi_2(x)\,\psi_2(y_1) = F_2(x)$$

sein mag, worin $F_2(x)$ jetzt im Allgemeinen eine transcendente Function von x ist, so wird wieder, wenn man

$$(5)\qquad \frac{du}{dx} = F_2(x)$$

setzt, die zweite Gleichung des Systems (1) in

$$(6)\qquad \frac{dy_2}{du} = \chi_2(y_2)$$

übergehen; wird danach wieder u als Function von x, y_2 als Function von u, also y_2 als Function von x bestimmt, und wieder

$$(7)\qquad \varphi_3(x)\,\psi_3(y_1)\,\chi_3(y_2) = F_3(x)$$

gesetzt, u. s. w., so sieht man, *dass die Integration des Differentialgleichungssystems* (1) *auf algebraische Differentialgleichungen der Form*

$$\frac{dy}{dv} = \chi(y), \tag{8}$$

wie sie im letzten Abschnitte behandelt wurden, und auf Quadraturen von transcendenten Functionen von x zurückführbar ist, welche successive algebraische Functionen von x und y_1, von x, y_1 und y_2, u. s. w. endlich algebraische Functionen von x, $y_1, \ldots y_{n-2}$ und y_{n-1} sind.

Die Quadraturen dieser transcendenten Functionen werden offenbar als Integrale algebraischer Differentialgleichungssysteme definirt sein, wie z. B. der durch den Ausdruck

$$y_2 = \int \frac{dx}{\log x}$$

definirte *Integrallogarithmus* durch das algebraische Differentialgleichungsystem 2ter Klasse

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{y_1},$$

und die Function

$$y_2 = e^{e^x}$$

durch das System

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_1 y_2,$$

u. s. w.

Als specieller Fall eines solchen quadrirbaren Integralsystems mag das in der Form

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_3}{dx} = y_2 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dy_n}{dx} = y_{n-1} \end{array}\right. \tag{9}$$

gegebene betrachtet werden, welches offenbar der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung äquivalent ist

$$(10) \qquad \frac{d^n y_n}{dx^n} = f(x);$$

da aus den Gleichungen (9) successive folgt

$$y_1 = \int f(x)\,dx + c_1, \quad y_2 = \int dx \int f(x)\,dx + c_1 x + c_2, \quad \ldots,$$

allgemein mit der abgekürzten Bezeichnung für die n-fach iterirte Quadratur

$$(11) \quad y_n = \int^{(n)} f(x)\,dx + k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \cdots + k_{n-1} x + k_n.$$

so ergiebt sich, wenn man berücksichtigt, dass

$$\int^{(2)} f(x)\,dx = \int dx \int f(x)\,dx = x \int f(x)\,dx - \int x f(x)\,dx,$$

$$\int^{(3)} f(x)\,dx = \int dx \int^{(2)} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2!}\left\{x^2 \int f(x)\,dx - 2x \int x f(x)\,dx + \int x^2 f(x)\,dx\right\}, \text{ u. s. w.}$$

ist, das allgemeine Integral von (10) in der Form

$$(12) \quad y_n = \frac{1}{(n-1)!}\left\{x^{n-1} \int f(x)\,dx - \frac{n-1}{1!} x^{n-2} \int x f(x)\,dx \right.$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{2!} x^{n-3} \int x^2 f(x)\,dx + \cdots$$
$$\left. + (-1)^{n-1} \int x^{n-1} f(x)\,dx \right\}$$
$$+ k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \cdots + k_{n-1} x + k_n,$$

worin $k_1, k_2, \ldots k_n$ willkürliche Constanten bedeuten, und die zugehörigen Integralelemente des Systems (9) erhält man, indem man in (12) der Reihe nach statt n die Werthe $n-1$, $n-2, \ldots 1$ setzt.

2. Bemerkt man nun, dass in (1) y_1 die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x)\,\psi_1(y_1).$$

dass y_2 ein Integralelement des algebraischen Differentialgleichungsystems 2ter Klasse

$$\frac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x)\,\psi_1(y)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \varphi_2(x)\,\psi_2(y_1)\,\chi_2(y_2)$$

ist, u. s. w., dass also auch die algebraischen Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots,$ deren Quadraturen in Frage kamen, Integralelemente von algebraischen Differentialgleichungsystemen sind, so wird es zur Discussion solcher Quadraturen transcendenter Functionen nothwendig sein, die Frage zu erörtern, ob ähnliche Sätze, wie die oben für *Abel'*sche Integrale bei der Reduction auf algebraische, logarithmische etc. Functionen entwickelten, auch für diese existiren, und erst durch diese Untersuchung wird die Quelle der dort aufgestellten Theoreme deutlich erkennbar werden.

Sei also ein Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse in der Normalform gegeben

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \cdots y_m)}{\partial t_1}\dfrac{dy_1}{dx} = G_1(x, t_1, y_1, \cdots y_m) \\ \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \cdots y_m)}{\partial t_1}\dfrac{dy_2}{dx} = G_2(x, t_1, y_1, \cdots y_m) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \cdots y_m)}{\partial t_1}\dfrac{dy_m}{dx} = G_m(x, t_1, y_1, \cdots y_m), \end{cases}$$

worin t_1 eine Lösung der algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(14)\qquad G(x, t, y_1, \ldots y_m) = 0$$

ist, und sei y_{11} ein Integralelement für y_1,

so werden wir die Quadratur

$$(15)\qquad \int y_{11}\,dx = z_1$$

eine algebraisch ausführbare nennen, wenn

$$(16)\quad z_1 = F(x, y_{11}, y_{12}, \cdots y_{1m}, y_{21}, y_{22}, \cdots y_{2m}, \cdots y_{\lambda 1}, y_{\lambda 2}, \cdots y_{\lambda m})$$

ist, worin F eine algebraische Function der eingeschlossenen Grössen, und

$$(17) \quad \begin{cases} y_{11}, y_{12}, \dots y_{1m} \\ y_{21}, y_{22}, \dots y_{2m} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{\lambda 1}, y_{\lambda 2}, \dots y_{\lambda m} \end{cases}$$

λ simultane Integralsysteme der Differentialgleichungen (13) *bedeuten, oder wenn z_1 die Lösung einer mit Adjungirung von x, den Grössen* (17) *und den zugehörigen Werthen $t_1, t_2, \dots t_\lambda$ irreductibeln Gleichung*

$$(18) \quad z^\mu + f_1(x, y_{11}, \dots y_{1m}, t_1, \dots y_{\lambda 1}, \dots y_{\lambda m}, t_\lambda) z^{\mu-1} + \cdots + f_\mu(x, y_{11}, \dots y_{1m}, t_1, \dots y_{\lambda 1}, \dots y_{\lambda m}, t_\lambda) = 0$$

ist.

Es handelt sich nunmehr um die Bestimmung des Grades μ der Gleichung (18), aus der sich zunächst durch Differentiation nach x mit Benutzung der Differentialgleichungen (13), (14) nach den Auseinandersetzungen des zweiten Abschnittes von Kapitel I

$$(19) \quad z_1' = P_0 z_1^{\mu-1} + P_1 z_1^{\mu-2} + \cdots + P_{\mu-1}$$

ergiebt, worin $P_0, P_1, \dots P_{\mu-1}$ rationale Functionen von x, den Grössen (17) und $t_1, t_2, \dots t_\lambda$ sind; daraus folgt nach (15)

$$(20) \quad P_0 z_1^{\mu-1} + P_1 z_1^{\mu-2} + \cdots + (P_{\mu-1} - y_{11}) = 0,$$

und wegen der für die Gleichung (18) angenommenen Irreductibilität

$$(21) \quad P_0 = 0, \; P_1 = 0, \; \cdots P_{\mu-1} - y_{11} = 0.$$

Da aber zur Herstellung der Gleichung (19) aus (18) z_1 eine willkürliche Lösung von (18) sein durfte, d. h. $P_0, P_1, \dots P_{\mu-1}$ für jede andere Lösung dieselben bleiben, so wird sich aus (19) vermöge der Beziehungen (21) für jedes der $\alpha = 1, 2, \dots \mu$

$$(22) \quad z_\alpha' = y_{11} \quad \text{oder} \quad \int y_{11} \, dx = z_\alpha$$

ergeben. Nun können sich aber die Werthe derselben Quadratur nur um eine Constante unterscheiden, und es folgt daher

$$(23) \quad z_\alpha = z_1 + c_\alpha .$$

was für eine irreductible Gleichung (18) nicht angeht*); es ergiebt sich daher, dass diese Gleichung überhaupt nur *eine* Lösung haben darf, also $\mu = 1$ sein muss, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Wenn die Quadratur

$$\int y_{11}\, dx,$$

worin y_{11} ein Integralelement eines algebraischen Differentialgleichungsystems m^{ter} Klasse bedeutet, algebraisch ausführbar ist, so lässt sich der Werth derselben stets als rationale Function von x, simultanen Integralsystemen des Differentialgleichungsystems, und den diesen Systemen zugehörigen Hülfsvariabeln t darstellen, und somit auch als eine in den t-Grössen ganze Function von einem Grade, der um eine Einheit kleiner ist als der Grad der Hülfsgleichung, mit Coefficienten, die rational aus x und den simultanen Integralsystemen zusammengesetzt sind.

Da nun durch Differentiation der Beziehung

$$(24)\qquad \int y_{11}\, dx = \Re(x, y_{11}, \ldots y_{1m}, t_1, \ldots y_{\lambda 1}, \ldots y_{\lambda m}, t_\lambda),$$

worin $\Re$ eine rationale Function bedeutet,

$$(25)\qquad y_{11} = r(x, y_{11}, \ldots y_{1m}, t_1, \ldots y_{\lambda 1}, \ldots y_{\lambda m}, t_\lambda)$$

folgt, worin r wiederum rational ist, so zeigt der Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen

*) Wenn zwei Lösungen u_1 und u_2 einer mit Adjungirung der Elemente $a, b, c, \ldots$ irreductibeln Gleichung

$$u^\mu + f_1(a, b, c, \ldots) u^{\mu-1} + \cdots + f_\mu(a, b, c, \ldots) = 0$$

in der Beziehung

$$u_2 = u_1 + \omega(a, b, c, \ldots)$$

zu einander stehen, in welcher ω sowie $f_1, f_2, \ldots f_\mu$ rationale Functionen bedeuten, so würde sich aus

$$u_1^\mu + f_1(a, b, c, \ldots) u_1^{\mu-1} + \cdots + f_\mu(a, b, c, \ldots) = 0$$

$$(u_1 + \omega)^\mu + f_1(a, b, c, \ldots)(u_1 + \omega)^{\mu-1} + \cdots + f_\mu(a, b, c, \ldots) = 0$$

durch Subtraction

$$\mu\omega u_1^{\mu-1} + F_2(a, b, c, \ldots) u_1^{\mu-2} + \cdots = 0$$

ergeben, was, da $\mu\omega$ nicht verschwinden kann, wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung in u nicht statthaben darf.

von Differentialgleichungssystemen, dass, wenn man das Integralsystem $y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1m}, t_1$ durch ein anderes ersetzt, von dem nicht schon ein Theil ein vollständiges Integralsystem eines Differentialgleichungssystems von niederer Klasse als der m^{ten} bildet oder was dasselbe sagt, für welches nicht zwischen $y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1m}$ eine algebraische Beziehung besteht, die Beziehung (25) erhalten bleibt, wenn man nur für die anderen Integralsysteme von (13) passende substituirt; ist aber (25) erhalten, so besteht auch wieder (24), und es ergiebt sich somit der folgende Satz:

Wenn die Quadratur eines Integralelementes eines Differentialgleichungssystems m^{ter} Klasse algebraisch ausführbar ist, so ist es auch die Quadratur eines jeden anderen entsprechenden Integralelementes eben dieses Differentialgleichungssystems, wenn dieses Element einem Integralsysteme angehört, das nicht schon einem Differentialgleichungssysteme niederer Klasse genügt, oder zwischen dessen Elementen nicht eine algebraische Beziehung besteht; und zwar ist diese Quadratur in genau derselben Form ausführbar, wenn nur statt der anderen Integralsysteme passende substituirt werden. Gehört das System $y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1m}$ selbst schon nicht zum Theil einem Differentialgleichungssystem niederer Klasse an, so wird die Quadratur eines jeden y_{11} entsprechenden Integralelementes in der angegebenen Form algebraisch ausführbar sein.

Betrachten wir den speciellen Fall einer algebraischen Differentialgleichung

$$(26) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0,$$

so wird die algebraisch ausführbare Quadratur, wenn y_1 ein Integral dieser Gleichung bedeutet, durch die Gleichung definirt sein

$$(27) \qquad \int y_1 \, dx = \omega(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(m-1)}),$$

worin ω eine algebraische Function bedeutet, und es werden die oben ausgesprochenen Sätze, wie nicht weiter ausgeführt zu werden braucht, sich unmittelbar auf diesen Fall übertragen lassen, wenn man (26) wieder in ein Differential-

gleichungssystem m^{ter} Klasse umsetzt. Man sieht aber zugleich durch Differentiation der Gleichung (27),

dass, wenn y_1 das Integral einer algebraischen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung ist, welches nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung Genüge leistet, eine algebraisch ausführbare Quadratur nothwendig die $m-1^{\text{te}}$ Ableitung der Basis enthalten muss,

und ebenso unmittelbar ersichtlich ist der Satz,

dass, wenn die Quadratur einer transcendenten Function sich algebraisch durch eben diese und deren Ableitungen ausdrücken lassen soll, diese das Integral einer algebraischen Differentialgleichung sein muss.

Es soll hier nicht weiter auf die Entwicklung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür eingegangen werden, dass das vorgelegte Differentialgleichungsystem für gewisse Integralelemente algebraisch ausführbare Quadraturen besitze, sondern wir wollen jetzt den Betrachtungen über *Abel*'sche Integrale analog zu den logarithmischen Darstellungen fortschreiten.

3. *Die Quadratur*

$$\int y_{11}\, dx = A \log z_1 \tag{28}$$

soll eine logarithmisch ausführbare genannt werden, wenn A eine Constante und z_1 wieder durch die Gleichung (16) *oder* (18) *definirt ist, in welcher die Bedeutung der oben eingeführten Grössen beibehalten wird.*

Aus der Gleichung (19) und der aus (28) durch Differentiation hergeleiteten

$$z_1 y_{11} = A z_1' \tag{29}$$

folgt

$$P_0 z_1^{\mu-1} + P_1 z_1^{\mu-2} + \cdots + \left(P_{\mu-2} - \frac{y_{11}}{A}\right) z_1 + P_{\mu-1} = 0, \tag{30}$$

und hieraus wieder vermöge der für (18) vorausgesetzten Irreductibilität

$$P_0 = 0,\ P_1 = 0,\ \cdots P_{\mu-2} - \frac{y_{11}}{A} = 0,\ P_{\mu-1} = 0, \tag{31}$$

so dass sich für jede andere Lösung z_α der Gleichung (18) ebenfalls

(32) $$z_\alpha y_{11} = A z_\alpha$$

ergiebt, und somit aus (29) und (32)

(33) $$z_\alpha = c_\alpha z_1 ,$$

worin c_α eine Constante bedeutet. Da aber dann wegen der Irreductibilität von (18) c_α eine Einheitswurzel sein muss*), so dass

(34) $$c_\alpha^\delta = 1$$

ist, worin $1 < \delta < \mu$, so nimmt die Gleichung (18) die Form an

(35) $$z^{\nu\delta} + f_\delta(x, y_{11}, \dots y_{1m}, t_1, \dots y_{\lambda 1} \dots y_{\lambda m_\lambda}, t_\lambda) z^{(\nu-1)\delta} + \dots$$
$$+ f_{\nu\delta}(x, y_{11}, \dots y_{1m}, t_1, \dots y_{\lambda 1}, \dots y_{\lambda m_\lambda}, t_\lambda) = 0,$$

oder wenn

(36) $$z^\delta = Z$$

substituirt wird,

(37) $$Z^\nu + f_\delta(x, y_{11}, \dots y_{1m}, t_1, \dots y_{\lambda 1}, \dots y_{\lambda m_\lambda}, t_\lambda) Z^{\nu-1} + \dots$$
$$+ f_{\nu\delta}(x, y_{11}, \dots y_{1m}, t_1, \dots y_{\lambda 1}, \dots y_{\lambda m_\lambda}, t_\lambda) = 0,$$

und wenn

(38) $$z_1^\delta = Z_1$$

gesetzt wird, worin Z_1 jetzt eine Lösung der Gleichung (37) ist, in welcher $\nu < \mu$, und die zugleich, wie unmittelbar zu sehen, irreductibel ist, weil (18) es war, so erhalten wir vermöge (28)

*) Sei für die u-Gleichung der letzten Anmerkung

$$u_2 = u_1 \cdot \omega(a, b, c, \dots),$$

so ergiebt sich

$$u_1^\mu + f_1(a, b, c, \dots) u_1^{\mu-1} + \dots + f_\mu(a, b, c, \dots) = 0$$

$$\omega^\mu u_1^\mu + \omega^{\mu-1} f_1(a, b, c, \dots) u_1^{\mu-1} + \dots + f_\mu(a, b, c, \dots) = 0,$$

und durch Subtraction

$$\omega^{\mu-1} u_1^{\mu-1}(\omega - 1) f_1(a, b, c, \dots) + \omega^{\mu-2} u_1^{\mu-2}(\omega^2 - 1) f_2(a, b, c, \dots) + \dots$$
$$+ (\omega^\mu - 1) f_\mu(a, b, c, \dots) = 0,$$

woraus wegen der Irreductibilität der u-Gleichung folgt, dass, wenn nicht

$$f_\varrho(a, b, c, \dots) = 0$$

ist, nothwendig

$$\omega^\varrho - 1 = 0$$

sein muss, also ω eine ϱ^{te} Einheitswurzel.

$$(39) \qquad \int y_{11}\,dx = \frac{A}{\delta} \log Z_1.$$

Da wir nun auf die Gleichungen (37) und (39) genau dieselben Schlüsse anwenden können, wie auf (18) und (28), und somit der Grad der den Logarithmanden definirenden Gleichung immer verkleinert wird, bis er auf die Einheit gebracht ist, so erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn die Quadratur

$$\int y_{11}\,dx,$$

worin y_{11} *ein Integralelement eines Differentialgleichungsystems* m^{ter} *Klasse ist, logarithmisch ausführbar ist, so lässt sich der Werth derselben stets als ein mit einer multiplicatorischen Constanten versehener Logarithmus darstellen, dessen Logarithmand eine rationale Function von* x, *simultanen Integralsystemen des Differentialgleichungsystems, und den diesen Systemen zugehörigen Hülfsvariabeln* t *ist, und somit als eine in den* t*-Grössen ganze Function von einem Grade, der um eine Einheit kleiner ist als der Grad der Hülfsgleichung, mit Coefficienten, die rational aus* x *und den simultanen Integralsystemen zusammengesetzt sind.*

Ebenso wie oben für *algebraisch* ausführbare Quadraturen bleibt wieder auf Grund des Satzes von der Erhaltung der algebraischen Beziehung auch

die Quadratur eines jeden anderen entsprechenden Integralelementes, wenn dieses Element einem Integralsysteme angehört, das nicht schon einem Differentialgleichungsysteme niederer Klasse genügt, oder zwischen dessen Elementen nicht eine algebraische Beziehung besteht, genau in derselben Form logarithmisch ausführbar, wenn nur statt der anderen Integralsysteme passende substituirt werden.

Welches in jedem Falle die passend zu substituirenden Integralsysteme sind, ist genau im VI. Abschnitte des ersten Kapitels angegeben worden.

Die Fortführung dieser Untersuchungen analog den für *Abel*'sche Integrale durchgeführten unterliegt keiner Schwierigkeit.

4. Um die Anwendung dieser Sätze durch einen ganz einfachen Fall zu erläutern, wollen wir die Bedingungen dafür

suchen, dass die Quadratur eines Integrales der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = yf_1(x) + f_2(x), \tag{40}$$

in welcher $f_1(x)$ und $f_2(x)$ algebraische Functionen von x bedeuten, algebraisch, also nach dem oben bewiesenen Satze, da y' linear durch y ausdrückbar ist, *rational durch eben dieses Integral* darstellbar ist.

Sei y_1 dieses nicht algebraische Integral und

$$\int y_1 dx = \varphi(x, y_1), \tag{41}$$

worin φ eine rationale Function in Bezug auf y_1 ist, so muss das allgemeine Integral der Differentialgleichung (40) ebenfalls der Gleichung (41) genügen. Da aber aus

$$\frac{dy}{dx} = yf_1(x) + f_2(x) \quad \text{und} \quad \frac{dy_1}{dx} = y_1 f_1(x) + f_2(x)$$

sich

$$\frac{d(y-y_1)}{dx} = (y-y_1) f_1(x),$$

also

$$y - y_1 = ce^{\int f_1(x)dx} \quad \text{oder} \quad y = y_1 + ce^{\int f_1(x)dx} \tag{42}$$

ergiebt, so geht (41) in

$$\int \left(y_1 + ce^{\int f_1(x)dx}\right) dx = \varphi\left(x, y_1 + ce^{\int f_1(x)dx}\right) \tag{43}$$

oder nach (41) in

$$c\int e^{\int f_1(x)dx} dx = \varphi\left(x, y_1 + ce^{\int f_1(x)dx}\right) - \varphi(x, y_1) \tag{44}$$

über, und diese Gleichung muss für jedes c bestehen. Da nun die Differentiation nach c die Beziehung

$$\frac{\partial \varphi\left(x, y_1 + ce^{\int f_1(x)dx}\right)}{\partial\left(y_1 + ce^{\int f_1(x)dx}\right)} = e^{-\int f_1(x)dx} \int e^{\int f_1(x)dx} dx \tag{45}$$

liefert, so ist ersichtlich, dass der links stehende Differentialquotient von c, also auch vom ganzen zweiten Argumente unabhängig ist, und daher

$$(46)\qquad \varphi(x, y_1) = P_1 y_1 + P_2$$

wird, worin P_1 und P_2 algebraische Functionen von x sind; der Ausdruck für die Quadratur muss somit die Form haben

$$(47)\qquad \int y_1 dx = P_1 y_1 + P_2,$$

also eine lineare Function des Integrales sein. Wir können aber auch leicht die Bedingungen ermitteln, unter denen die lineare Differentialgleichung (40) die durch die Gleichung (47) ausgedrückte Eigenschaft besitzt; denn da aus (47) durch Differentiation vermöge (40)

$$(48)\qquad y_1 = P_1(f_1(x) y_1 + f_2(x)) + P_1' y_1 + P_2'$$

folgt, und y_1 kein algebraisches Integral sein sollte, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$(49)\qquad P_1' + P_1 f_1(x) = 1 \quad \text{und} \quad P_1 f_2(x) + P_2' = 0,$$

d. h. es muss die lineare Differentialgleichung

$$(50)\qquad \frac{dz}{dx} + f_1(x) z = 1$$

ein algebraisches Integral P_1 besitzen, und es muss das *Abel*'sche Integral

$$\int P_1 f_2(x)\, dx$$

sich auf eine algebraische Function $-P_2$ reduciren lassen, und umgekehrt sieht man leicht, dass, wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, aus (49) sich (48) identisch für alle y_1 ergiebt, und dass diese Gleichung, wenn y_1 irgend ein Integral der linearen Differentialgleichung (40) vorstellt, in die Form (47) übergeht. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) y + f_2(x)$$

die Eigenschaft besitzt, dass die Quadratur eines, also auch aller transcendenter Integrale derselben algebraisch durch eben

dieses Integral ausdrückbar ist, sind die, dass die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} + f_1(x)z = 1$$

ein algebraisches Integral P_1 *besitzt, und dass das Abel'sche Integral*

$$\int P_1 f_2(x) dx$$

auf eine algebraische Function $-P_2$ *von* x *reducirbar ist, und in diesem Falle ist die Quadratur selbst eine lineare Function des Integrales von der Form*

$$\int y\,dx = P_1 y + P_2.$$

IV. Ueber integrirbare Differentialgleichungssysteme erster Klasse.

Wir werden ein algebraisches Differentialgleichungssystem ***integrirbar*** *nennen, wenn sich dasselbe durch algebraische Substitutionen auf ein* ***quadrirbares*** *Differentialgleichungssystem, also auf eines von der Form*

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x)\,\psi_1(y_1) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \varphi_2(x)\,\psi_2(y_1)\,\chi_2(y_2) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \varphi_n(x)\,\psi_n(y_1)\,\chi_n(y_2)\ldots\omega_n(y_n) \end{cases}$$

zurückführen lässt, und wir wollen uns zunächst in diesem Abschnitte mit solchen integrirbaren Systemen, die nur aus *einer* Differentialgleichung bestehen, und die wichtige und häufig vorkommende Gattungen umfassen*), beschäftigen.

*) In Betreff der Integration specieller Differentialgleichungen, welche durch Kunstgriffe, die der Form dieser angepasst sind, integrirt werden können, muss auf Beispielsammlungen zur Theorie der Differentialgleichungen verwiesen werden.

1. *Für die lineare homogene Differentialgleichung*

$$\frac{dy}{dx} + yf(x) = 0 \tag{2}$$

ergab sich *als allgemeines Integral*

$$y = ce^{-\int f(x)\,dx}, \tag{3}$$

worin c eine willkürliche Constante bedeutet, und *für die nicht homogene*

$$\frac{dy}{dx} + yf(x) = \varphi(x) \tag{4}$$

liefert die im dritten Kapitel entwickelte Methode der Variation der Constanten der reducirten Differentialgleichung (2) zur Bestimmung von c als Function von x aufgefasst die Gleichung

$$e^{-\int f(x)\,dx}\,\frac{dc}{dx} = \varphi(x),$$

und somit

$$c = \int \varphi(x)e^{\int f(x)\,dx}\,dx + C, \tag{5}$$

worin C eine willkürliche Constante bedeutet, so dass *das allgemeine Integral der Differentialgleichung* (4) *vermöge der Form* (3) *in*

$$y = Ce^{-\int f(x)\,dx} + e^{-\int f(x)\,dx}\int \varphi(x)\,e^{\int f(x)\,dx}\,dx \tag{6}$$

übergeht.

Auf die Differentialgleichung (4) kann man aber auch jede nicht lineare Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} + yf(x) = y^m\varphi(x) \tag{7}$$

überführen, da dieselbe auch geschrieben werden kann:

$$\frac{d\,.\,y^{1-m}}{dx} + (1-m)\,f(x)y^{1-m} = (1-m)\,\varphi(x),$$

und somit als eine lineare Differentialgleichung mit der abhängigen Variabeln y^{1-m} betrachtet werden darf.

2. Nachdem im zweiten Kapitel gezeigt worden, dass sich die Klasse *homogener* Differentialgleichungssysteme durch einfache Substitutionen um eine Einheit erniedrigen lässt,

ist von selbst klar, dass homogene Differentialgleichungsysteme erster Klasse integrirbar sind.

Seien nämlich in der Differentialgleichung

$$(8) \qquad \varphi(x, y) \frac{dy}{dx} + \psi(x, y) = 0$$

$\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ homogene Functionen desselben Grades, so dass

$$(9) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y) = x^m \, \Phi\left(\frac{y}{x}\right) \\ \psi(x, y) = x^m \, \Psi\left(\frac{y}{x}\right), \end{cases}$$

so wird die Substitution

$$(10) \qquad \frac{y}{x} = t$$

nach Division mit x^m die Differentialgleichung (8) in die quadrirbare Gleichung

$$(11) \qquad \frac{dx}{dt} = -\frac{\Phi(t)}{\Psi(t) + t\,\Phi(t)}\,x$$

verwandeln, woraus

$$(12) \qquad \log\frac{x}{c} = -\int \frac{\Phi(t)\,dt}{\Psi(t) + t\,\Phi(t)} = \Omega(t) = \Omega\left(\frac{y}{x}\right)$$

und somit

$$(13) \qquad x = c e^{\Omega\left(\frac{y}{x}\right)}$$

als allgemeines Integral sich ergiebt.

Der häufig vorkommende Fall der Differentialgleichung

$$(14) \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'} = 0$$

lässt sich durch die Substitution

$$(15) \qquad ax + by + c = \xi, \quad a'x + b'y + c' = \eta,$$

also

$$(16) \qquad a\,dx + b\,dy = d\xi, \quad a'dx + b'dy = d\eta$$

in die homogene Form

$$(17) \qquad (b\xi - a\eta)\frac{d\eta}{d\xi} + (a'\eta - b'\xi) = 0$$

umsetzen, so dass nach (12)

$$(18) \qquad \log\frac{\xi}{k} = \int\frac{(b-at)\,dt}{at^2-(b+a')t+b'} = \Omega(t) = \Omega\left(\frac{\eta}{\xi}\right),$$

und somit nach (15) das allgemeine Integral die Form annimmt

$$(19) \qquad ax+by+c = ke^{\Omega\left(\frac{a'x+b'y+c'}{ax+by+c}\right)}.$$

Nur dann ist die Substitution (15) unmöglich, wenn

$$(20) \qquad ab'-a'b = 0$$

ist; in diesem Falle wird aber

$$a'x+b'y = \frac{a'}{a}(ax+by)$$

und die Differentialgleichung (14) lautet

$$(21) \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{ax+by+c}{\frac{a'}{a}(ax+by)+c'} = 0.$$

Wir wollen aber zeigen, dass nicht bloss diese, sondern jede in der Form

$$(22) \qquad \frac{dy}{dx} = f(ax+by)$$

enthaltene Differentialgleichung quadrirbar ist; denn da

$$(23) \qquad b\frac{dy}{dx}+a = bf(ax+by)+a = \frac{d(ax+by)}{dx},$$

so folgt durch die Substitution

$$(24) \qquad ax+by = z$$

die Differentialgleichung

$$(25) \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{bf(z)+a},$$

also

$$(26) \qquad x+k = \int\frac{dz}{bf(z)+a} = \Omega(z),$$

und somit das allgemeine Integral in der Gestalt

$$(27) \qquad x+k = \Omega(ax+by).$$

3. Wegen der Wichtigkeit der Differentialgleichung an sich sowie wegen der zur Integration derselben angewandten

Methode soll hier noch die *Jacobi*'sche Differentialgleichung behandelt werden, welche die Form hat

$$(28)\quad (A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = 0.$$

Setzt man

$$(29)\qquad p = \frac{\alpha' + \beta'x + \gamma'y}{\alpha + \beta x + \gamma y}, \quad q = \frac{\alpha'' + \beta''x + \gamma''y}{\alpha + \beta x + \gamma y},$$

so folgt durch Differentiation, wenn

$$(30)\quad \begin{cases} \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = a & \beta''\gamma - \beta\gamma'' = a' & \beta\gamma' - \beta'\gamma = a'' \\ \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha' = b & \gamma''\alpha - \gamma\alpha'' = b' & \gamma\alpha' - \gamma'\alpha = b'' \\ \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = c & \alpha''\beta - \alpha\beta'' = c' & \alpha\beta' - \alpha'\beta = c'' \end{cases}$$

und

$$(31)\qquad \alpha + \beta x + \gamma y = n$$

gesetzt wird,

$$(32)\quad \begin{cases} n^2 dp = (c'' - a''y)dx - (b'' - a''x)dy = a''(xdy - ydx) \\ \qquad\qquad - b''dy + c''dx \\ n^2 dq = -(c' - a'y)dx + (b' - a'x)dy = -a'(xdy - ydx) \\ \qquad\qquad + b'dy - c'dx, \end{cases}$$

so dass jede Differentialgleichung der Form

$$(33)\qquad Pdp + Qdq = 0$$

in die Form transformirt werden kann:

$$(34)\quad (a''P - a'Q)(xdy - ydx) - (b''P - b'Q)dy + (c''P - c'Q)dx = 0.$$

Setzt man nun mit Einführung einer noch zu bestimmenden constanten Grösse λ

$$(35)\quad \begin{cases} n(a''P - a'Q) + \lambda = A + A'x + A''y \\ n(b''P - b'Q) + \lambda x = B + B'x + B''y \\ n(c''P - c'Q) + \lambda y = C + C'x + C''y, \end{cases}$$

so sieht man sogleich, dass die Gleichung (34), also auch (33) mit der gegebenen Gleichung (28) zusammenfällt; es kommt nun darauf an, aus den drei Gleichungen (35) die Grössen P, Q, λ zu berechnen, um sie in (33) einzusetzen.

Multiplicirt man die Gleichungen (35) der Reihe nach mit α, β, γ und addirt dieselben, ebenso mit α', β', γ' und mit α'', β'', γ'', und bemerkt, dass nach (30), wenn

$$(36)\quad \varepsilon = \alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \beta(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') + \gamma(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')$$

gesetzt wird,

$$(37)\quad \begin{cases} \alpha a' + \beta b' + \gamma c' = 0 & \alpha' a'' + \beta' b'' + \gamma' c'' = 0 \\ \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = 0 & \alpha'' a' + \beta'' b' + \gamma'' c' = 0 \\ \alpha' a' + \beta' b' + \gamma' c' = \varepsilon & \alpha'' a'' + \beta'' b'' + \gamma'' c'' = 0 \end{cases}$$

wird, so ergiebt sich

$$(38)\quad \lambda(\alpha + \beta x + \gamma y)$$
$$= A\alpha + B\beta + C\gamma + (A'\alpha + B'\beta + C'\gamma)x + (A''\alpha + B''\beta + C''\gamma)y,$$

$$(39)\quad -\varepsilon n Q + \lambda(\alpha' + \beta' x + \gamma' y)$$
$$= A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + (A'\alpha' + B'\beta' + C'\gamma')x$$
$$+ (A''\alpha' + B''\beta' + C''\gamma')y,$$

$$(40)\quad \varepsilon n P + \lambda(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' y)$$
$$= A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' + (A'\alpha'' + B'\beta'' + C'\gamma'')x$$
$$+ (A''\alpha'' + B''\beta'' + C''\gamma'')y,$$

es kommt also darauf an, P und Q diesen Gleichungen gemäss zu bestimmen; setzt man, wenn λ', λ'' wieder noch zu bestimmende Constanten bedeuten,

$$(41)\quad -\varepsilon Q = (\lambda' - \lambda)p, \quad \varepsilon P = (\lambda'' - \lambda)q,$$

so gehen die drei Gleichungen (38), (39), 40) in

$$(42)\quad \begin{cases} \lambda(\alpha + \beta x + \gamma y) = A\alpha + B\beta + C\gamma + (A'\alpha + B'\beta + C'\gamma)x \\ \qquad\qquad + (A''\alpha + B''\beta + C''\gamma)y \\ \lambda'(\alpha' + \beta' x + \gamma' y) = A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + (A'\alpha' + B'\beta' + C'\gamma')x \\ \qquad\qquad + (A''\alpha' + B''\beta' + C''\gamma')y \\ \lambda''(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' y) = A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' + (A'\alpha'' + B'\beta'' + C'\gamma'')x \\ \qquad\qquad + (A''\alpha'' + B''\beta'' + C''\gamma'')y \end{cases}$$

über, während die Differentialgleichung (33) die Form annimmt

$$(43)\quad (\lambda'' - \lambda)q\,dp - (\lambda' - \lambda)p\,dq = 0;$$

man hat somit nur λ, λ', λ'' aus den drei Gleichungen (42) auszurechnen, in (43) einzusetzen und diese Gleichung zu integriren.

Setzt man nun die Coefficienten von x und y in den Gleichungen (42) einander gleich, so erhält man die drei Systeme von drei Gleichungen

$$(44)\quad\left\{\begin{array}{l}(A-\lambda)\alpha+B\beta+C\gamma=0\qquad(A-\lambda')\alpha'+B\beta'+C\gamma'=0\\ \qquad\qquad(A-\lambda'')\alpha''+B\beta''+C\gamma''=0\\ A'\alpha+(B'-\lambda)\beta+C'\gamma=0\qquad A'\alpha'+(B'-\lambda')\beta'+C'\gamma'=0\\ \qquad\qquad A'\alpha''+(B'-\lambda'')\beta''+C'\gamma''=0\\ A''\alpha+B''\beta+(C''-\lambda)\gamma=0\qquad A''\alpha'+B''\beta'+(C''-\lambda')\gamma'=0\\ \qquad\qquad A''\alpha''+B''\beta''+(C''-\lambda'')\gamma''=0,\end{array}\right.$$

so dass sich λ, λ', λ'' als die drei Lösungen der kubischen Gleichung

$$(45)\qquad\begin{vmatrix}A-z & B & C\\ A' & B'-z & C'\\ A'' & B'' & C''-z\end{vmatrix}=0$$

ergeben; dann bestimmen sich aus (44) die Verhältnisse

$$\frac{\beta}{\alpha},\ \frac{\gamma}{\alpha},\ \frac{\beta'}{\alpha'},\ \frac{\gamma'}{\alpha'},\ \frac{\beta''}{\alpha''},\ \frac{\gamma''}{\alpha''},$$

so dass α, α', α'' willkürlich genommen werden können. Aus (43) folgt durch Integration

$$(46)\qquad p^{\lambda''-\lambda}\cdot q^{\lambda-\lambda'}=\text{const.}$$

oder nach (29)

$$(47)\ (\alpha+\beta x+\gamma y)^{\lambda'-\lambda''}(\alpha'+\beta' x+\gamma' y)^{\lambda''-\lambda}(\alpha''+\beta'' x+\gamma'' y)^{\lambda-\lambda'}=\text{const.}$$

als Integral der vorgelegten Differentialgleichung, oder auch, wenn die aus (44) folgenden Werthe von α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' eingesetzt und zur Abkürzung

$$(48)\qquad B'C''-B''C'=D,\quad C'A''-C''A'=D',$$
$$A'B''-A''B'=D'',\quad B'+C''=E$$

gesetzt wird, das Integral der Differentialgleichung (28) in der Form

$$
\begin{aligned}
(49)\quad & [D - E\lambda + \lambda^2 + (D' + A'\lambda)x + (D'' + A''\lambda)y]^{\lambda' - \lambda''} \\
& [D - E\lambda' + \lambda'^2 + (D' + A'\lambda')x + (D'' + A''\lambda')y]^{\lambda'' - \lambda} \\
& [D - E\lambda'' + \lambda''^2 + (D' + A'\lambda'')x + (D'' + A''\lambda'')y]^{\lambda - \lambda'} = k,
\end{aligned}
$$

worin k eine willkürliche Constante bedeutet.

4. Zu den verschiedenen Gattungen der homogenen Differentialgleichungsysteme, die wir im zweiten Kapitel behandelt haben, gehört für die Systeme erster Klasse die Differentialgleichung

$$(50)\qquad F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

welche in Bezug auf x und y homogen ist; setzt man

$$(51)\qquad \frac{dy}{dx} = p,\quad \frac{y}{x} = u,$$

so geht (50) in

$$(52)\qquad F(1,\ u,\ p) = 0 \quad \text{oder} \quad u = \varphi(p)$$

über. Da aber

$$dy = p\,dx = x\,du + u\,dx$$

oder nach (52)

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u} = \frac{\varphi'(p)\,dp}{p - \varphi(p)},$$

so folgt

$$(53)\qquad x = c\,e^{\int \frac{\varphi'(p)\,dp}{p - \varphi(p)}} = c\,\Phi(p),$$

ausserdem

$$(54)\qquad y = xu = c\varphi(p)\,\Phi(p),$$

und durch Elimination von p zwischen den Gleichungen (53) und (54) das allgemeine Integral der Differentialgleichung (50) in der Form

$$(55)\qquad \omega(x,\ y,\ c) = 0.$$

5. Wir wollen uns endlich noch mit denjenigen Fällen der *Riccati*'schen Differentialgleichung, deren allgemeine Be-

handlung später durchgeführt wird, beschäftigen, welche integrirbar, also auf quadrirbare Systeme zurückführbar sind. Diese Differentialgleichung lautet

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m, \tag{56}$$

und man sieht zunächst, dass *für* $m = 0$ dieselbe in

$$dy = (b - ay^2)\,dx$$

übergeht, also ihr Integral

$$x = \int \frac{dy}{b - ay^2} + c \tag{57}$$

lautet.

Macht man ferner die Substitution

$$y = z^\alpha, \tag{58}$$

so geht (56) in

$$\alpha z^{\alpha-1} \frac{dz}{dx} + (az^{2\alpha} - bx^m) = 0 \tag{59}$$

über, und diese Gleichung ist nach dem Vorigen integrirbar, wenn sie homogen, d. h. wenn $\alpha = -1$, $m = -2$ ist; *also ist* (56) *auch für* $m = -2$ *integrirbar.*

Um noch weitere Fälle zu finden, mache man die Substitution

$$y = Ax^p + zx^q, \tag{60}$$

so geht, wie leicht zu sehen, die Differentialgleichung (56) in

$$x^q \frac{dz}{dx} + (Apx^{p-1} + qx^{q-1}z) \\ + a(A^2x^{2p} + 2Ax^{p+q}z + z^2x^{2q}) = bx^m \tag{61}$$

über, und setzt man

$$p - 1 = 2p, \quad Ap + aA^2 = 0, \quad q - 1 = p + q, \\ q + 2Aa = 0 \tag{62}$$

oder

$$p = -1, \quad A = \frac{1}{a}, \quad q = -2, \tag{63}$$

so dass die Substitution (60) lautet

$$y = \frac{1}{ax} + \frac{z}{x^2}. \tag{64}$$

so geht die Differentialgleichung (61) in

$$x^{-2}\frac{dz}{dx} + (ax^{-4}z^2 - bx^m) = 0 \tag{65}$$

über und ist also für $m = -4$

$$x^2\frac{dz}{dx} + az^2 - b = 0 \tag{66}$$

in der Form

$$\int\frac{dz}{b - az^2} = -\frac{1}{x} + c \tag{67}$$

integrirbar; *also wird die Riccati'sche Gleichung zunächst für* $m = 0, -2, -4$ *integrirbar.*

Macht man nun auf (65) die Substitution

$$z = \frac{1}{u}, \quad x^{m+3} = v, \tag{68}$$

so wird dieselbe in

$$\frac{du}{dv} + \frac{b}{m+3}u^2 = \frac{a}{m+3}v^{-\frac{m+4}{m+3}} \tag{69}$$

transformirt, welche mit (56) verglichen nach dem eben gefundenen Resultate zeigt, dass diese, also auch wieder die gegebene (56) integrirbar ist, wenn

$$-\frac{m+4}{m+3} = -4; \tag{70}$$

ist dies nicht der Fall, und setzt man

$$-\frac{m+4}{m+3} = m', \quad u = \frac{1}{u'}, \quad v^{m'+3} = v', \tag{71}$$

so geht die Gleichung (69) wieder in eine von der Form der *Riccati*'schen über, und diese, also auch die ursprüngliche, ist wieder integrirbar, wenn

$$-\frac{m'+4}{m'+3} = -4 \tag{72}$$

ist, u. s. w.; berechnen wir aus (70), (72), ... die Zahl m, so finden wir die Werthe

$$-4, \; -\frac{8}{3}, \; -\frac{12}{5}, \; -\frac{16}{7}, \ldots,$$

und erkennen also, *dass die Riccati'sche Differentialgleichung* (56) *integrirbar ist für alle m, die in der Form enthalten sind*

$$(73)\qquad m = -\frac{4r}{2r-1},$$

worin r eine beliebige positive ganze Zahl bedeuten darf.

Substituirt man nun in der ursprünglichen Gleichung (56)

$$(74)\qquad y = \frac{1}{w}, \quad x^{m+1} = \xi,$$

so lautet diese, wenn

$$(75)\qquad \frac{b}{m+1} = a', \quad \frac{a}{m+1} = b', \quad -\frac{m}{m+1} = m'$$

gesetzt wird,

$$(76)\qquad \frac{dw}{d\xi} + a'w^2 = b'\xi^{m'},$$

nimmt also die Form der Gleichung (56) an; da die Gleichung (76) aber nach dem vorher gefundenen Resultat integrirbar ist für alle in der Form

$$m' = -\frac{4r}{2r-1}$$

enthaltenen Werthe von m', so wird (56) nach (75) für alle in der Form

$$(77)\qquad -\frac{m}{m+1} = -\frac{4r}{2r-1} \quad \text{oder} \quad m = -\frac{4(-r)}{2(-r)-1}$$

enthaltenen Werthe von m integrirbar, und die Zusammenstellung der Gleichungen (73) und (77) liefert den folgenden Satz:

Die Riccati'sche Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$$

ist für $m = 0$, $m = -2$ und alle in der Form

$$(78)\qquad m = -\frac{4r}{2r-1}$$

enthaltenen Werthe von m, worin r eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, integrirbar.

6. Wir wollen diesen Abschnitt über die Differentialgleichungssysteme erster Klasse mit einer Bemerkung, welche die singulären Integrale derselben betrifft, schliessen. Wenn

man eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung auf die Normalform

$$(79) \qquad \frac{\partial G(x, t_1, y)}{\partial t_1} \frac{dy}{dx} = G_1(x, t_1, y)$$

bringt, worin t_1 eine Lösung der mit Adjungirung von x und y irreductibeln Gleichung

$$(80) \qquad G(x, t, y) = 0$$

ist, so werden nach den Auseinandersetzungen des ersten Kapitels als *singuläre* Integrale von (79) diejenigen Beziehungen zwischen y und x definirt sein, welche

$$(81) \qquad \frac{\partial G(x, t_1, y_1)}{\partial t_1} = 0$$

genügen und die Differentialgleichung (79) befriedigen.

Ist nun die Differentialgleichung erster Ordnung in der Form

$$(82) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

vorgelegt, die wir in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ mit Adjungirung von x und y als irreductibel voraussetzen dürfen, so lässt sich diese in die Form (79), (80) durch Zusammenstellung der beiden Gleichungen

$$(83) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F(x, y, t_1)}{\partial t_1} \dfrac{dy}{dx} = t_1 \dfrac{\partial F(x, y, t_1)}{\partial t_1} \\ F(x, y, t) = 0 \end{cases}$$

bringen und

man erhält somit die singulären Integrale der Differentialgleichung (82) *jedenfalls unter den Factoren des Eliminationsresultates der Grösse t zwischen den beiden Gleichungen*

$$(84) \qquad F(x, y, t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} = 0,$$

also auf rein algebraischem Wege unmittelbar aus der Form der gegebenen Differentialgleichung.

Die Existenz eines solchen singulären Integrales muss nachträglich verificirt werden.

Es ist aber leicht zu sehen, dass man die singulären Integrale auch aus dem allgemeinen Integrale der Differentialgleichung ableiten kann; denn sei das allgemeine Integral von (82) in der Form gegeben

$$\omega(x, y, c) = 0, \tag{85}$$

so dass die Elimination von c zwischen (85) und

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{86}$$

auf eine Gleichung zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$ führt, welche die irreductible Differentialgleichung (82) identisch in sich schliesst, so wird, wenn man c nicht als Constante sondern als zu bestimmende Function von x betrachtet, das singuläre Integral, welches es auch sei, jedenfalls in der Form der Gleichung (85) gedacht werden können; differentiirt man nun (85), so ergiebt sich

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \omega}{\partial c}\frac{dc}{dx} = 0, \tag{87}$$

und wenn

$$\frac{\partial \omega}{\partial c} = 0 \tag{88}$$

gesetzt wird, so geht (87) in

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{89}$$

über, und die Elimination von c zwischen (89) und (85) wird auf die Differentialgleichung (82) führen, da es für die Elimination von c gleichgültig ist, ob es als constant oder als Function von x betrachtet wird. Wir finden also, dass für die singulären Integrale c eine solche Function von x und y sein muss, dass die Gleichung (88) erfüllt ist;

die singulären Integrale der Differentialgleichung (82) ergeben sich somit als Factoren des Eliminationsresultates der Grösse c zwischen dem allgemeinen Integrale und dem nach c genommenen partiellen Differentialquotienten

$$\omega(x, y, c) = 0, \quad \frac{\partial \omega(x, y, c)}{\partial c} = 0.$$

V. Ueber integrirbare Differentialgleichungssysteme höherer Klassen.

1. Die Aufsuchung von Differentialgleichungsystemen, welche durch einfache Substitutionen auf quadrirbare Systeme führen, liefert zunächst die linearen Differentialgleichungsysteme mit constanten Coefficienten, deren Integrale sämmtlich, wie sich zeigen wird, aus Exponentialgrössen und ganzen Functionen zusammensetzbar sind.

Sei also das lineare homogene Differentialgleichungsystem n^{ter} Klasse

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2n}y_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \cdots + A_{nn}y_n \end{cases}$$

gegeben, worin $A_{\alpha\beta}$ Constanten bedeuten, so sieht man leicht, dass in den Ausdrücken

$$(2)\qquad y_1 = a_1 e^{mx}, \quad y_2 = a_2 e^{mx}, \quad \ldots\ y_n = a_n e^{mx}$$

die Constanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ und m so bestimmt werden können, dass (2) im Allgemeinen ein simultanes Fundamentalsystem von Integralen bilden wird. Denn setzt man die Werthe (2) in (1) ein, so ergiebt sich das Gleichungsystem

$$(3)\qquad \begin{cases} (A_{11} - m)a_1 + A_{12}a_2 + \cdots + A_{1n}a_n = 0 \\ A_{21}a_1 + (A_{22} - m)a_2 + \cdots + A_{2n}a_n = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{n1}a_1 + A_{n2}a_2 + \cdots + (A_{nn} - m)a_n = 0, \end{cases}$$

woraus, da nicht $a_1, a_2, \ldots a_n$ sämmtlich gleich Null sein sollen, jedenfalls

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} - m & A_{12} & \ldots\ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - m & \ldots & A_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots\ldots & A_{nn} - m \end{vmatrix} = 0$$

folgt, d. h. es muss m eine Lösung der Gleichung n^{ten} Grades (4) sein. Seien diese n Lösungen $m_1, m_2, \ldots m_n$ zunächst verschieden, so wird sich aus dem Gleichungsysteme (3) zu jedem dieser Werthe von m im Allgemeinen ein bestimmtes System der Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ ergeben; nennen wir das zu m_λ gehörige System

$$a_{1\lambda},\ a_{2\lambda},\ \ldots a_{n\lambda},$$

so werden somit die Gleichungen (3) befriedigt, also durch die zugehörigen Functionalausdrücke (2) auch die Differentialgleichungen (1) erfüllt sein, so dass sich die n Integralsysteme ergeben

$$(5)\quad \begin{cases} y_{11} = a_{11}e^{m_1x}, & y_{12} = a_{21}e^{m_1x}, & \ldots y_{1n} = a_{n1}e^{m_1x} \\ y_{21} = a_{12}e^{m_2x}, & y_{22} = a_{22}e^{m_2x}, & \ldots y_{2n} = a_{n2}e^{m_2x} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{n1} = a_{1n}e^{m_nx}, & y_{n2} = a_{2n}e^{m_nx}, & \ldots y_{nn} = a_{nn}e^{m_nx}. \end{cases}$$

Nun sind dies aber auch simultane Fundamentalsysteme; denn die Annahme einer linearen homogenen Beziehung mit constanten Coefficienten

$$(6)\qquad c_1y_{11} + c_2y_{21} + \cdots + c_ny_{n1} = 0$$

oder

$$(7)\qquad c_1a_{11}e^{m_1x} + c_2a_{12}e^{m_2x} + \cdots + c_na_{1n}e^{m_nx} = 0$$

führt durch $n-1$-malige successive Differentiation auf die Gleichungen

$$(8)\quad \begin{cases} c_1a_{11}m_1e^{m_1x} + c_2a_{12}m_2e^{m_2x} + \cdots + c_na_{1n}m_ne^{m_nx} = 0 \\ c_1a_{11}m_1^2e^{m_1x} + c_2a_{12}m_2^2e^{m_2x} + \cdots + c_na_{1n}m_n^2e^{m_nx} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_1a_{11}m_1^{n-1}e^{m_1x} + c_2a_{12}m_2^{n-1}e^{m_2x} + \cdots + c_na_{1n}m_n^{n-1}e^{m_nx} = 0, \end{cases}$$

welche mit der Gleichung (7) verbunden als lineare homogene Gleichungen in

$$c_1a_{11}e^{m_1x},\quad c_2a_{12}e^{m_2x},\quad \ldots\ c_na_{1n}e^{m_nx}$$

aufgefasst die Determinante

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_n \\ m_1^2 & m_2^2 & \ldots & m_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_1^{n-1} & m_2^{n-1} & \ldots & m_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

oder wie bekannt,

$$\begin{aligned} (m_1 - m_2)(m_1 - m_3) \ldots (m_1 - m_n) \\ (m_2 - m_3) \ldots (m_2 - m_n) \\ \ldots\ldots \\ (m_{n-1} - m_n) = 0 \end{aligned}$$

liefern würden, was nicht angeht, da die Lösungen der Gleichung (4) als verschieden vorausgesetzt wurden. *Unter eben dieser Annahme werden* also nach den früheren allgemeinen Sätzen über lineare Differentialgleichungssysteme *die allgemeinen Integralsysteme der Differentialgleichungen* (1) *in den Formen gegeben sein:*

$$(10) \qquad \begin{cases} y_1 = c_1 a_{11} e^{m_1 x} + c_2 a_{12} e^{m_2 x} + \cdots + c_n a_{1n} e^{m_n x} \\ y_2 = c_1 a_{21} e^{m_1 x} + c_2 a_{22} e^{m_2 x} + \cdots + c_n a_{2n} e^{m_n x} \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_n = c_1 a_{n1} e^{m_1 x} + c_2 a_{n2} e^{m_2 x} + \cdots + c_n a_{nn} e^{m_n x}. \end{cases}$$

Uebertragen wir zunächst dieses Resultat auf eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten

$$(11) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_n y = 0,$$

so sieht man unmittelbar durch die bekannte Transformation in ein Differentialgleichungssystem, dass *das allgemeine Integral derselben in der Form gegeben ist*

$$(12) \qquad y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x},$$

wenn $m_1, m_2, \ldots m_n$ *Lösungen der algebraischen Gleichung*

$$(13) \qquad m^n + A_1 m^{n-1} + A_2 m^{n-2} + \cdots + A_n = 0$$

sind, vorausgesetzt, dass alle diese Lösungen unter einander verschieden sind.

Lassen wir nunmehr die oben gemachte Annahme fallen, dass alle Lösungen der Gleichung (4) verschieden sind, und

nehmen an, dass z. B. die Lösung m_1 r-fach dieser Gleichung angehöre; es tritt die Frage auf, wie man die n von einander unabhängigen simultanen Fundamentalsysteme von Integralen für die Differentialgleichungen (1) findet. Zunächst ist unmittelbar einzusehen, dass man sich die constanten Coefficienten der Differentialgleichungen (1) um unendlich wenig so verändert denken kann, dass die diesem neuen Systeme von Differentialgleichungen entsprechenden Werthe von m_1 sämmtlich verschieden sind, aber nur um unendlich wenig von einander abweichen; nehmen wir zwei solcher unendlich benachbarter Werthe m_1 und $m_1 + dm_1$, so werden, da die $a_{\alpha\beta}$-Werthe vermöge der Gleichungen (3) rationale Functionen von m sind, die wir mit $f_{\alpha\beta}(m)$ bezeichnen wollen, zwei Integralreihen des neuen Differentialgleichungsystems nach (5) durch

$$(14)\quad \begin{cases} y_{11} = f_{11}(m_1)e^{m_1 x},\ y_{12} = f_{21}(m_1)\,e^{m_1 x},\ \ldots y_{1n} = f_{n1}(m_1)\,e^{m_1 x} \\ y_{21} = (f_{11}(m_1) + f'_{11}(m_1)\,dm_1)\,e^{(m_1+dm_1)x},\ y_{22} = (f_{21}(m_1) + f'_{21}(m_1)\,dm_1)\,e^{(m_1+dm_1)x}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ y_{2n} = (f_{n1}(m_1) + f'_{n1}(m_1)\,dm_1)\,e^{(m_1+dm_1)x} \end{cases}$$

dargestellt sein, und somit durch Subtraction der entsprechenden Elemente und Division mit dm_1 sich die neue Integralreihe für das aus dem zweiten System hervorgehende erste System, wenn $dm_1 = 0$ gesetzt wird, ergeben

$$(15)\quad f_{11}(m_1)xe^{m_1 x} + f'_{11}(m_1)e^{m_1 x},\quad f_{21}(m_1)xe^{m_1 x} + f'_{21}(m_1)e^{m_1 x}, \ldots$$

oder

$$(16)\quad (a_{11}x + a'_{11})e^{m_1 x},\ (a_{21}x + a'_{21})e^{m_1 x},\ \ldots (a_{n1}x + a'_{n1})e^{m_1 x},$$

oder endlich für den Fall *zweier* zusammenfallender Werthe von m_1 die beiden Integralreihen

$$(17)\qquad a_{11}e^{m_1 x},\qquad a_{21}e^{m_1 x},\qquad \ldots\ a_{n1}e^{m_1 x}$$

$$(18)\qquad \frac{d(a_{11}e^{m_1 x})}{dm_1},\qquad \frac{d(a_{21}e^{m_1 x})}{dm_1},\qquad \ldots\ \frac{d(a_{n1}e^{m_1 x})}{dm_1}\ ^{*)};$$

*) Man sieht durch Einsetzen in die Differentialgleichungen die Richtigkeit des Resultates, wenn man beachtet, dass der Annahme gemäss nicht nur die Gleichung (4) für $m = m_1$ verschwindet, sondern auch deren nach m genommene Ableitung und ebenso die Gleichungen (3).

werden *drei* Werthe von m_1 einander gleich, so kommt das Integralsystem

$$\frac{d^2(a_{11}e^{m_1x})}{dm_1^2}, \quad \frac{d^2(a_{21}e^{m_1x})}{dm_1^2}, \quad \ldots \quad \frac{d^2(a_{n1}e^{m_1x})}{dm_1^2}$$

hinzu, wobei stets unter $a_{11}, a_{21}, \ldots a_{n1}$ die aus dem Gleichungsystem (3) sich ergebenden rationalen Functionen von m_1 zu verstehen sind, u. s. w.

Fassen wir somit die gewonnenen Resultate zusammen, so ergiebt sich der folgende Satz:

Um die allgemeinen Integrale eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems (1) *mit constanten Coefficienten zu finden, bilde man die Gleichung n^{ten} Grades* (4) *in m, und bestimme den Gleichungen* (3) *gemäss die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ als rationale Functionen von m; habe nun die Gleichung* (4) *die Lösung m_1 r_1-fach, die Lösung m_2 r_2-fach u. s. w., endlich die Lösung m_ϱ r_ϱ-fach, so wird, wenn wir die der Lösung m_λ entsprechenden rationalen Functionen $a_1, a_2, \ldots a_n$ von m_λ mit $a_{1\lambda}, a_{2\lambda}, \ldots a_{n\lambda}$ bezeichnen, das allgemeine Integralsystem der Differentialgleichungen* (1) *die folgende Darstellung haben:*

$$(19) \quad \begin{cases} y_1 = \sum\limits_0^{r_1-1} c_{1\nu} \dfrac{d^\nu(a_{11}e^{m_1x})}{dm_1^\nu} + \sum\limits_0^{r_2-1} c_{2\nu} \dfrac{d^\nu(a_{12}e^{m_2x})}{dm_2^\nu} + \cdots \\ \qquad\qquad + \sum\limits_0^{r_\varrho-1} c_{\varrho\nu} \dfrac{d^\nu(a_{1\varrho}e^{m_\varrho x})}{dm_\varrho^\nu} \\ y_2 = \sum\limits_0^{r_1-1} c_{1\nu} \dfrac{d^\nu(a_{21}e^{m_1x})}{dm_1^\nu} + \sum\limits_0^{r_2-1} c_{2\nu} \dfrac{d^\nu(a_{22}e^{m_2x})}{dm_2^\nu} + \cdots \\ \qquad\qquad + \sum\limits_0^{r_\varrho-1} c_{\varrho\nu} \dfrac{d^\nu(a_{2\varrho}e^{m_\varrho x})}{dm_\varrho^\nu} \\ \quad \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_n = \sum\limits_0^{r_1-1} c_{1\nu} \dfrac{d^\nu(a_{n1}e^{m_1x})}{dm_1^\nu} + \sum\limits_0^{r_2-1} c_{2\nu} \dfrac{d^\nu(a_{n2}e^{m_2x})}{dm_2^\nu} + \cdots \\ \qquad\qquad + \sum\limits_0^{r_\varrho-1} c_{\varrho\nu} \dfrac{d^\nu(a_{n\varrho}e^{m_\varrho x})}{dm_\varrho^\nu}, \end{cases}$$

worin $c_{1\nu}, c_{2\nu}, \ldots c_{\varrho\nu}$ für $\nu = 0, \ldots r_1 - 1;\ 0, \ldots r_2 - 1;\ \ldots 0, \ldots r_\varrho - 1$ willkürliche Constanten bedeuten.

Uebertragen wir dieses Resultat wieder auf die Integration von *einer* linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten (11), so folgt, wie unmittelbar zu sehen,

dass, wenn die Gleichung (13) *die Lösung* m_1 r_1*-fach,* m_2 r_2*-fach, . . .* m_ϱ r_ϱ*-fach besitzt, das allgemeine Integral derselben sich in der Form darstellt*

$$(20)\qquad \begin{aligned} y = &(c_{10} + c_{11} x + c_{12} x^2 + \cdots + c_{1r_1-1}\, x^{r_1-1}) e^{m_1 x} \\ &+ (c_{20} + c_{21} x + c_{22} x^2 + \cdots + c_{2r_2-1}\, x^{r_2-1}) e^{m_2 x} + \cdots \\ &+ (c_{\varrho 0} + c_{\varrho 1} x + c_{\varrho 2} x^2 + \cdots + c_{\varrho r_\varrho -1}\, x^{r_\varrho-1}) e^{m_\varrho x}. \end{aligned}$$

2. Dass sich hieraus mit Hülfe von Quadraturen die allgemeinen Integralsysteme von linearen Differentialgleichungsystemen der Form

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11} y_1 + A_{12} y_2 + \cdots + A_{1n} y_n + f_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21} y_1 + A_{22} y_2 + \cdots + A_{2n} y_n + f_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1} y_1 + A_{n2} y_2 + \cdots + A_{nn} y_n + f_n(x), \end{cases}$$

worin die $A_{\alpha\beta}$ constante Grössen sind, ermitteln lassen, ist ausführlich im dritten Kapitel erörtert worden; ebenso ist klar, dass man das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(22)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_n y = f(x),$$

in welcher $A_1, A_2, \ldots A_n$ Constanten sind, mit Hülfe von Quadraturen darstellen kann; es soll hier nur noch der häufig vorkommende Fall behandelt werden, in welchem $f(x)$ eine ganze Function von x ist, deren Grad p sein mag. Differentiirt man nämlich die Gleichung (22) $p+1$-mal nach einander, so dass sich

$$(23)\qquad \frac{d^{n+p+1} y}{dx^{n+p+1}} + A_1 \frac{d^{n+p} y}{dx^{n+p}} + \cdots + A_n \frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}} = 0$$

ergiebt, so wird die Hülfsgleichung (13) in

$$(24) \qquad m^{p+1}(m^n + A_1 m^{n-1} + \cdots + A_n) = 0$$

übergehen, welche die Lösung 0 $p+1$-mal, die Lösungen $m_1, m_2, \ldots m_r$ resp. $k_1, k_2, \ldots k_r$-fach haben soll, so dass das allgemeine Integral dem Ausdrucke (20) entsprechend lauten wird

$$(25) \quad y = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) e^{m_1 x} + \varphi_2(x) e^{m_2 x} + \cdots + \varphi_r(x) e^{m_r x},$$

worin $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots \varphi_r(x)$ ganze Functionen resp. vom $p^{\text{ten}}, k_1 - 1^{\text{ten}}, k_2 - 1^{\text{ten}}, \ldots k_r - 1^{\text{ten}}$ Grade sind; jedenfalls wird also das allgemeine Integral von (22) in der Form (25) enthalten sein, und es wird sich nur um die Bestimmung von $\varphi_0(x)$ der rechten Seite der Gleichung (22) gemäss handeln. Bestimmt man nun $p+1$ Constanten $a_0, a_1, \ldots a_p$ aus den Gleichungen

$$(26) \quad \begin{cases} A_n a_0 = 1 \\ A_n a_1 + A_{n-1} a_0 = 0 \\ A_n a_2 + A_{n-1} a_1 + A_{n-2} a_0 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

so wird behauptet, dass, wenn man

$$(27) \quad \varphi(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \cdots + a_p f^{(p)}(x)$$

setzt, diese ganze Function p^{ten} Grades ein particuläres Integral der Differentialgleichung (22) darstellt, und diese Function also in (25) für $\varphi_0(x)$ eingesetzt y zum allgemeinen Integral jener Differentialgleichung macht. Dies ist aber unmittelbar daraus ersichtlich, dass, wenn man die Gleichungen

$$(28) \quad \begin{cases} \varphi(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \cdots + a_p f^{(p)}(x) \\ \varphi'(x) = \qquad a_0 f''(x) + a_1 f'''(x) + \cdots + a_{p-1} f^{(p)}(x) \\ \varphi''(x) = \qquad\qquad a_0 f'''(x) + \cdots + a_{p-2} f^{(p)}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi^{(p)}(x) = \qquad\qquad\qquad a_0 f^{(p)}(x) \end{cases}$$

der Reihe nach mit $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots A_0$ multiplicirt und addirt, sich vermöge der Beziehungen (26)

$$(29) \quad \varphi^{(n)}(x) + A_1 \varphi^{(n-1)}(x) + A_2 \varphi^{(n-2)}(x) + \cdots + A_n \varphi(x) = f(x)$$

ergiebt, also $\varphi(x)$ ein particuläres Integral von (22), und

somit, $\varphi(x)$ für $\varphi_0(x)$ gesetzt, *das allgemeine Integral von* (22) *in der Form*

$$(30)\quad y = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \cdots + a_p f^{(p)}(x) + \varphi_1(x) e^{m_1 x} + \varphi_2(x) e^{m_2 x} + \cdots + \varphi_r(x) e^{m_r x}$$

durch die rechte Seite der Differentialgleichung und deren Ableitungen ausdrückbar.

3. Es mag gleich hier noch ein homogenes lineares Differentialgleichungsystem mit *variabeln* Coefficienten erwähnt werden, welches sich durch eine einfache Substitution auf ein ebensolches mit constanten Coefficienten zurückführen lässt.

Sei nämlich das System

$$(31)\quad \begin{cases} (\alpha x + \beta)\dfrac{dy_1}{dx} = A_{11} y_1 + A_{12} y_2 + \cdots + A_{1n} y_n \\ (\alpha x + \beta)\dfrac{dy_2}{dx} = A_{21} y_1 + A_{22} y_2 + \cdots + A_{2n} y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\alpha x + \beta)\dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1} y_1 + A_{n2} y_2 + \cdots + A_{nn} y_n \end{cases}$$

gegeben, worin α, β, $A_{\lambda\mu}$ Constanten bedeuten, so wird die Substitution

$$(32)\qquad \alpha x + \beta = e^t$$

wegen

$$(33)\qquad \frac{dy}{dx} = \alpha \frac{dy}{dt} e^{-t}$$

das System (31) in das lineare System

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{A_{11}}{\alpha} y_1 + \dfrac{A_{12}}{\alpha} y_2 + \cdots + \dfrac{A_{1n}}{\alpha} y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = \dfrac{A_{n1}}{\alpha} y_1 + \dfrac{A_{n2}}{\alpha} y_2 + \cdots + \dfrac{A_{nn}}{\alpha} y_n \end{cases}$$

mit constanten Coefficienten überführen, und das allgemeine Integralsystem von (31) somit nach (19), da wegen (32)

$$e^{mt} = (\alpha x + \beta)^m$$

ist, in der Form

$$(35)\quad y_\lambda = \sum_0^{r_1-1} c_{1\nu} \frac{d^\nu[a_{\lambda 1}(\alpha x+\beta)^{m_1}]}{dm_1^\nu} + \sum_0^{r_2-1} c_{2\nu} \frac{d^\nu[a_{\lambda 2}(\alpha x+\beta)^{m_2}]}{dm_2^\nu} + \cdots$$
$$\cdots + \sum_0^{r_\varrho-1} c_{\varrho\nu} \frac{d^\nu[a_{\lambda\varrho}(\alpha x+\beta)^{m_\varrho}]}{dm_\varrho^\nu}$$

darstellbar sein*).

Die Uebertragung des Systemes (31) auf eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung führt auf die Differentialgleichung

$$(36)\qquad (\alpha x+\beta)^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1(\alpha x+\beta)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots$$
$$+ A_{n-1}(\alpha x+\beta)\frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

und somit nach (20) auf die Form des allgemeinen Integrales:

$$(37)\quad y = [c_{10} + c_{11}\log(\alpha x+\beta) + c_{12}\log^2(\alpha x+\beta) + \cdots$$
$$+ c_{1r_1-1}\log^{r_1-1}(\alpha x+\beta)]\,(\alpha x+\beta)^{m_1}$$
$$+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+ [c_{\varrho 0} + c_{\varrho 1}\log(\alpha x+\beta) + c_{\varrho 2}\log^2(\alpha x+\beta) + \cdots$$
$$+ c_{\varrho r_\varrho-1}\log^{r_\varrho-1}(\alpha x+\beta)]\,(\alpha x+\beta)^{m_\varrho}.$$

4. Die häufig vorkommende Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(38)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right),$$

welche dem Systeme

$$(39)\quad \frac{dy_1}{dx} = y_2,\; \frac{dy_2}{dx} = y_3,\; \cdots \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n,\; \frac{dy_n}{dx} = f(y_{n-1})$$

entspricht, wird, wie leicht zu sehen, stets auf Quadraturen zurückführbar sein; denn da aus der letzten und vorletzten Gleichung des Systems folgt, dass

$$(40)\qquad y_n\,dy_n = f(y_{n-1})\,dy_{n-1},$$

so erhält man unmittelbar

*) Wird in den Differentialgleichungen (31) $\alpha x+\beta$ durch eine beliebige Function $f(x)$ ersetzt, so leistet offenbar die Substitution

$$\int \frac{dx}{f(x)} = t$$

die verlangte Reduction.

$$\frac{1}{2} y_n^2 = \int f(y_{n-1})\, dy_{n-1} + \frac{1}{2} c_1$$

oder

(41) $$y_n = \frac{dy_{n-1}}{dx} = \sqrt{2\int f(y_{n-1})\, dy_{n-1} + c_1},$$

woraus sich

(42) $$x = \int \frac{dy_{n-1}}{\sqrt{2\int f(y_{n-1})\, dy_{n-1} + c_1}} + c_0$$

ergiebt; da nun aus

$$\frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \quad \text{oder} \quad y_{n-2} = \int \frac{y_{n-1}\, dy_{n-1}}{\sqrt{2\int f(y_{n-1})\, dy_{n-1} + c_1}} + c_2$$

kürzer

(43) $$y_{n-2} = \psi_2(y_{n-1}, c_1, c_2),$$

ebenso

$$y_{n-3} = \psi_3(y_{n-1}, c_1, c_2, c_3)$$

u. s. w. bis

(44) $$y_1 = \psi_{n-1}(y_{n-1}, c_1, c_2, \ldots c_{n-1})$$

folgt, so wird die Elimination von y_{n-1} zwischen den beiden Gleichungen (42) und (44) das allgemeine Integralelement in der Form liefern

(45) $$y_1 = \omega(x, c_0, c_1, c_2, \ldots c_{n-1}),$$

woraus durch successive Differentiation sich $y_2, y_3, \ldots y_n$ ergeben.

5. Es mögen hier noch einige Bemerkungen Platz finden, welche die Natur der algebraischen Integrale beliebiger Differentialgleichungsysteme charakterisiren, und dadurch Methoden liefern, dieselben zu finden. Sei

(46) $$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \end{cases}$$

ein algebraisches Differentialgleichungsystem n^{ter} Klasse, und habe dasselbe ein *allgemeines* algebraisches Integralsystem:

$$(47)\quad y_1 = F_1(x, c_1, c_2, \dots c_n), \quad y_2 = F_2(x, c_1, c_2, \dots c_n), \quad \dots y_n = F_n(x, c_1, c_2, \dots c_n),$$

worin $F_1, F_2, \dots F_n$ algebraische Functionen von x bedeuten, in denen die n Constanten jedoch zunächst *nicht in algebraischer Form* vorzukommen brauchen. Setzen wir die rechten Seiten der Differentialgleichungen (46)

$$(48)\quad f_1(x, y_1, y_2, \dots y_n) = z_1, \quad f_2(x, y_1, y_2, \dots y_n) = z_2, \quad \dots f_n(x, y_1, y_2, \dots y_n) = z_n,$$

so dass, weil $f_1, f_2, \dots f_n$ algebraische Functionen bedeuten,

$$(49)\quad \begin{cases} z_1^{m_1} + F_{11}(x, y_1, \dots y_n)\, z_1^{m_1-1} + \cdots + F_{1m_1}(x, y_1, \dots y_n) = 0 \\ z_2^{m_2} + F_{21}(x, y_1, \dots y_n)\, z_2^{m_2-1} + \cdots + F_{2m_2}(x, y_1, \dots y_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n^{m_n} + F_{n1}(x, y_1, \dots y_n)\, z_n^{m_n-1} + \cdots + F_{nm_n}(x, y_1, \dots y_n) = 0 \end{cases}$$

ist, so wird aus dem Differentialgleichungssysteme (46)

$$(50)\quad y_1 + k_1 = \int z_1\,dx, \quad y_2 + k_2 = \int z_2\,dx, \quad \cdots y_n + k_n = \int z_n\,dx$$

folgen, und da z_α vermöge (47) eine algebraische Function von x, und $y_\alpha + k_\alpha$ eine ebensolche Function dieser Variabeln sein soll, so wird sich

$$\int z_\alpha\,dx$$

nach den Sätzen des I. Abschnittes des vierten Kapitels rational durch x und z_α ausdrücken lassen, so dass

$$(51)\qquad \int z_\alpha\,dx = R(x, z_\alpha) = \frac{g_\alpha(x, z_\alpha)}{h_\alpha(x, z_\alpha)}$$

sein wird, worin g_α und h_α ganze Functionen von x und z_α sind, so dass die Gleichungen (50) in die folgenden übergehen:

$$(52)\quad (y_1 + k_1) h_1(x, z_1) = g_1(x, z_1), \quad (y_2 + k_2) h_2(x, z_2) = g_2(x, z_2), \quad \cdots (y_n + k_n) h_n(x, z_n) = g_n(x, z_n);$$

eliminirt man nun zwischen den $2n$ Gleichungen (49) und (52) $z_1, z_2, \dots z_n, y_2, y_3, \dots y_n$, sodann $z_1, z_2, \dots z_n, y_1, y_3, \dots y_n$, u. s. w. endlich $z_1, z_2, \dots z_n, y_1, y_2, \dots y_{n-1}$, so erhält man n Gleichungen

$$(53)\quad \omega_1(x, y_1, k_1, \dots k_n) = 0, \quad \omega_2(x, y_2, k_1, \dots k_n) = 0, \quad \dots \omega_n(x, y_n, k_1, \dots k_n) = 0,$$

worin $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ ganze Functionen *sämmtlicher* in ihnen enthaltenen Grössen $x, y_\alpha, k_1, \dots k_n$ sind, und es ergiebt sich somit der folgende Satz:

Wenn ein algebraisches Differentialgleichungssystem (46) *ein allgemeines algebraisches Integralsystem besitzt, so lässt sich dieses stets auf die Form*

$$(54)\quad \omega_1(x, y_1, k_1, \dots k_n) = 0, \quad \omega_2(x, y_2, k_1, \dots k_n) = 0, \quad \dots \omega_n(x, y_n, k_1, \dots k_n) = 0$$

bringen, worin ω_α eine ganze Function von x, y_α, $k_1, \dots k_n$ ist.

6. In vielen Fällen kann man die oben für lineare Differentialgleichungssysteme auseinandergesetzte Methode der Variation der Constanten auch auf beliebige Systeme von Differentialgleichungen anwenden, und so von bekannten Integralen gewisser Systeme auf Integrale anderer Systeme von Differentialgleichungen schliessen. Sei

$$(55)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots y_n) + \varepsilon_1 \varphi_1(x, y_1, \dots y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots y_n) + \varepsilon_2 \varphi_2(x, y_1, \dots y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots y_n) + \varepsilon_n \varphi_n(x, y_1, \dots y_n), \end{cases}$$

worin $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ Constanten sind, und es werde verlangt, die allgemeinen Integrale dieses Systems zu ermitteln, wenn diejenigen des Systemes

$$(56)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots y_n) \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots y_n) \end{cases}$$

in der Form bekannt sind

(57) $y_1 = F_1(x, c_1, \ldots c_n),\ y_2 = F_2(x, c_1, \ldots c_n),\ \ldots y_n = F(x, c_1, \ldots c_n),$

worin $c_1, \ldots c_n$ willkürliche Constanten bedeuten. Behalten wir, wie es die oben auseinandergesetzte Methode der Variation der Constanten verlangt, die Form der Integrale (57) auch für das Differentialgleichungsystem (55) bei, indem wir die $c_1, \ldots c_n$ nicht mehr als Constanten, sondern als zu bestimmende Functionen von x betrachten, so werden sich, weil

$$(58)\qquad \frac{dy_\alpha}{dx} = \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial c_1}\frac{dc_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial F_\alpha}{\partial c_n}\frac{dc_n}{dx}$$
$$= f_\alpha(x, F_1, \ldots F_n) + \varepsilon_\alpha \varphi_\alpha(x, F_1, \ldots F_n)$$

befriedigt sein soll, und vermöge (56) für willkürliche $c_1, \ldots c_n$, wenn nur für $y_1, \ldots y_n$ die Werthe (57) gedacht werden,

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial x} = f_\alpha(x, F_1, \ldots F_n)$$

ist, aus (58) die n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(59)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial c_1}\dfrac{dc_1}{dx} + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial c_n}\dfrac{dc_n}{dx} = \varepsilon_1 \varphi_1(x, F_1, \ldots F_n) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial c_1}\dfrac{dc_1}{dx} + \cdots + \dfrac{\partial F_2}{\partial c_n}\dfrac{dc_n}{dx} = \varepsilon_2 \varphi_2(x, F_1, \ldots F_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial c_1}\dfrac{dc_1}{dx} + \cdots + \dfrac{\partial F_n}{\partial c_n}\dfrac{dc_n}{dx} = \varepsilon_n \varphi_n(x, F_1, \ldots F_n) \end{cases}$$

zur Bestimmung der Functionen $c_1, c_2, \ldots c_n$ ergeben. Löst man dieses in

$$\frac{dc_1}{dx},\ \frac{dc_2}{dx},\ \ldots \frac{dc_n}{dx}$$

lineare Gleichungsystem nach diesen Grössen auf, so folgt

$$(60)\qquad \begin{cases} \dfrac{dc_1}{dx} = \varepsilon_1 \psi_{11}(x, c_1, \ldots c_n) + \varepsilon_2 \psi_{12}(x, c_1, \ldots c_n) + \cdots + \varepsilon_n \psi_{1n}(x, c_1, \ldots c_n) \\ \dfrac{dc_2}{dx} = \varepsilon_1 \psi_{21}(x, c_1, \ldots c_n) + \varepsilon_2 \psi_{22}(x, c_1, \ldots c_n) + \cdots + \varepsilon_n \psi_{2n}(x, c_1, \ldots c_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dc_n}{dx} = \varepsilon_1 \psi_{n1}(x, c_1, \ldots c_n) + \varepsilon_2 \psi_{n2}(x, c_1, \ldots c_n) + \cdots + \varepsilon_n \psi_{nn}(x, c_1, \ldots c_n), \end{cases}$$

deren allgemeine Integration die Functionalwerthe von $c_1, \ldots c_n$ geben würde, die in (57) *eingesetzt die allgemeinen Integrale des*

gegebenen Differentialgleichungsystems (55) *liefern*. Wenn wir nun dasjenige Integralsystem finden wollen, worin dem $x = x_0$ die Werthe $y_1 = y_1^0$, $y_2 = y_2^0$, $\ldots y_n = y_n^0$ entsprechen, so werden sich aus den Gleichungen (57), welche in

$$(61)\quad y_1^0 = F_1(x_0, c_1^0, \ldots c_n^0),\ y_2^0 = F_2(x_0, c_1^0, \ldots c_n^0),\ \ldots y_n^0 = F_n(x_0, c_1^0, \ldots c_n^0)$$

übergehen, wenn $c_1^0, \ldots c_n^0$ die Werthe der Functionen $c_1, \ldots c_n$ für $x = x_0$ bezeichnen, die Anfangswerthe $c_1^0, \ldots c_n^0$ ergeben; *setzt man daher die Grössen* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ *sehr klein voraus*, so werden nach den Gleichungen (60) die Grössen $\frac{dc_1}{dx}, \ldots \frac{dc_n}{dx}$ ebenfalls sehr klein sein, es werden sich also $c_1, \ldots c_n$ nur langsam ändern, und *wenn daher die Werthe der Integrale nur in einem nicht zu grossen um* x_0 *befindlichen Bereiche von* x *gebraucht werden, so wird man, ohne merklich die Functionen* $\psi_{\alpha\beta}$ *zu ändern, die Variabeln* $c_1, \ldots c_n$ *durch ihre Anfangswerthe* $c_1^0, \ldots c_n^0$ *ersetzen können, so dass die Differentialgleichungen* (60) *in*

$$(62)\quad \begin{cases} \frac{dc_1}{dx} = \varepsilon_1 \psi_{11}(x, c_1^0, \ldots c_n^0) + \varepsilon_2 \psi_{12}(x, c_1^0, \ldots c_n^0) + \cdots \\ \qquad\qquad + \varepsilon_n \psi_{1n}(x, c_1^0, \ldots c_n^0) \\ \frac{dc_2}{dx} = \varepsilon_1 \psi_{21}(x, c_1^0, \ldots c_n^0) + \varepsilon_2 \psi_{22}(x, c_1^0, \ldots c_n^0) + \cdots \\ \qquad\qquad + \varepsilon_n \psi_{2n}(x, c_1^0, \ldots c_n^0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dc_n}{dx} = \varepsilon_1 \psi_{n1}(x, c_1^0, \ldots c_n^0) + \varepsilon_2 \psi_{n2}(x, c_1^0, \ldots c_n^0) + \cdots \\ \qquad\qquad + \varepsilon_n \psi_{nn}(x, c_1^0, \ldots c_n^0) \end{cases}$$

übergehen, und somit die Grössen $c_1, \ldots c_n$ *als Functionen von* x *durch die Quadraturen bestimmt sind*

$$(63)\quad \begin{cases} c_1 - c_1^0 = \int_{x_0}^{x} \left[\varepsilon_1 \psi_{11}(x, c_1^0, \ldots c_n^0) + \cdots + \varepsilon_n \psi_{1n}(x, c_1^0, \ldots c_n^0)\right] dx \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_n - c_n^0 = \int_{x_0}^{x} \left[\varepsilon_1 \psi_{n1}(x, c_1^0, \ldots c_n^0) + \cdots + \varepsilon_n \psi_{nn}(x, c_1^0, \ldots c_n^0)\right] dx \end{cases}$$

Ist das erhaltene Resultat nicht genau genug, d. h. führt die Verification der Integrale zu Fehlern, welche die festgesetzten Grenzen überschreiten, so kann man auf den rechten Seiten der Gleichungen (60) die Grössen $c_1, \ldots c_n$ durch die mit Hülfe dieser ersten Annäherung erhaltenen Grössen ersetzen, wiederum die analogen Quadraturen (63) nehmen, und dasselbe Verfahren wiederholt anwenden, so dass in dieser wiederholten Anwendung der Methode der Variation der Constanten ein Annäherungsverfahren für die Berechnung der Integrale algebraischer Differentialgleichungen vorgezeichnet ist.

7. Wie für Quadraturen algebraischer Functionen von x früher nachgewiesen worden, dass, wenn dieselben nur algebraisch von x abhängen, sich ihr Werth auch *rational* durch x und die unter der Quadratur stehende algebraische Function ausdrücken lasse, so kann man auch jede algebraische Integralfunction eines beliebigen algebraischen Differentialgleichungsystems in gleich anzugebender Weise rational umformen.

Sei nämlich das algebraische Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse in der Normalform gegeben

$$(64)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \ldots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_1}{dx} = G_1(x, t_1, y_1, \ldots y_m) \\ \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \ldots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_2}{dx} = G_2(x, t_1, y_1, \ldots y_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \ldots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_m}{dx} = G_m(x, t_1, y_1, \ldots y_m), \end{cases}$$

worin t_1 eine Lösung der mit Adjungirung von $x, y_1, \ldots y_m$ irreductibeln Gleichung

$$(65)\qquad G(x, t, y_1, \ldots y_m) = 0$$

ist, und besitze dasselbe eine algebraische Integralfunction $\omega_1(x, y_1, \ldots y_m)$, so dass, wenn

$$(66)\qquad \omega_1(x, y_1, \ldots y_m) = \alpha$$

gesetzt wird, worin α eine willkürliche Constante bedeutet, nach dem Abschnitte III. des ersten Kapitels die Gleichung

$$(67)\qquad \frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_1}{\partial y_1}\frac{G_1}{\frac{\partial G}{\partial t_1}}+\cdots+\frac{\partial\omega_1}{\partial y_m}\frac{G_m}{\frac{\partial G}{\partial t_1}}=0,$$

in welche der Werth von t_1 aus der Gleichung (65) zu substituiren ist, eine in $x, y_1, \ldots y_m$ identische sein muss. Da nun ω_1 eine *algebraische* Function von $x, y_1, \ldots y_m$ sein soll, so wird sie als Lösung einer mit Adjungirung von $x, t_1, y_1, \ldots y_m$ irreductibeln Gleichung

$$(68)\quad \omega^\nu+f_1(x,t_1,y_1,\ldots y_m)\omega^{\nu-1}+\cdots+f_\nu(x,t_1,y_1,\ldots y_m)=0$$

dargestellt werden können, in welcher $f_1, f_2, \ldots f_\nu$ rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten; differentiirt man nun die mit Benutzung von (65) in $x, y_1, \ldots y_m$ identische Gleichung

$$(69)\quad \omega_1^\nu+f_1(x,t_1,y_1,\ldots y_m)\omega_1^{\nu-1}+\cdots+f_\nu(x,t_1,y_1,\ldots y_m)=0$$

vermöge (64) total nach x, so ergiebt sich die ebenfalls in den bezeichneten Grössen identische Gleichung

$$(70)\qquad (\nu\omega_1^{\nu-1}+(\nu-1)f_1\omega_1^{\nu-2}+\cdots+f_{\nu-1})\times$$
$$\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_1}{\partial y_1}\frac{G_1}{\frac{\partial G}{\partial t_1}}+\cdots+\frac{\partial\omega_1}{\partial y_m}\frac{G_m}{\frac{\partial G}{\partial t_1}}\right)$$
$$+\omega_1^{\nu-1}\frac{df_1}{dx}+\omega_1^{\nu-2}\frac{df_2}{dx}+\cdots+\frac{df_\nu}{dx}=0,$$

oder vermöge (67) die mit Benutzung von (65) in $x, y_1, \ldots y_m$ identische Gleichung

$$(71)\qquad \omega_1^{\nu-1}\frac{df_1}{dx}+\omega_1^{\nu-2}\frac{df_2}{dx}+\cdots+\frac{df_\nu}{dx}=0.$$

Es ist somit die in $x, y_1, \ldots y_m$ algebraische Function ω_1 die Lösung einer Gleichung $\nu-1^{\text{ten}}$ Grades von der Form

$$(72) \quad \omega'^{-1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_1}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial y_1} \right) \frac{G_1}{\frac{\partial G}{\partial t_1}} + \cdots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_m} + \frac{\partial f_1}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial y_m} \right) \frac{G_m}{\frac{\partial G}{\partial t_1}} \right) + \cdots$$
$$+ \frac{\partial f_\nu}{\partial x} + \frac{\partial f_\nu}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_1} + \frac{\partial f_\nu}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial y_1} \right) \frac{G_1}{\frac{\partial G}{\partial t_1}} + \cdots$$
$$+ \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_m} + \frac{\partial f_\nu}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial y_m} \right) \frac{G_m}{\frac{\partial G}{\partial t_1}} = 0,$$

in welcher vermöge (65) die Coefficienten der einzelnen Potenzen von ω rationale Functionen von $x, t_1, y_1, \ldots y_m$ sind, was sich mit der Annahme der Irreductibilität der Gleichung (68) nicht vereinigen lässt, wenn nicht entweder die einzelnen Coefficienten dieser Gleichung mit Benutzung von (65) identisch in $x, y_1, \ldots y_m$ verschwinden, d. h. $f_1, f_2, \ldots f_\nu$ selbst Integralfunctionen des Differentialgleichungssystems (64) waren, oder $\nu = 1$ ist, so dass die Gleichung (72) gar nicht existirt — im ersten Falle wäre nach (68) ω_1 eine algebraische Function von Integralfunctionen, welche rational aus $x, t_1, y_1, \ldots y_m$ zusammengesetzt sind, im zweiten Falle wäre ω_1 selbst eine solche rationale Integralfunction. Zugleich ersieht man, dass für irgend eine andere Lösung ω_2 der Gleichung (68), weil $f_1, f_2, \ldots f_\nu$ sich selbst als Integralfunctionen ergaben, also mit Benutzung von (65)

$$\frac{df_1}{dx} = 0, \quad \frac{df_2}{dx} = 0, \quad \cdots \frac{df_\nu}{dx} = 0$$

in $x, y_1, \ldots y_m$ identisch erfüllt wurden, der durch Differentiation nach x aus (68) hergeleitete Ausdruck

$$(\nu \omega_2^{\nu-1} + (\nu - 1) f_1 \omega_2^{\nu-2} + \cdots + f_{\nu-1}) \times$$
$$\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y_1} \frac{G_1}{\frac{\partial G}{\partial t_1}} + \cdots + \frac{\partial \omega_2}{\partial y_m} \frac{G_m}{\frac{\partial G}{\partial t_1}} \right)$$

mit Benutzung von (65) in $x, y_1, \ldots y_m$ identisch verschwinden wird, und hieraus folgt, da der erste Factor wegen der Irreductibilität von (68), also der Einfachheit der Lösung ω_2

wegen nicht Null werden kann, dass der zweite Factor verschwindet, *also* ω_2, *somit jede Lösung von* (68) *eine Integralfunction des gegebenen Differentialgleichungssystems ist*, was auch schon aus dem am Ende des Abschnittes III des ersten Kapitels in Gleichung (79) ausgesprochenen Satze hervorgeht, da ω_2 als algebraische Function der Integralfunctionen $f_1, f_2, \ldots f_k$ betrachtet werden kann.

Wir erhalten daher den nachfolgenden Satz:

Wenn ein algebraisches Differentialgleichungssystem beliebiger Klasse mit der unabhängigen Variabeln x und den abhängigen Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_m$ vermittels einer algebraischen Function t_1 dieser Variabeln auf die rationale Normalform eines solchen Systems gebracht ist, so wird jede algebraische Integralfunction dieses Differentialgleichungssystems entweder selbst eine rationale Function von $x, y_1, \ldots y_m$ und t_1 sein oder eine algebraische Zusammensetzung solcher rationaler Integralfunctionen bilden, und jeder Zweig dieser irreductiblen Zusammensetzung ist wieder eine Integralfunction.

8. Sei jetzt allgemeiner eine Integralfunction ω_1 des Differentialgleichungssystemes (64), (65) eine algebraische Function von $x, y_1, \ldots y_m$, von Logarithmen eben solcher algebraischer Functionen

$$\log v_1, \quad \log v_2, \quad \ldots \log v_\mu,$$

und von Quadraturen

$$(73) \qquad i_1 = \left(\int f_1(s)ds\right)_{s=s_1}, \quad i_2 = \left(\int f_2(s)\,ds\right)_{s=s_2}, \quad \ldots$$

$$i_k = \left(\int f_k(s)ds\right)_{s=s_k},$$

worin $f_1(s), f_2(s), \ldots f_k(s)$ algebraische Functionen ihrer Argumente s, und $s_1, s_2, \ldots s_k$ algebraische Functionen von $x, y_1, \ldots y_m$ sind, also eine Integralgleichung des Differentialgleichungssystems

$$(74) \quad \omega_1(x, y_1, \ldots y_m, \log v_1, \ldots \log v_\mu, i_1, \ldots i_k) = \alpha,$$

worin α eine willkürliche Constante, und ω_1 als die Lösung einer mit Adjungirung der Grössen

$$(75)\quad x, y_1, \ldots y_m, t_1, v_1, \ldots v_\mu, s_1, \ldots s_k, f_1(s_1), \ldots f_k(s_k),$$
$$\log v_1, \ldots \log v_\mu, \quad i_1, \ldots i_k$$

irreductiblen algebraischen Gleichung

$$(76)\quad \omega^\nu + \varphi_1(x, y_1, \ldots t_1, v_1, \ldots s_1, \ldots f_1(s_1), \ldots \log v_1, \ldots i_1, \ldots)\omega^{\nu-1} + \cdots$$
$$+ \varphi_\nu(x, y_1, \ldots t_1, v_1, \ldots s_1, \ldots f_1(s_1), \ldots \log v_1, \ldots i_1 \ldots) = 0$$

dargestellt werden kann, in welcher $\varphi_1, \ldots \varphi_\nu$ rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten; selbstverständlich darf angenommen werden, dass zwischen den Grössen

$$(77)\qquad x, y_1, \ldots y_m, \log v_1, \ldots \log v_\mu, \quad i_1, \ldots i_k$$

nicht eine für beliebige Werthe von $x, y_1, \ldots y_m$ gültige algebraische Beziehung besteht, weil wir im entgegengesetzten Falle eine der Transcendenten durch die übrigen algebraisch ausdrücken, in ω_1 der Gleichung (74) einsetzen und nun eine Integralgleichung, welche algebraisch aus einer geringeren Anzahl jener Transcendenten zusammengesetzt ist, der Untersuchung zu Grunde legen könnten.

Setzt man nun den Werth von ω_1 aus (74) in (76) ein, so muss die so entstehende Gleichung

$$(78)\quad \omega_1^\nu + f_1(x, y_1, \ldots t_1, v_1, \ldots s_1, \ldots f_1(s_1), \ldots \log v_1, \ldots i_1, \ldots)\omega_1^{\nu-1} + \cdots$$
$$+ f_\nu(x, y_1, \ldots t_1, v_1, \ldots s_1, \ldots f_1(s_1), \ldots \log v_1, \ldots i_1, \ldots) = 0$$

mit Benutzung von (65) eine in allen Grössen (75) — von t_1 abgesehen — identische sein, und wenn man nun (78) nach x total differentiirt, so folgt vermöge (64)

$$(79)\quad (\nu\omega_1^{\nu-1} + (\nu-1)f_1\omega_1^{\nu-2} + \cdots + f_{\nu-1})\frac{d\omega_1}{dx} + \omega_1^{\nu-1}\frac{df_1}{dx}$$
$$+ \omega_1^{\nu-2}\frac{df_2}{dx} + \cdots + \frac{df_\nu}{dx} = 0,$$

oder da nach (74)

$$(80)\qquad \frac{d\omega_1}{dx} = 0$$

ist, die mit Benutzung von (65) in den oben angegebenen Grössen identische Gleichung

$$(81)\qquad \omega_1^{\nu-1}\frac{df_1}{dx} + \omega_1^{\nu-2}\frac{df_2}{dx} + \cdots + \frac{df_{\nu-1}}{dx} = 0.$$

Da aber

$$\frac{df_1}{dx}, \quad \frac{df_2}{dx}, \quad \ldots \frac{df_\nu}{dx},$$

wie unmittelbar zu sehen, wiederum rationale Functionen der Grössen (75) sind, so würde gegen die für die Gleichung (76) gemachte Voraussetzung der Irreductibilität ω_1 einer Gleichung $\nu - 1^{\text{ten}}$ Grades desselben Charakters genügen, und es müsste demnach genau wie oben entweder $\nu = 1$, oder

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots f_\nu = \alpha_\nu$$

Integralgleichungen des Differentialgleichungssystems sein, so dass wir den folgenden ganz allgemeinen Satz erhalten:

Wenn ein algebraisches Differentialgleichungsystem beliebiger Klasse mit der unabhängigen Variabeln x und den abhängigen Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_m$ vermittels einer algebraischen Function t_1 dieser Variabeln auf die rationale Normalform eines solchen Systems gebracht wird, so ist jede algebraisch aus den Variabeln $x, y_1, \ldots y_m$, aus Logarithmen von algebraischen Functionen $v_1, v_2, \ldots v_\mu$ dieser Variabeln und Abel'schen Integralen mit ebensolchen algebraischen Argumenten $s_1, s_2, \ldots s_k$ und dazu gehörigen algebraischen Irrationalitäten $f_1(s_1), f_2(s_2), \ldots f_k(s_k)$ zusammengesetzte Integralfunction dieses Differentialgleichungsystems entweder selbst eine rationale Function von $x, y_1, \ldots y_m, t_1, v_1, \ldots v_\mu, s_1, \ldots s_k, f_1(s_1), \ldots f_k(s_k)$ und jenen Transcendenten oder eine algebraische Zusammensetzung solcher rationaler Integralfunctionen, und jeder Zweig dieser irreductibeln Zusammensetzung bildet wieder eine Integralfunction.

Es braucht nach früheren Auseinandersetzungen kaum wieder hervorgehoben zu werden, dass, wenn man die algebraischen Functionen von $x, y_1, \ldots y_m$

$$v_1, \ldots v_\mu, \quad s_1, \ldots s_k, \quad f_1(s_1), \ldots f_k(s_k)$$

als rationale Functionen *einer* algebraischen Function T_1 von $x, y_1, \ldots y_m, t_1$ ausdrückt, auch alle die Functionen Integralfunctionen des gegebenen Differentialgleichungsystems sein werden, die aus der eben gefundenen *rationalen* Integralfunction

(82) $\Omega_1 = f(x, y_1, \ldots t_1, v_1, \ldots s_1, \ldots f_1(s_1), \ldots \log v_1, \ldots \iota_1, \ldots)$

hervorgehen, wenn man in die Ausdrücke von $v_1, \ldots s_1,$ $\ldots f_1(s_1), \ldots$ statt T_1 eine beliebige Lösung der mit Adjungirung von $x, y_1, \ldots y_m, t_1$ irreductibeln algebraischen Gleichung einsetzt, von welcher T_1 eine Lösung ist, und ebenso ist die Erweiterung dieser Sätze auf die Fälle ersichtlich, in denen noch andere Transcendenten als *Abel*'sche Integrale in die Integralfunction des gegebenen Differentialgleichungsystems eintreten.

9. Sei nun Ω_1 der Gleichung (82) eine rationale Integralfunction des gegebenen Differentialgleichungsystems (64), (65), so wird der Definition gemäss

$$\frac{d\Omega_1}{dx} = 0 \tag{83}$$

mit Benutzung von (65) für alle $x, y_1, \ldots y_m$ identisch erfüllt sein müssen; da aber in (83) wieder nur alle in Ω_1 enthaltenen Grössen rational eintreten, zwischen den Logarithmen und *Abel*'schen Integralen aber der Voraussetzung gemäss eine algebraische Beziehung nicht stattfinden sollte, so müssen diese Transcendenten selbst herausfallen, und es wird daher Ω_1 eine Integralfunction bleiben, wenn man diese Transcendenten um beliebige additive Constanten vermehrt, indem die nach x genommenen totalen Differentialquotienten dieselben bleiben.

Ist also

$$\Omega_1 = f(x, y_1, \ldots t_1, v_1, \ldots s_1, \ldots f_1(s_1), \ldots \log v_1, \ldots i_1, \ldots) \tag{84}$$

eine rationale Integralfunction des Differentialgleichungsystems (64), (65), *so werden auch alle in den Formen*

$$\Omega = f(x, y_1, \ldots t_1, v_1, \ldots s_1, \ldots f_1(s_1), \ldots \log v_1 + c_1, \ldots i_1 + C_1, \ldots) \tag{85}$$

enthaltenen Functionen, in welchen $c_1, c_2, \ldots c_\mu, C_1, C_2, \ldots C_k$ willkürliche Constanten bedeuten, rationale Integralfunctionen jenes Systems liefern.

Da aber jede algebraische Verbindung von Integralfunctionen, wie früher gezeigt worden, wieder eine Integralfunction ist, wir also durch Subtraction zweier Integralfunctionen, die sich nur in der Constanten c_λ oder C_λ um den unendlich kleinen Werth δc_λ resp. δC_λ unterscheiden,

und Division mit diesem unendlich kleinen Incremente wieder eine Integralfunction erhalten, so folgt analog den im Abschnitt VII. 3. des dritten Kapitels gemachten Schlüssen,

dass, wenn man in einer rationalen Integralfunction (84) *des Differentialgleichungssystems* (64), (65) *die Transcendenten* $\log v_1, \log v_2, \ldots \log v_\mu$ *um die willkürlichen Constanten* $c_1, c_2, \ldots c_\mu$ *und die Abel'schen Integrale* $i_1, i_2, \ldots i_k$ *um* $C_1, C_2, \ldots C_k$ *vermehrt, die Function*

$$\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_\mu+N_1+\cdots+N_k}\,\Omega}{\partial c_1^{\nu_1}\ldots\partial c_\mu^{\nu_\mu}\,\partial C_1^{N_1}\ldots\partial C_k^{N_k}}$$

wiederum für willkürliche Werthe dieser Constanten eine rationale Integralfunction des Differentialgleichungssystems ist, also auch, wenn sämmtliche Constanten gleich Null gesetzt werden,

$$\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_\mu+N_1+\cdots+N_k}\,\Omega_1}{\partial \log v_1^{\nu_1}\ldots\partial \log v_\mu^{\nu_\mu}\,\partial i_1^{N_1}\ldots\partial i_k^{N_k}}$$

eine solche Integralfunction darstellt.

Ist die rationale Function Ω_1 eine ganze Function der in ihr enthaltenen logarithmischen Functionen und *Abel*'schen Integrale, so wird man durch successive Differentiation nach diesen Transcendenten bis zu den Coefficienten jener ganzen Function der Transcendenten gelangen können, welche rationale Functionen von $x, y_1, \ldots y_m, t_1, v_1, \ldots v_\mu, s_1, \ldots s_k, f_1(s_1), \ldots f_k(s_k)$ waren, und da diese Coefficienten nach dem eben bewiesenen Satze auch Integralfunctionen des Differentialgleichungssystems sein müssen, so finden wir,

dass, wenn das Differentialgleichungssystem (64), (65) *eine rationale Integralfunction* Ω_1 *besitzt, welche in den logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen eine ganze Function ist, das Differentialgleichungssystem auch nur in den Grössen* $x, y_1, \ldots y_m, t_1, v_1, \ldots v_\mu, s_1, \ldots s_k, f_1(s_1), \ldots f_k(s_k)$ *rationale Integralfunctionen besitzt, welche jedoch auch in Constanten übergehen können.*

VI. Ueber lineare Differentialgleichungssysteme mit variabeln Coefficienten, deren Integrale sich als Quadraturen algebraischer Functionen darstellen lassen.

1. Es sei das lineare Differentialgleichungsystem vorgelegt

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n + A_{1n+1} \\ \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2n}y_n + A_{2n+1} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \cdots + A_{nn}y_n + A_{nn+1}, \end{cases}$$

worin die $A_{\alpha\beta}$ algebraische Functionen von x bedeuten, und werde angenommen, *dass ein Element eines Integralsystems, also wie früher gezeigt worden, im Allgemeinen auch die ergänzenden Elemente dieses Integralsystems, sich als lineare*) Function mit variabeln Coefficienten von Quadraturen algebraischer Functionen in der Form darstellen lasse*

$$(2)\quad y_1 = u + u_1 \log v_1 + \cdots + u_m \log v_m + U_1 J_1(s_1, f_1(s_1)) + \cdots + U_\mu J_\mu(s_\mu, f_\mu(s_\mu)),$$

worin $J_1, \ldots J_\mu$ Integrale der resp. Differentialgleichungen

$$(3)\qquad \frac{dz}{ds_1} = f_1(s_1), \quad \cdots \frac{dz}{ds_\mu} = f_\mu(s_\mu)$$

bedeuten, in welchen $f_1, \ldots f_\mu$ algebraische Functionen ihrer Argumente, $s_1, \ldots s_\mu$ algebraische Functionen von x sind, und vorausgesetzt wird, dass

$$u_1, \ldots u_m, \quad U_1, \ldots U_\mu$$

rationale Functionen der Coefficienten des Differentialgleichungssystems (1) *sind;* so werden *genau* dieselben Schlüsse, wie

*) Wie im VII. Abschnitt des dritten Kapitels gezeigt worden, *muss* die Function eine lineare sein, wenn das reducirte Differentialgleichungsystem keine aus eben diesen Quadraturen algebraisch zusammengesetzten Integralsysteme besitzt.

sie im I. Abschnitt des vierten Kapitels gemacht worden, wenn man erwägt, dass aus k Integralsystemen der Differentialgleichungen (1)

$$\begin{array}{llll} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{k1} & y_{k2} & \cdots & y_{kn} \end{array}$$

sich ein Integralsystem

$$\frac{y_{11}+y_{21}+\cdots+y_{k1}}{k}, \quad \frac{y_{12}+y_{22}+\cdots+y_{k2}}{k}, \quad \ldots \quad \frac{y_{1n}+y_{2n}+\cdots+y_{kn}}{k}$$

bilden lässt, den Satz ergeben,

dass das Differentialgleichungssystem (1) *noch ein anderes Integralelement von der Form besitzt*

$$\begin{aligned}(4) \qquad y_1 = T &+ B_{11} U_1 \log T_1^{(1)} + B_{12} U_1 \log T_1^{(2)} + \cdots \\ &+ B_{21} U_2 \log T_2^{(1)} + B_{22} U_2 \log T_2^{(2)} + \cdots \\ &+ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ &+ \frac{u_1}{\delta} \log V_1 + \cdots + \frac{u_m}{\delta} \log V_m \\ &+ \frac{U_1}{\delta} \sum_{1}^{p_1} {}_{\varrho} J_1(\tau_{\varrho 1}, f_1(\tau_{\varrho 1})) + \\ &+ \frac{U_\mu}{\delta} \sum_{1}^{p_\mu} {}_{\varrho} J_\mu(\tau_{\varrho\mu}, f_\mu(\tau_{\varrho\mu})),\end{aligned}$$

worin $u_1, \ldots u_m, U_1, \ldots U_\mu$ *die in den Coefficienten der Differentialgleichungen* (1) *rational vorausgesetzten Factoren der Transcendenten in dem gegebenen Integralausdrucke* (2) *waren.* $B_{\alpha\beta}$ *Constanten,* $p_1, \ldots p_\mu$ *das Geschlecht der algebraischen Irrationalitäten* $f_1(s), \ldots f_\mu(s)$ *angeben,* δ *eine positive ganze Zahl ist,* $T_1^{(1)}, T_1^{(2)}, \ldots T_2^{(1)}, T_2^{(2)}, \ldots, V_1, V_2, \ldots V_m$ *in den Coefficienten der Differentialgleichungen r a t i o n a l ausdrückbare Functionen,* $\tau_{1\alpha}, \tau_{2\alpha}, \ldots \tau_{p_\alpha\alpha}$ *Lösungen einer algebraischen Gleichung* p_α^{ten} *Grades von der Form sind*

$$(5) \qquad \tau^{p_\alpha} + F_1(x, A_{\alpha\beta})\, \tau^{p_\alpha - 1} + \cdots + F_{p_\alpha}(x, A_{\alpha\beta}) = 0,$$

worin $F_1, \ldots F_{p_\alpha}$ *rationale Functionen von* x *und den Coefficienten* $A_{\alpha\beta}$ *der Differentialgleichungen bedeuten, und endlich* $f_\alpha(\tau_{1\alpha}), \ldots f_\alpha(\tau_{p_\alpha \alpha})$ *rationale Functionen von den resp.* $\tau_{1\alpha}, \ldots \tau_{p_\alpha \alpha}$ *und den Coefficienten der Differentialgleichungen sind.*

Dieses Resultat wäre nur dann inhaltlos, wenn alle so hervorgehenden Integralelemente $y_1, y_2, \ldots y_n$ Constanten würden, die wir mit $c_1, c_2, \ldots c_n$ bezeichnen wollen; in diesem Falle wäre nach (1)

$$(6)\quad \begin{cases} A_{11}c_1 + A_{12}c_2 + \cdots + A_{1n}c_n + A_{1n+1} = 0, \\ A_{21}c_1 + A_{22}c_2 + \cdots + A_{2n}c_n + A_{2n+1} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{n1}c_1 + A_{n2}c_2 + \cdots + A_{nn}c_n + A_{nn+1} = 0, \end{cases}$$

woraus folgen würde, dass die Substitutionen

$$(7)\quad y_1 = z_1 + c_1, \quad y_2 = z_2 + c_2, \quad \cdots y_n = z_n + c_n$$

das Differentialgleichungsystem (1) in das homogene lineare

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + \cdots + A_{1n}z_n \\ \dfrac{dz_2}{dx} = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + \cdots + A_{2n}z_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{dz_n}{dx} = A_{n1}z_1 + A_{n2}z_2 + \cdots + A_{nn}z_n \end{cases}$$

überführen, so dass in diesem Falle das nicht homogene Differentialgleichungsystem als mit einem homogenen zusammenfallend betrachtet werden darf. Wir können somit sagen, dass das obige Resultat inhaltlos werden kann, wenn das gegebene Differentialgleichungsystem (1) ein homogenes von der Art ist, dass es ein constantes Integralsystem besitzt, das auch Null sein darf. Nun hat aber ein homogenes lineares Differentialgleichungsystem stets ein Integralsystem, dessen sämmtliche Elemente Null sind, ein von Null verschiedenes constantes Integralsystem jedoch erfordert die Existenz der Gleichungen

$$(9)\quad \begin{cases} A_{11}c_1 + A_{12}c_2 + \cdots + A_{1n}c_n = 0 \\ A_{21}c_1 + A_{22}c_2 + \cdots + A_{2n}c_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{n1}c_1 + A_{n2}c_2 + \cdots + A_{nn}c_n = 0; \end{cases}$$

und man sieht dann leicht, dass das homogene lineare Differentialgleichungssystem n^{ter} Klasse sich auf ein eben solches $n - 1^{\text{ter}}$ Klasse zurückführen lässt; denn setzt man die aus dem letzten Gleichungssystem sich ergebenden Werthe

$$(10)\quad \begin{cases} A_{1n} = -A_{11}\frac{c_1}{c_n} - A_{12}\frac{c_2}{c_n} - \cdots - A_{1n-1}\frac{c_{n-1}}{c_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{nn} = -A_{n1}\frac{c_1}{c_n} - A_{n2}\frac{c_2}{c_n} - \cdots - A_{nn-1}\frac{c_{n-1}}{c_n} \end{cases}$$

in das homogene System von Differentialgleichungen ein, so folgt

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = A_{11}\left(y_1 - \frac{c_1}{c_n}y_n\right) + A_{12}\left(y_2 - \frac{c_2}{c_n}y_n\right) + \cdots \\ \qquad\qquad + A_{1n-1}\left(y_{n-1} - \frac{c_{n-1}}{c_n}y_n\right) \\ \frac{dy_2}{dx} = A_{21}\left(y_1 - \frac{c_1}{c_n}y_n\right) + A_{22}\left(y_2 - \frac{c_2}{c_n}y_n\right) + \cdots \\ \qquad\qquad + A_{2n-1}\left(y_{n-1} - \frac{c_{n-1}}{c_n}y_n\right) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dy_n}{dx} = A_{n1}\left(y_1 - \frac{c_1}{c_n}y_n\right) + A_{n2}\left(y_2 - \frac{c_2}{c_n}y_n\right) + \cdots \\ \qquad\qquad + A_{nn-1}\left(y_{n-1} - \frac{c_{n-1}}{c_n}y_n\right), \end{cases}$$

und zieht man von der ersten Gleichung die mit $\frac{c_1}{c_n}$ multiplicirte letzte, von der zweiten die mit $\frac{c_2}{c_n}$ multiplicirte letzte, etc. ab, so ergiebt sich, wenn

$$(12)\quad y_1 - \frac{c_1}{c_n}y_n = z_1,\; y_2 - \frac{c_2}{c_n}y_n = z_2, \ldots y_{n-1} - \frac{c_{n-1}}{c_n}y_n = z_{n-1}$$

gesetzt wird, das folgende homogene lineare Differentialgleichungsystem

$$
(13)\begin{cases}
\frac{dz_1}{dx} = \left(A_{11} - \frac{c_1}{c_n} A_{n1}\right) z_1 + \left(A_{12} - \frac{c_1}{c_n} A_{n2}\right) z_2 + \cdots \\
\qquad\qquad + \left(A_{1\,n-1} - \frac{c_1}{c_n} A_{n\,n-1}\right) z_{n-1} \\
\frac{dz_2}{dx} = \left(A_{21} - \frac{c_2}{c_n} A_{n1}\right) z_1 + \left(A_{22} - \frac{c_2}{c_n} A_{n2}\right) z_2 + \cdots \\
\qquad\qquad + \left(A_{2\,n-1} - \frac{c_2}{c_n} A_{n\,n-1}\right) z_{n-1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{dz_{n-1}}{dx} = \left(A_{n-1\,1} - \frac{c_{n-1}}{c_n} A_{n1}\right) z_1 + \left(A_{n-1\,2} - \frac{c_{n-1}}{c_n} A_{n2}\right) z_2 + \cdots \\
\qquad\qquad + \left(A_{n-1\,n-1} - \frac{c_{n-1}}{c_n} A_{n\,n-1}\right) z_{n-1},
\end{cases}
$$

das nur von der $n-1^{\text{ten}}$ Klasse ist. Nehmen wir somit an, dass solche lineare Differentialgleichungsysteme vorgelegt sind, die sich nicht durch die oben angegebenen einfachen Substitutionen in ein lineares System niederer Klasse verwandeln lassen, *so würde das oben gefundene Resultat* (4) *somit nur für homogene lineare Differentialgleichungen unbrauchbar werden können, und dies auch nur in dem Falle, wenn alle* (4) *analogen Integralelemente gleich Null würden.*

2. Wir wollen aber nicht bloss aus der hypothetisch angenommenen Form (2) eines Integrals des linearen Differentialgleichungsystems die Existenz eines anderen Integrales (4) von, um uns kurz auszudrücken, rationaler Beschaffenheit herleiten, sondern uns mit den Eigenschaften der Integralsysteme (2) selbst beschäftigen, welche algebraisch von *Abel*schen Integralen abhängen.

Habe also das lineare Differentialgleichungsystem (1) ein Integralelement von der Form

$$
(14)\quad \eta_1 = F_1\left(x, J_1(s_1, f_1(s_1)),\ J_2(s_2, f_2(s_2)),\ \dots J_\mu(s_\mu, f_\mu(s_\mu))\right),
$$

worin F eine algebraische Function und $J_1, J_2, \dots J_\mu$ *Abel*'sche Integrale sein sollen, von denen ein Theil auch die etwa vorkommenden logarithmischen Functionen repräsentiren kann,

so ist einerseits aus den früheren Auseinandersetzungen klar, dass, von den früher genau bezeichneten Ausnahmefällen abgesehen, auch die ergänzenden Integralelemente dieselbe Form haben

$$(15)\begin{cases}\eta_2 = F_2\left(x, J_1(s_1, f_1(s_1)),\ J_2(s_2, f_2(s_2)),\ \ldots J_n(s_n, f_n(s_n))\right)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \eta_n = F_n\left(x, J_1(s_1, f_1(s)),\ J_2(s_2, f_2(s_2)),\ \ldots J_n(s_n, f_n(s_n))\right),\end{cases}$$

und aus dem VII. Abschnitte des dritten Kapitels ergiebt sich, dass,

wenn ein lineares homogenes oder nicht homogenes System von Differentialgleichungen ein algebraisch aus Quadraturen algebraischer Functionen zusammengesetztes Integralelement besitzt, dieses im Allgemeinen entweder selbst linear aus diesen Quadraturen zusammengesetzt ist, oder dass jedenfalls das reducirte lineare Differentialgleichungsystem als Integralelement eine lineare Function aller dieser Quadraturen oder einiger derselben besitzt mit Coefficienten, welche algebraische Functionen von x und zugleich Integralelemente des reducirten Differentialgleichungsystems sind, aber auch Constanten sein können.

Es wäre also im Allgemeinen nur die Frage aufzuwerfen, ob wir Eigenschaften für die Argumente der Transcendenten und deren algebraische Coefficienten ermitteln können, wenn *lineare* Ausdrücke von der Form

$$(16)\quad \eta_1 = u + u_1 J_1(s_1, f_1(s_1)) + u_2 J_2(s_2, f_2(s_2)) + \cdots + u_n J_n(s_n, f_n(s_n))$$

Integralelemente des Differentialgleichungsystemes (1) oder des reducirten sind.

Es sollen die dabei zur Geltung kommenden Untersuchungsmethoden an dem Falle erläutert werden, in welchem das Differentialgleichungsystem (1) ein aus zwei logarithmischen Functionen linear zusammengesetztes Integral von der Form

$$(17)\qquad \eta_1 = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2$$

besitzt, worin u, u_1, u_2, v_1, v_2 algebraische Functionen von

x sind, und worin die beiden logarithmischen Functionen nicht schon unter einander in einer linearen Beziehung mit algebraischen Coefficienten stehen. Dass ebenso der Fall einer homogenen linearen ganzzahligen Beziehung von der Form

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 = 0$$

auszuschliessen ist, leuchtet ein, da im entgegengesetzten Falle das Integral η_1 die Form annimmt

$$\eta_1 = u + u_1 \log \left(\frac{v_1}{v_2^{\frac{\mu_1}{\mu_2}}} \right),$$

also nur *einen* Logarithmus einer algebraischen Function einschliessen würde, und die Untersuchung sich dann, wie man leicht sehen wird, nach denselben Principien, nur in einfacherer Weise bewerkstelligen liesse.

Lassen wir x einen geschlossenen Umkreis von der Art beschreiben, dass alle Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ des Differentialgleichungsystems (1) ihre früheren Werthe wieder annehmen, so bleibt offenbar η_1, da es mit den zugehörigen Elementen in (1) eingesetzt diese Gleichungen identisch befriedigen musste, ein Integral des Differentialgleichungsystems, das wir mit

$$\eta_1 = \bar{u} + \bar{u}_1 \log \bar{v}_1 + \bar{u}_2 \log \bar{v}_2 \tag{18}$$

bezeichnen können, wenn $\bar{u}$, $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ die Werthe bedeuten, in welche u, u_1, u_2, v_1, v_2 bei jenem Umlaufe des x übergehen — gäbe es gar keine Umläufe, die mindestens die eine oder andere dieser Functionen ändern, so könnte schon jetzt geschlossen werden, dass u, u_1, u_2, v_1, v_2 rationale Functionen der Coefficienten des linearen Differentialgleichungsystemes sind — doch wird dies im Allgemeinen nicht der Fall sein.

Nach dem oben angeführten Satze ist klar, dass, wenn die Integrale des nicht reducirten Systems die Logarithmen in höheren Potenzen als in der ersten enthalten, das reducirte System ähnliche Integrale enthalten *muss;* aber es könnte dies auch stattfinden, wenn die Logarithmen in den Integralen des ersten Systemes nur linear vorkommen. *Wir machen nun die Annahme, dass das reducirte Differentialgleichungsystem*

*kein aus Logarithmen algebraischer Functionen linear zusammengesetztes Integral habe**); da nun die Differenz zweier Integralelemente des Systemes (1) ein Integralelement des reducirten Systemes liefert, so kann $\bar{\eta}_1 - \eta_1$ nur eine algebraische Function sein, die auch constant und Null werden darf, so dass sich aus (17) und (18)

$$(19)\quad \bar{u}_1 \log \bar{v}_1 - u_1 \log v_1 + \bar{u}_2 \log \bar{v}_2 - u_2 \log v_2 = w$$

ergiebt, worin w algebraisch von x abhängt. Die in I. 4. des vierten Kapitels angestellte Betrachtung über logarithmische Beziehungen liefert aus (19) die Relation

$$(20)\qquad \bar{k}_1 \bar{u}_1 - k_1 u_1 + \bar{k}_2 \bar{u}_2 - k_2 u_2 = 0,$$

worin k_1, $\bar{k}_1$, k_2, $\bar{k}_2$ ganze Zahlen sind, von denen wir $\bar{k}_2$ als von Null verschieden annehmen dürfen. Es folgt somit

$$(21)\qquad \bar{u}_2 = -\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\bar{u}_1 + \frac{k_1}{\bar{k}_2}u_1 + \frac{k_2}{\bar{k}_2}u_2,$$

und in Folge dessen aus (19)

$$\bar{u}_1 \log\left(\frac{\bar{v}_1^{\frac{1}{\bar{k}_1}}}{v_2^{\frac{1}{\bar{k}_2}}}\right) - u_1 \log\left(\frac{v_1^{\frac{1}{k_1}}}{\bar{v}_2^{\frac{1}{\bar{k}_2}}}\right) - u_2 \log\left(\frac{v_2^{\frac{1}{k_2}}}{\bar{v}_2^{\frac{1}{\bar{k}_2}}}\right) = w,$$

oder

$$(22)\quad \bar{u}_1 \log\left(\frac{\bar{v}_1^{\bar{k}_2}}{\bar{v}_2^{\bar{k}_1}}\right) - u_1 \log\left(\frac{v_1^{\bar{k}_2}}{\bar{v}_2^{k_1}}\right) - u_2 \log\left(\frac{v_2^{\bar{k}_2}}{\bar{v}_2^{k_2}}\right) = \bar{k}_2 w.$$

Wir behaupten nun, dass im Allgemeinen für einen Umlauf des x, welcher die Coefficienten des Differentialgleichungsystems (1) unverändert liesse und die Gleichung (17) in (18) überführte, aber einmal einen Verzweigungspunkt von u_1 umkreist, d. h. die Lösung u_1 der diese Function definirenden, mit Adjungirung jener Differentialgleichungscoefficienten irreductibeln Gleichung in eine andere überführt, der dritte Logarithmand der Gleichung (22) nicht constant sein kann. Denn wäre

---

*) In unserem Falle würde es genügen, die Beschränkung auf den Fall von vier linear verbundenen Logarithmen zu reduciren, von denen je zwei nur verschiedene Zweige derselben algebraischen Function darstellen, wie das Folgende lehren wird.

$$(23)\qquad \frac{v_2^{\bar{k}_2}}{\bar{v}_2^{k_2}} = c$$

eine constante Grösse, so bestünde zwischen ganzzahligen Potenzen von Lösungen einer irreductibeln Gleichung ein constantes Verhältniss, was offenbar*) nur der Fall sein kann, wenn $\bar{k}_2 = k_2$ oder $\bar{k}_2 = -k_2$ ist, d. h. nach (23)

$$(24)\qquad \bar{v}_2 = c_1 v_2 \quad \text{oder} \quad \bar{v}_2 v_2 = c_2,$$

also

$$(25)\quad \log \bar{v}_2 = \log v_2 + \log c_1 \quad \text{oder} \quad \log \bar{v}_2 = -\log v_2 + \log c_2$$

ist. Ferner würde sich aber dann aus (22) vermöge (23)

---

*) Wenn in einer irreductibeln Gleichung

$$u^\mu + f_1(x)\, u^{\mu-1} + \cdots + f_\mu = 0$$

zwei Lösungen u_1 und u_2 in der Beziehung

$$u_2^\varrho = k u_1^\sigma$$

zu einander stehen, worin k eine Constante bedeutet, so werden sich, wenn man x einen geschlossenen Weg beschreiben lässt, welcher successive u_1 in u_2, u_2 in u_3, ... $u_{\lambda-1}$ in u_λ, endlich u_λ in u_1 überführt, die Beziehungen ergeben

$$u_3^\varrho = k u_2^\sigma, \quad u_4^\varrho = k u_3^\sigma, \quad \cdots u_\lambda^\varrho = k u_{\lambda-1}^\sigma, \quad u_1^\varrho = k u_\lambda^\sigma,$$

wenn der Ausgangspunkt nicht ein mehrfacher Punkt der Function ist. Da nun aus diesen Beziehungen successive

$$u_1 = k^{\frac{1}{\varrho}} u_\lambda^{\frac{\sigma}{\varrho}} = k^{\frac{1}{\varrho}+\frac{\sigma}{\varrho_2}} u_{\lambda-1}^{\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)^2} = k^{\frac{1}{\varrho}+\frac{\sigma}{\varrho_2}+\frac{\sigma^2}{\varrho^3}} u_{\lambda-2}^{\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)^3} = \cdots$$

$$= k^{\frac{1}{\varrho}+\frac{\sigma}{\varrho_2}+\frac{\sigma^2}{\varrho^3}+\cdots+\frac{\sigma^{\lambda-1}}{\varrho^{\lambda-1}}} u_1^{\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)^\lambda},$$

also

$$u_1^{\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)^\lambda - 1} = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{\varrho}+\frac{\sigma}{\varrho^2}+\frac{\sigma^2}{\varrho^3}+\cdots+\frac{\sigma^{\lambda-1}}{\varrho^{\lambda-1}}}$$

folgt, so wäre entweder u_1 eine Constante — was mit der Annahme der Irreductibilität der Gleichung nicht vereinbar — oder es ist $\frac{\sigma}{\varrho} = \pm 1$, d. h.

$$\sigma = \varrho \quad \text{oder} \quad \sigma = -\varrho, \text{ wenn } \lambda \text{ eine gerade Zahl.}$$

$$(26)\qquad \bar u_1 \log\left(\frac{\bar v_1^{\bar k_2}}{\bar v_2^{\bar k_1}}\right) - u_1 \log\left(\frac{v_1^{k_2}}{v_2^{k_1}}\right) = W$$

ergeben, worin W algebraisch von x abhängt, und vermöge der logarithmischen Eigenschaften wieder

$$(27)\qquad \bar K_1 \bar u_1 - K_1 u_1 = 0,$$

worin $\bar K_1$ und K_1 ganze Zahlen bedeuten; ein rationales Verhältniss von u_1 und $\bar u_1$ erfordert aber bekanntlich, wie früher gezeigt worden, $\bar u_1 = u_1$ oder $\bar u_1 = -u_1$, was, wenn wir den gleich nachher zu berücksichtigenden Fall, dass jener Windungspunkt von u_1, den wir umkreisten, ein einfacher ist, ausschliessen, nicht stattfinden kann. Es müssen also auch die beiden ersten Logarithmanden der Gleichung (22) Constanten sein, also

$$(28)\qquad \frac{\bar v_1^{\bar k_2}}{\bar v_2^{\bar k_1}} = C' \quad \text{und} \quad \frac{v_1^{k_2}}{v_2^{k_1}} = C$$

oder

$$(29)\qquad \frac{\bar v_1^{k_1}}{v_1^{\bar k_1}} = K,$$

wo K wiederum constant, also auch $\bar k_1 = \pm k_1$, und somit

$$(30)\qquad \begin{array}{ll} \text{entweder} & \log \bar v_1 = \log v_1 + \log a_1 \\ \text{oder} & \log \bar v_1 = -\log v_1 + \log a_2, \end{array}$$

worin a_1 und a_2 constant sind. Es geht daher das zweite Integral (18) nach (25) und (30) in

$$(31)\qquad \bar\eta_1 = \bar U + \bar u_1 \log v_1 + \bar u_2 \log v_2$$

und die Differenz zwischen (17) und (31) nach (19) in

$$(32)\qquad (u_1 \pm \bar u_1) \log v_1 + (u_2 \pm \bar u_2) \log v_2 = w$$

über, so dass sich, da zwischen $\log v_1$ und $\log v_2$ keine lineare algebraische Beziehung bestehen durfte, $\bar u_1 = \pm u_1$, $\bar u_2 = \pm u_2$ ergiebt; schliessen wir nun wiederum den Fall aus, dass sich in dem betrachteten Verzweigungspunkte von u_1 nur zwei Zweige mit den entgegengesetzten Werthen vereinigen, so

folgt, dass, wenn man x um einen Windungspunkt von u_1 einen solchen geschlossenen Umlauf beschreiben lässt, dass die Coefficienten der Differentialgleichungen ihre Ausgangswerthe wieder annehmen, nothwendig, wenn jener Windungspunkt nicht ein einfacher mit entgegengesetzten Werthen der beiden Zweige ist, der dritte Logarithmand der Gleichung (22) variabel sein muss.

Nur dann war also der eben gemachte Schluss ungültig, wenn die Function u_1 entweder gar keine Verzweigungspunkte hätte, d. h. rational durch x und die Coefficienten der Differentialgleichungen $A_{\alpha\beta}$ ausdrückbar wäre, oder nur einfache Windungspunkte, in welchen sich entgegengesetzte Werthe der Function vereinigen; dann wäre aber, wie unmittelbar zu sehen, u_1^2 eine eindeutige Function von x und $A_{\alpha\beta}$ oder

$$u_1^2 = \omega(x, A_{\alpha\beta}), \tag{33}$$

worin ω eine rationale Function bedeutet; durch ganz analoge Schlüsse bestimmt sich die Grösse v_1 in gleich nachher anzugebender Form.

Ist aber nun der dritte Logarithmand der Gleichung (22) variabel, so behaupten wir, dass es auch der erste Logarithmand sein muss. Denn wäre dieser constant, so ergäbe sich aus (22) wieder die ganzzahlige Beziehung

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 = 0, \tag{34}$$

welche von vornherein ausgeschlossen war, und es liefert daher die Gleichung (22) die Beziehung

$$\bar{l}_1 \bar{u}_1 - l_1 u_1 - l_2 u_2 = 0, \tag{35}$$

worin wir l_2, also in Folge der eben gemachten Bemerkung auch $\bar{l}_1$ von Null verschieden annehmen dürfen. Stellt man (20) mit (35) zusammen, so ergiebt sich

$$\bar{u}_1 = \varrho_1 u_1 + \varrho_2 u_2, \quad \bar{u}_2 = \sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2, \tag{36}$$

worin ϱ_1, ϱ_2, σ_1, σ_2 rationale Zahlen bedeuten.

Lassen wir nun die Variable x noch einmal denselben Umlauf machen, so werden sich die den Gleichungen (36) entsprechenden Beziehungen ergeben

$$\bar{u}_1 = \varrho_1' u_1 + \varrho_2' u_2, \quad \bar{u}_2 = \sigma_1' u_1 + \sigma_2' u_2 \tag{37}$$

und aus (36) und (37)

$$\bar{u}_1 = m_1' u_1 + m_1 u_1, \quad \bar{u}_2 = m_2' u_2 + m_2 u_2, \tag{38}$$

worin m_1, m_1', m_2, m_2' rationale Zahlen bedeuten; es hat somit u_1 — und dasselbe können wir von u_2 aussagen — die Eigenschaft, dass in der dasselbe definirenden, mit Adjungirung von x, $A_{\alpha\beta}$ irreductibeln Gleichung in jedem ihrer mehr als einfachen Windungspunkte je drei Lösungen, welche auf einander folgende Elemente je eines Cyclus sind, zu einander in homogener linearer Relation mit rationalen Coefficienten stehen.

Nachdem nun die Beschaffenheit der Functionen u_1 und u_2 festgestellt worden, sollen jetzt die Eigenschaften der Logarithmanden v_1 und v_2 ermittelt werden. Denken wir uns in dem Integralausdrucke

$$\eta_1 = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 \tag{39}$$

die Functionen u, v_1, v_2 als Lösungen von mit Adjungirung von x, $A_{\alpha\beta}$, u_1 und u_2 irreductibeln Gleichungen und bilden eine algebraische Function t, durch welche sich u, v_1, v_2 rational ausdrücken lassen und welche selbst die Lösung einer mit Adjungirung von x, $A_{\alpha\beta}$, u_1, u_2 irreductibeln Gleichung ist; dann werden, wenn die t-Gleichung nicht linear ist, offenbar zwei der Lösungen dieser Gleichung die Integrale liefern η_1 und

$$\eta_2 = \bar{u} + u_1 \log \bar{v}_1 + u_2 \log \bar{v}_2, \tag{40}$$

woraus wieder der oben für das reducirte System gemachten Annahme zufolge

$$\bar{u} - u + u_1 \log \frac{\bar{v}_1}{v_1} + u_2 \log \frac{\bar{v}_2}{v_2} = w \tag{41}$$

sich ergiebt, worin w eine algebraische Function bedeutet.

Aus der Gleichung (41) folgt aber nach wiederholt angestellten Betrachtungen, dass entweder $\frac{\bar{v}_1}{v_1}$ und $\frac{\bar{v}_2}{v_2}$ Constanten sein müssen, oder dass zwischen u_1 und u_2 eine homogene lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten bestehe;

nun war aber diese letzte Annahme von vornherein auszuschliessen, und die erstere Annahme führt nach früheren Auseinandersetzungen, da die constanten Verhältnisse $\frac{\bar{v}_1}{v_1}$, $\frac{\bar{v}_2}{v_2}$ der Eigenschaften irreductibler Gleichungen gemäss Einheitswurzeln sein müssen, auf die Beschaffenheit der v-Gleichungen, nur ganze Potenzen einer ganzzahligen Potenz v^μ zu enthalten, wenn jene Einheitswurzel eine μ^{te} war; setzt man daher

$$(42) \qquad v_1^{\mu_1} = V_1, \quad v_2^{\mu_2} = V_2,$$

so wird das Integral in

$$(43) \qquad \eta_1 = u + \frac{u_1}{\mu_1} \log V_1 + \frac{u_2}{\mu_2} \log V_2$$

übergehen, worin V_1 und V_2 durch mit Adjungirung von x, $A_{\alpha\beta}$, u_1, u_2 irreductible Gleichungen und zwar von *niederem* Grade definirt sind, als es v_1 resp. v_2 waren. Legt man nunmehr die Form des Integrales (43) zu Grunde und verfährt mit diesem gerade so, wie mit dem vorgelegten, so kann man durch Fortsetzung dieser Operation das Integral auf die Form reduciren

$$(44) \qquad \eta_1 = u + \frac{u_1}{M_1} \log W_1 + \frac{u_2}{M_2} \log W_2,$$

worin M_1, M_2 ganze Zahlen, und W_1, W_2 Auflösungen zweier linearer Gleichungen, also rational durch x, $A_{\alpha\beta}$, u_1, u_2 ausdrückbar sind.

Fassen wir nun die im Laufe dieser Untersuchung gefundenen Resultate zusammen, so ergiebt sich der folgende Satz:

Wenn das lineare nicht homogene Differentialgleichungsystem (1) *ein aus x und zwei Logarithmen algebraischer Functionen linear zusammengesetztes, mit algebraischen Coefficienten versehenes Integralelement besitzt, und das zugehörige reducirte System besitzt kein ähnlich gestaltetes, aus denselben Logarithmen und den Logarithmen anderer algebraischer Zweige linear zusammengesetztes Integral, so werden in der Integralform*

$$\eta_1 = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2$$

entweder u_1, u_2, v_1, v_2 *sämmtlich rationale Functionen der Coefficienten* $A_{\alpha\beta}$ *des Differentialgleichungssystems sein,*

oder es sind u_1 *und* v_1 *rationale Functionen der Coefficienten, während* u_2 *und* v_2 *irreductibeln quadratischen Gleichungen von der Form*

$$(45)\qquad u_2^2 = \omega_2(x, A_{\alpha\beta}), \quad v_2^2 - 2\Omega_2(x, A_{\alpha\beta})v_2 + c = 0$$

genügen, worin c *eine Constante und* ω_2, Ω_2 *rationale Functionen von der Art bedeuten, dass*

$$(46)\qquad \frac{\sqrt{\Omega_2(x, A_{\alpha\beta})^2 - c}}{\sqrt{\omega_2(x, A_{\alpha\beta})}} = F(x, A_{\alpha\beta}),$$

worin F *eine rationale Function vorstellt,*

oder endlich — und dies ist der allgemeine Fall, in welchem auch die früheren enthalten sind — es genügen u_1, u_2 *mit Adjungirung von* x *und* $A_{\alpha\beta}$ *irreductibeln algebraischen Gleichungen von der Art, dass um jeden Verzweigungspunkt derselben zwischen drei Elementen eines Cyclus ein homogener linearer Zusammenhang*

$$(47)\qquad c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 = 0$$

besteht, in welchem c_1, c_2, c_3 *ganze Zahlen bedeuten, während* v_1 *und* v_2 *sich mit Hülfe der Coefficienten des Differentialgleichungssystems rational durch* u_1 *und* u_2, *welche bekanntlich in allen Fällen algebraische Integrale des reducirten Differentialgleichungssystems sind, ausdrücken lassen.*

Wie aus der Form des Beweises hervorgeht, ist der Satz unmittelbar auf eine beliebige Anzahl linear in das Integral eintretender Logarithmen übertragbar.

VII. Ueber die Integrationsmethoden durch bestimmte Integrale für lineare Differentialgleichungssysteme mit variabeln Coefficienten.

Bevor wir zu der wichtigsten, gleichmässig auf alle Differentialgleichungssysteme anwendbaren Integrationsmethode mit Hülfe unendlicher Reihen übergehen, wollen wir noch eine häufig verwerthete Integrationsmethode durch bestimmte

Integrale an zwei umfassenderen linearen Differentialgleichungsystemen entwickeln.

1. Sei das lineare homogene Differentialgleichungsystem vorgelegt

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = A_{n-1\,1}y_1 + A_{n-1\,2}y_2 + \cdots + A_{n-1\,n}y_n \\ (a+bx)\dfrac{dy_n}{dx} = (a_1+b_1x)y_1 + (a_2+b_2x)y_2 + \cdots + (a_n+b_nx)y_n, \end{cases}$$

in welchem die Grössen $A_{\alpha\beta}$, a, b, a_1, b_1, ... a_n, b_n Constanten bedeuten, so versuche man dasselbe durch das Integralsystem zu befriedigen

$$(2)\qquad y_1 = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}U_1 V du, \quad y_2 = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}U_2 V du, \ \ldots$$

$$y_n = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}U_n V du,$$

worin

$$(3)\quad \begin{cases} U_1 = \alpha_{10} + \alpha_{11}u + \alpha_{12}u^2 + \cdots + \alpha_{1\,n-1}u^{n-1} \\ U_2 = \alpha_{20} + \alpha_{21}u + \alpha_{22}u^2 + \cdots + \alpha_{2\,n-1}u^{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_n = \alpha_{n0} + \alpha_{n1}u + \alpha_{n2}u^2 + \cdots + \alpha_{n\,n-1}u^{n-1}, \end{cases}$$

α_{10}, α_{11}, ... α_{nn-1}, u_1, u_2 zu bestimmende Constanten sind und V eine passend zu wählende Function von u bedeutet.

Setzt man diese Werthe zur Bestimmung der angegebenen Grössen zunächst in die $n-1$ ersten Differentialgleichungen des Systemes (1) ein, so ergeben sich die zu befriedigenden Gleichungen in der Form

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{u_1}^{u_2}\Big\{u[\alpha_{10}+\alpha_{11}u+\cdots+\alpha_{1\,n-1}u^{n-1}] \\ \qquad -A_{11}[\alpha_{10}+\alpha_{11}u+\cdots+\alpha_{1\,n-1}u^{n-1}]-\cdots \\ \qquad -A_{1n}[\alpha_{n0}+\alpha_{n1}u+\cdots+\alpha_{n\,n-1}u^{n-1}]\Big\}e^{ux}V\,du=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \displaystyle\int_{u_1}^{u_2}\Big\{u[\alpha_{n-1\,0}+\alpha_{n-1\,1}u+\cdots+\alpha_{n-1\,n-1}u^{n-1}] \\ \qquad -A_{n-1\,1}[\alpha_{10}+\alpha_{11}u+\cdots+\alpha_{1\,n-1}u^{n-1}]-\cdots \\ \qquad -A_{n-1\,n}[\alpha_{n0}+\alpha_{n1}u+\cdots+\alpha_{n\,n-1}u^{n-1}]\Big\}e^{ux}V\,du=0, \end{array}\right.$$

und diesen $n-1$ Gleichungen kann dadurch genügt werden, dass man unter den einzelnen Quadraturen die ganzen Functionen n^{ten} Grades von u, welche die Multiplicatoren von $e^{ux}V$ bilden, identisch verschwinden lässt; man sieht sogleich, dass jede der Gleichungen (4) als Coefficienten der einzelnen u-Potenzen, welche gleich Null gemacht werden sollen, $n+1$ in den α-Grössen lineare homogene Gleichungen liefert, somit im Ganzen $(n+1)(n-1)=n^2-1$ solcher Gleichungen in den n^2 Grössen $\alpha_{\lambda\mu}$ und *dass somit bis auf einen gemeinsamen unbestimmten Factor die Grössen* $\alpha_{\lambda\mu}$, *also auch*

$$U_1,\ U_2,\ \ldots\ U_n$$

hieraus bestimmt sind.

Wenn diese nun die bezeichneten Werthe haben, so handelt es sich nur noch darum, u_1, u_2 als Constanten und V als Function von u derart zu bestimmen, dass der letzten Gleichung (1) Genüge geschieht. Setzt man nun die Werthe (2) in diese Gleichung ein, so folgt

$$(5)\quad \int_{u_1}^{u_2}(a+bx)ue^{ux}U_nV\,du=A_{n1}\int_{u_1}^{u_2}(a_1+b_1x)e^{ux}U_1V\,du+\cdots$$
$$+A_{nn}\int_{u_1}^{u_2}(a_n+b_nx)e^{ux}U_nV\,du$$

oder

$$(6)\qquad \int_{u_1}^{u_2}(W_0+W_1x)e^{ux}V\,du=0,$$

wenn

$$(7)\quad \begin{cases} au\,U_n - A_{n1}a_1U_1 - A_{n2}a_2U_2 - \cdots - A_{nn}a_nU_n = W_0 \\ bu\,U_n - A_{n1}\,b_1U_1 - A_{n2}b_2U_2 - \cdots - A_{nn}b_nU_n = W_1 \end{cases}$$

gesetzt wird, und worin W_0 und W_1 bekannte ganze Functionen n^{ten} Grades von u sind.

Da aber

$$(8)\quad \int_{u_1}^{u_2} xe^{ux}.\,W_1V\,du = [e^{ux}.\,W_1V]_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\frac{d(W_1V)}{du}\,du$$

ist, so ergiebt sich aus (6)

$$(9)\quad [e^{ux}.\,W_1V]_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2}\left(W_0V - \frac{d(W_1V)}{du}\right)e^{ux}\,du = 0,$$

und diese Gleichung wird man in folgender Weise erfüllen können. Wir bestimmen zunächst die unbekannte Function V von U durch die Gleichung

$$(10)\quad W_0V - \frac{d(W_1V)}{du} = 0$$

oder

$$(11)\quad \frac{d(W_1V)}{W_1V} = \frac{W_0}{W_1}\,du,$$

woraus sich

$$(12)\quad V = \frac{c}{W_1}\,e^{\int \frac{W_0}{W_1}du}$$

ergiebt, worin c eine willkürliche Constante bedeutet. *Setzt man nun den so ermittelten Werth von V in die eckige Klammer der Gleichung* (9) *ein, so hat man nur, um diese Gleichung identisch zu erfüllen, u_1 und u_2 als numerische Werthe so zu bestimmen, dass für dieselben der Gleichung*

$$(13)\quad e^{ux + \int \frac{W_0}{W_1}du} = 0$$

Genüge geschieht; gelingt dies, so ist nach (2) *ein particuläres Integralsystem gefunden.*

2. Eine zweite häufig zum Resultat führende Methode mag an dem folgenden Falle erläutert werden.

Sei das Differentialgleichungssystem gegeben

$$(14)\quad \frac{dy_1}{dx} = y_2\,,\quad \frac{dy_2}{dx} = y_3\,,\quad \cdots \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n\,,\quad \frac{dy_n}{dx} = x^m y_1\,,$$

und werde dieses verglichen mit dem Systeme

$$(15)\quad \frac{dz_1}{dx} = z_2\,,\quad \frac{dz_2}{dx} = z_3\,,\quad \cdots \frac{dz_n}{dx} = z_{n+1}\,,\quad \frac{dz_{n+1}}{dx} = x^{m-1} z_1\,,$$

so wird behauptet, dass man aus einem Integrale des zweiten Systems stets ein Integral des ersten herleiten kann. Denn sei

$$(16)\qquad z_1 = \psi(x)$$

ein Integralelement von (15), so erweitere man, indem man

$$x^m y_1 = y_{n+1}\,,\quad \text{also}\quad \frac{dy_{n+1}}{dx} = m x^{m-1} y_1 + x^m \frac{dy_1}{dx}$$
$$= m x^{m-1} y_1 + x^m y_2$$

setzt, das System n^{ter} Klasse (14) zu dem folgenden $n+1^{\text{ter}}$ Klasse:

$$(17)\quad \frac{dy_1}{dx} = y_2\,,\quad \frac{dy_2}{dx} = y_3\,,\quad \cdots \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n\,,\quad \frac{dy_n}{dx} = y_{n+1}\,,$$
$$\frac{dy_{n+1}}{dx} = m x^{m-1} y_1 + x^m y_2\,,$$

und es wird behauptet, dass

$$(18)\qquad y_1 = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)\,du$$

ein Integralelement von (17) ist. Es folgt nämlich aus (17)

$$y_2 = \int_0^\infty u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi'(ux)\,du$$

$$y_3 = \int_0^\infty u^{m+1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi''(ux)\,du$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{n+1} = \int_0^\infty u^{m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(n)}(ux)\,du\,,$$

und diese Werthe, in die letzte der Gleichungen (17) eingesetzt, liefern als zu befriedigende Gleichung

$$(19)\quad \int_0^\infty u^{m+n} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(n+1)}(ux)\, du = \int_0^\infty m x^{m-1} u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)\, du$$

$$+ \int_0^\infty x^m u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi'(ux)\, du.$$

Da aber vermöge (15) und (16)

$$(20)\qquad \psi^{(n+1)}(x) = x^{m-1}\psi(x),$$

also auch

$$(21)\qquad \psi^{(n+1)}(ux) = u^{m-1} x^{m-1} \psi(ux)$$

ist, so geht (19) in

$$\int_0^\infty u^{2m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)\, du = m \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)\, du$$

$$+ \int_0^\infty x u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi'(ux)\, du$$

über, und ist somit, weil vermöge partieller Integration

$$\int_0^\infty u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} . x\psi'(ux)\, du = \Big[u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)\Big]_0^\infty$$

$$- \int_0^\infty \psi(ux) \frac{d\left[u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}}\right]}{du}\, du$$

oder

$$\int_0^x u^m e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} x\psi'(ux)\,du = -m\int_0^x u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)\,du$$

$$+\int_0^x u^{2m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux)\,du$$

wird, identisch befriedigt. War nun $\psi(x)$ das allgemeine Integralelement z_1 des Differentialgleichungsystemes (15), besitzt dieses also $n+1$ willkürliche Constanten, so wird auch der Ausdruck (18) $n+1$ willkürliche Constanten enthalten und somit ein allgemeines Integralelement des Differentialgleichungsystems (17) sein. Da aber aus der letzten Gleichung (17)

$$\frac{dy_{n+1}}{dx} = mx^{m-1} y_1 + x^m \frac{dy_1}{dx} = \frac{d(x^m y_1)}{dx},$$

also

$$y_{n+1} = x^m y_1 + c \tag{22}$$

folgt, so wird das System (17) auch ersetzt werden können durch

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \quad \cdots \frac{dy_n}{dx} = x^m y_1 + c, \tag{23}$$

und man sieht somit, dass der oben in (18) gefundene Werth von y_1 auch ein Integralelement unseres vorgelegten Differentialgleichungsystems (14) ist, wenn nur die $n+1$ in ihm vorkommenden willkürlichen Constanten der Bedingung unterworfen werden, dass

$$\frac{dy_n}{dx} = \int_0^x u^{m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(n)}(ux)\,du$$

für $x = 0$ verschwindet, da dann die letzte der Gleichungen (23) in

$$\frac{dy_n}{dx} = x^m y_1$$

d. h. in die letzte der Gleichungen des Systems (14) übergeht.

Wir erhalten somit das folgende Resultat:

Kennt man von dem Systeme von Differentialgleichungen

$$\frac{dz_1}{dx} = z_2, \quad \frac{dz_2}{dx} = z_3, \quad \ldots \frac{dz_n}{dx} = z_{n+1}, \quad \frac{dz_{n+1}}{dx} = x^{m-1} z_1$$

ein allgemeines Integralelement mit $n+1$ willkürlichen Constanten

$$z_1 = \psi(x, c_1, c_2, \ldots c_{n+1}),$$

so erhält man das allgemeine Integralelement y_1 des Differentialgleichungsystems

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \quad \ldots \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \quad \frac{dy_n}{dx} = x^m y_1$$

durch den Ausdruck

$$y_1 = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(ux, c_1, c_2, \ldots c_{n+1})\, du,$$

wenn die Constanten $c_1, c_2, \ldots c_{n+1}$ der Bedingung unterworfen werden, dass

$$\left[\int_0^\infty u^{m+n-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi^{(n)}(ux, c_1, c_2, \ldots c_{n+1})\, du\right]_{x=0} = 0$$

ist.

VIII. Ueber die Methoden der Integration beliebiger Differentialgleichungssysteme durch unendliche Reihen.

1. Den Gegenstand dieses letzten Abschnittes des vorliegenden Kapitels soll eine Integrationsmethode bilden, welche von allen speciellen Eigenschaften der vorgelegten Differentialgleichungen absehend gleichmässig auf beliebige Differentialgleichungsysteme anwendbar ist und mit Nothwendigkeit auf die Untersuchungen der folgenden Kapitel hinweist, welche erst die Mittel liefern werden, um die hier nur an

bestimmten Fällen erläuterte und durchgeführte Methode zu einer allgemeinen umzugestalten und somit das Problem der Integration beliebiger Differentialgleichungsysteme in dem angegebenen Sinne zu lösen.

Im dritten Abschnitte des ersten Kapitels war gezeigt worden, dass ein Differentialgleichungsystem beliebiger Klasse in der Umgebung eines nicht singulären Punktes ξ Elemente eines simultanen Integralsystems besitzt, welche sich in Form convergenter, nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von $x - \xi$ fortschreitender Reihen darstellen lassen; setzt man somit diese Reihen mit unbestimmten Coefficienten an, führt dieselben in die Differentialgleichungen ein und bestimmt diese Coefficienten durch Gleichsetzen der Coefficienten gleich hoher Potenzen von $x - \xi$ in den so entstehenden Gleichungen, so werden die Integrale gefunden sein, indem man entweder das Bildungsgesetz der Coefficienten aus diesen Bestimmungsgleichungen zu entnehmen im Stande ist, oder die Coefficienten der Reihe so weit berechnet, als man dieselben zur annäherungsweisen Darstellung der Integrale des Differentialgleichungsystems braucht — in allen Fällen, und das ist wesentlich, braucht man die Convergenz der so entstehenden Reihen nach dem oben erwähnten Satze von der Existenz der Integrale um nicht singuläre Punkte herum nicht weiter zu untersuchen. Handelt es sich jedoch um singuläre Punkte der unabhängigen Variabeln, dann werden erst die folgenden Kapitel über die Natur der Integrale in deren Umgebung Aufschluss geben, und dann auch bei der Anwendung der Methode durch Reihen, deren Form dort näher bestimmt werden wird, die Convergenzuntersuchungen unnöthig machen; für die Untersuchungen des vorliegenden Abschnittes jedoch muss der Sinn der Reihen, welche die Integrale der Differentialgleichungen um singuläre Punkte herum formal darstellen, erst noch näher geprüft werden.

2. Wir wollen, um das Wesen dieser Methode deutlich zu machen, auf die für gewisse specielle Annahmen schon oben integrirte *Riccati*'sche Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m \tag{1}$$

zurückkommen und die allgemeinen Integrale derselben feststellen suchen, können jedoch statt dieser gleich eine etwas allgemeinere Differentialgleichung zu Grunde legen, die wir noch später brauchen werden.

Zunächst mag allgemein bemerkt werden, dass jede Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} + f(x) + \varphi(x)y + \psi(x)y^2 = 0 \tag{2}$$

durch die Substitution

$$y = \frac{1}{\psi(x)} \frac{d \log u}{dx}, \tag{3}$$

wie unmittelbar zu sehen, auf die homogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\varphi(x) - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)\frac{du}{dx} + f(x)\,\psi(x)u = 0 \tag{4}$$

überführbar ist*), und dass somit die *Riccati*'sche Differentialgleichung durch die Substitution

---

*) Es soll an dieser Stelle noch hervorgehoben werden, dass aus (3), wenn u_1 und u_2 zwei Fundamentalintegrale von (4) bedeuten, die entsprechenden Integrale y_1 und y_2 von (2) durch die Gleichungen bestimmt sind

$$y_1 = \frac{1}{\psi(x)} \frac{\frac{du_1}{dx}}{u_1}, \quad y_2 = \frac{1}{\psi(x)} \frac{\frac{du_2}{dx}}{u_2}, \tag{α}$$

und dass das allgemeine Integral gegeben ist durch

$$y = \frac{1}{\psi(x)} \frac{c_1 \frac{du_1}{dx} + c_2 \frac{du_2}{dx}}{c_1 u_1 + c_2 u_2} = \frac{1}{\psi(x)} \frac{\frac{du_1}{dx} + c\frac{du_2}{dx}}{u_1 + c u_2}, \tag{β}$$

worin c_1, c_2, c willkürliche Constanten bedeuten. Wählt man nun noch einen bestimmten Werth c_3 für c und bezeichnet das entsprechende Integral mit y_3, so folgt aus (β)

$$y_3 = \frac{1}{\psi(x)} \frac{\frac{du_1}{dx} + c_3 \frac{du_2}{dx}}{u_1 + c_3 u_2}, \tag{γ}$$

und aus (γ) und (β) mit Benutzung von (α)

$$y = \frac{c_3 y_1 (y_2 - y_3) + c\, y_2 (y_3 - y_1)}{c_3 (y_2 - y_3) + c\,(y_3 - y_1)}; \tag{δ}$$

es ist somit *das allgemeine Integral der Differentialgleichung* (2) *eine rationale gebrochene Function zweiten Grades von drei particulären Integralen und einer willkürlichen Constanten.*

(5) $$y = \frac{1}{a}\frac{d \log u}{dx}$$

in

(6) $$\frac{d^2u}{dx^2} = abx^m u$$

transformirt wird; setzt man noch hierin

(7) $$x^{\frac{m}{2}+1} = \frac{\frac{m}{2}+1}{\sqrt{ab}}\, z,$$

so geht (6) in

(8) $$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{m}{m+2}\frac{1}{z}\frac{du}{dz} - u = 0$$

über, und diese wird offenbar integrirt sein, wenn wir das Problem der Integration für die Differentialgleichung

(9) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{m}{x}\frac{dy}{dx} + ny = 0$$

behandeln können, die wir der folgenden Untersuchung zu Grunde legen.

Da nach den oben gegebenen Kriterien offenbar nur der Punkt $x = 0$ ein singulärer Punkt sein kann, so wird um jeden anderen Punkt ξ herum, für jede beliebige Feststellung der endlichen Werthe η und η_1 von y und $\frac{dy}{dx}$ in diesem Punkte, y sich nach positiven, steigenden ganzen Potenzen von $x - \xi$ entwickeln lassen, und die Coefficienten dieser *Taylor*'schen Entwicklung würden durch successive Differentiation der Gleichung (9) ermittelt werden können. Wollen wir jedoch die um $x = 0$ herum gültigen Integrale ermitteln, so müssen wir, da wir die Art der Singularitäten erst später feststellen werden, zunächst eine hypothetisch angenommene Reihe für das Integral aufstellen, der Differentialgleichung mit dieser formal zu genügen suchen und dann die Gültigkeit dieser Reihe prüfen. Sei also

(10) $$y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + \cdots,$$

worin α sowie die Coefficienten noch unbestimmt sind, so ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx} = \alpha A_0 x^{\alpha-1} + (\alpha+1) A_1 x^\alpha + (\alpha+2) A_2 x^{\alpha+1} + \cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha(\alpha-1) A_0 x^{\alpha-2} + (\alpha+1)\alpha A_1 x^{\alpha-1} + (\alpha+2)(\alpha+1) A_2 x^\alpha + \cdots,$$

so dass durch Einsetzen in die Differentialgleichung identisch für alle x die Beziehung zu befriedigen ist

$$[\alpha(\alpha-1) A_0 + \alpha m A_0] x^{\alpha-2} + [(\alpha+1)\alpha A_1 + m(\alpha+1) A_1] x^{\alpha-1}$$
$$+ [(\alpha+2)(\alpha+1) A_2 + m(\alpha+2) A_2 + n A_0] x^\alpha$$
$$+ [(\alpha+3)(\alpha+2) A_3 + m(\alpha+3) A_3 + n A_1] x^{\alpha+1} + \cdots = 0;$$

setzt man die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x gleich Null, so erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$(11)\quad \alpha(\alpha-1) A_0 + \alpha m A_0 = 0 \text{ oder } A_0 \alpha(\alpha-1+m) = 0$$
$$(12)\quad (\alpha+1)\alpha A_1 + m(\alpha+1) A_1 = 0 \text{ oder } A_1(\alpha+1)(\alpha+m) = 0$$
$$(13)\quad (\alpha+k)(\alpha+k-1) A_k + m(\alpha+k) A_k + n A_{k-2} = 0 \text{ für } k > 1.$$

Aus der Gleichung (11) folgt, da A_0 von Null verschieden angenommen werden darf,

$$(14)\qquad \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 1 - m.$$

Nehmen wir

I. $\alpha = 0$,

so wird, wie man unmittelbar aus (12) und (13) erkennt,

$$(15)\qquad A_1 = A_3 = A_5 = \cdots = A_{2r+1} = 0$$

$$(16)\qquad A_{2r} = \frac{(-1)^r \left(\frac{n}{2}\right)^r}{1 \cdot 2 \cdots r(m+1)(m+3)\cdots(m+2r-1)} A_0,$$

und es folgt somit nach (10) *als ein Integralausdruck*

$$(17)\qquad y = A_0 \left[1 - \frac{\frac{n}{2} x^2}{1.(m+1)} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 x^4}{1.2.(m+1)(m+3)} - \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^3 x^6}{1.2.3(m+1)(m+3)(m+5)} + \cdots\right];$$

man sieht sofort bei Anwendung des *Cauchy*'schen Kriteriums, dass

$$\lim_{r=\infty} \frac{u_{r+1}}{u_r} = \frac{n}{2} x \lim_{r=\infty} \frac{1}{(r+1)(m+2r+1)} = 0$$

für jedes x, die Reihe also convergent ist in der ganzen x-Ebene — nur in dem einen Falle würde sie divergent, *wenn m eine negative ungerade Zahl ist,* weil dann die Glieder derselben unendlich würden — schliessen wir also diesen Fall aus, so wäre, wenn die obige unendliche Reihe mit $\varphi(x)$ bezeichnet wird, ein particuläres Integral in der Form

$$(18) \qquad y = \varphi(x)$$

gefunden.

Sei

II. $\alpha = 1 - m$,

so folgt aus den Gleichungen (12) und (13)

$$(19) \qquad A_1 = A_3 = A_5 = \cdots = A_{2r+1} = 0 ,$$

$$(20) \quad A_{2r} = \frac{(-1)^r \left(\frac{n}{2}\right)^r}{1 \cdot 2 \ldots r(-m+3)(-m+5)\ldots(-m+2r+1)} A_0 ,$$

und somit nach (10) *der Integralausdruck*

$$(21) \quad y = A_0 x^{-m} \left[x - \frac{\left(\frac{n}{2}\right) x^3}{1(-m+3)} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 x^5}{1 \cdot 2 \cdot (-m+3)(-m+5)} - \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^3 x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3(-m+3)(-m+5)(-m+7)} + \cdots \right],$$

und diese Reihe wäre wieder, wie man durch Anwendung des *Cauchy*'schen Kriteriums sieht, in der ganzen x-Ebene convergent, ausser *wenn m eine positive ungerade Zahl ist,* so dass, wenn wir diesen Fall ausnehmen und die obige Reihe mit $\psi(x)$ bezeichnen,

$$(22) \qquad y = \psi(x)$$

ein zweites particuläres Integral wäre, das *nur, wenn $m = 1$ ist, mit dem ersten particulären Integrale $\varphi(x)$ zusammenfallen würde.*

Von dem Falle also abgesehen, in welchem m überhaupt

eine ungerade Zahl ist, haben wir das allgemeine Integral der Differentialgleichung (9) *in der Form gefunden*

$$y = c_1 \varphi(x) + c_2 \psi(x), \tag{23}$$

worin c_1 und c_2 willkürliche Constanten bedeuten.

Ist jedoch m eine ungerade Zahl, und zwar eine positive — ist sie eine negative, so sind in der folgenden Deduction nur $\varphi(x)$ mit $\psi(x)$ zu vertauschen — so würde jedenfalls das particuläre Integral

$$y = \varphi(x)$$

bekannt sein, und wir wollen nun mit Hülfe einer für alle linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f_1(x) \frac{dy}{dx} + f_2(x) y = 0 \tag{24}$$

gültigen Bemerkung ein zweites Fundamentalintegral der Differentialgleichung (9) herleiten; da nämlich, wenn y_1 und y_2 zwei Fundamentalintegrale der Differentialgleichung (24) bezeichnen, nach früheren Formeln

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = c e^{-\int f_1(x)\, dx}$$

oder

$$y_1^2 \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} = c e^{-\int f_1(x)\, dx}$$

ist, worin c eine von Null verschiedene Constante bedeutet, so folgt

$$y_2 = c y_1 \int \frac{dx}{y_1^2 e^{\int f_1(x)\, dx}}, \tag{25}$$

und somit in unserem Falle, da

$$f_1(x) = \frac{m}{x} \quad \text{also} \quad e^{\int f_1(x)\, dx} = x^m$$

ist, *das zweite particuläre Integral* in der Form

$$y_2 = C \varphi(x) \int \frac{dx}{x^m \varphi(x)^2},$$

wenn C eine willkürliche Constante bedeutet, so dass

$$(26) \qquad y = C_1 \varphi(x) + C_2 \varphi(x) \int \frac{dx}{x^m \varphi(x)^2},$$

wenn m eine positive ungerade Zahl bedeutet, das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung liefert.

Wollte man das für den Fall eines ungeraden positiven m gefundene zweite particuläre Integral

$$(27) \qquad y_2 = \varphi(x) \int \frac{dx}{x^m \varphi(x)^2}$$

um den Nullpunkt herum in eine Reihe entwickeln, so erhielte man, wenn

$$(28) \qquad m = 2\mu + 1$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{x^{2\mu+1}\varphi(x)^2} = x^{-2\mu-1} \frac{1}{\left(1 - \frac{\frac{n}{2} x^2}{1 \cdot (m+1)} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 x^4}{1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+3)} - \cdots\right)^2}$$

$$= x^{-2\mu-1}\{1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots\},$$

und somit durch Integration

$$(29) \int \frac{dx}{x^{2\mu+1}\varphi(x)^2} = a_\mu \log x + \frac{1}{-2\mu} x^{-2\mu} + \frac{a_1}{-2\mu+2} x^{-2\mu+2} + \cdots$$

und daher durch Multiplication dieser Reihe mit der Reihe für $\varphi(x)$ *die um den Nullpunkt herum gültige Entwicklung des zu $\varphi(x)$ gehörigen Fundamentalintegrales in der Form*

$$(30) \; y_2 = a_\mu \log x \cdot \left\{1 - \frac{\frac{n}{2} x^2}{1 \cdot (m+1)} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 x^4}{1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+3)} - \cdots\right\}$$
$$+ A_0 x^{-2\mu} + A_2 x^{-2\mu+2} + \cdots,$$

eine Form der Entwicklung, wie sie sich später als eine nothwendige in der Umgebung singulärer Punkte darstellen wird.

3. Da im vorigen Abschnitte nur zwei Klassen von Differentialgleichungssystemen hervorgehoben wurden, deren Auflösungen sich durch bestimmte Integrale darstellen liessen, so wollen wir die verallgemeinerte *Riccati*'sche lineare Diffe-

rentialgleichung 2ter Ordnung (9) dazu benutzen, um zu zeigen, in welcher Weise man bei der Darstellung der Integrale in der bezeichneten Form zu verfahren hat.

Da vermöge der Cosinus-Reihe

$$\cos(\alpha \cos\omega) = 1 - \frac{\alpha^2}{2!}\cos^2\omega + \frac{\alpha^4}{4!}\cos^4\omega - \cdots,$$

also

$$\int_0^\pi \cos(\alpha\cos\omega)\sin^{m-1}\omega\, d\omega = \int_0^\pi \sin^{m-1}\omega\, d\omega$$

$$-\frac{\alpha^2}{2!}\int_0^\pi \cos^2\omega \sin^{m-1}\omega\, d\omega + \frac{\alpha^4}{4!}\int_0^\pi \cos^4\omega\sin^{m-1}\omega\, d\omega - \cdots$$

ist, die Elemente der Theorie der bestimmten Integrale aber für $\mu > -1$

$$\int_0^\pi \cos^{2s}\omega \sin^\mu\omega\, d\omega = \frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{(\mu+2)(\mu+4)\ldots(\mu+2s)}\int_0^\pi \sin^\mu\omega\, d\omega$$

liefern, so ergiebt sich, wenn zugleich

$$\alpha = x\sqrt{n}$$

gesetzt wird, durch Substitution der Integralwerthe unmittelbar für $m>0$

$$\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\sin^{m-1}\omega\, d\omega$$

$$= \int_0^\pi \sin^{m-1}\omega\, d\omega\left[1 - \frac{\frac{n}{2}x^2}{1.(m+1)} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 x^4}{1.2.(m+1)(m+3)} - \cdots\right]$$

oder nach (17) und (18) mit Einführung des ersten Fundamentalintegrales der Differentialgleichung (9)

$$\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\,.\cos\omega)\sin^{m-1}\omega\, d\omega = \varphi(x)\int_0^\pi \sin^{m-1}\omega\, d\omega,$$

und somit, da der Factor von $\varphi(x)$ eine Constante ist,

$$y_1 = \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \, . \cos\omega) \sin^{m-1}\omega \, d\omega$$

selbst ein Fundamentalintegral der Differentialgleichung.

Da sich nun nach (21) und (22) das zugehörige zweite Fundamentalintegral in die Form setzen lässt

$$\psi(x) = x^{1-m}\left(1 - \frac{\frac{n}{2} x^2}{1.(-m+3)} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 x^4}{1.2.(-m+3)(-m+5)} - \cdots\right),$$

also aus $\varphi(x)$ unmittelbar hervorgeht, indem man den Factor x^{1-m} absondert und dann überall $-m+2$ statt m setzt, so folgt sogleich für das zweite Fundamentalintegral der Ausdruck

$$y_2 = x^{1-m}\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \, . \cos\omega) \sin^{1-m}\omega \, d\omega,$$

wenn $-m+2 > 0$ oder $m < 2$.

Erfüllt m somit die Ungleichheit

$$0 < m < 2,$$

und ist von der Einheit verschieden, da sonst y_2 und y_1 zusammenfallen, so können wir das dem Nullpunkt zugehörige allgemeine Integral der Differentialgleichung (9) durch bestimmte Integrale in der Form darstellen

$$y = C_1 \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos\omega) \sin^{m-1}\omega \, d\omega$$
$$+ C_2 x^{1-m} \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos\omega) \sin^{1-m}\omega \, d\omega$$

oder

$$y = \int_0^\pi \frac{\cos(x\sqrt{n} \cdot \cos\omega)}{\sin^{m-1}\omega}\left[C_1 \sin^{2m-2}\omega + C_2 x^{1-m}\right] d\omega,$$

wenn C_1 und C_2 willkürliche Constanten bedeuten; ausserhalb der Grenzen 0 und 2 für die Zahl m ist nur eines der Fundamentalintegrale in der angegebenen Weise durch diese bestimmten Integrale darstellbar. Liegt m an den Grenzen selbst, so wird,

wenn $m = 0$,
die Differentialgleichung lauten

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ny = 0$$

und, wie man unmittelbar sieht, das allgemeine Integral

$$y = C_1 \sin x\sqrt{n} + C_2 \cos x\sqrt{n}$$

besitzen, und
wenn $m = 2$,
so geht die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + ny = 0$$

durch die Substitution

$$y = \frac{u}{x}$$

in

$$\frac{d^2u}{dx^2} + nu = 0$$

über, ist somit auf $m = 0$ zurückgeführt, und es lautet daher ihr allgemeines Integral

$$y = C_1 \frac{\sin x\sqrt{n}}{x} + C_2 \frac{\cos x\sqrt{n}}{x}.$$

4. Es soll noch eine, in ihren charakteristischen Eigenschaften von der *Riccati*'schen wesentlich verschiedene und in den Anwendungen sehr wichtige *Differentialgleichung, nämlich die der Kugelfunctionen oder die Legendre'sche Differentialgleichung*

$$(31) \qquad (1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

durch Aufsuchung der unendlichen Reihen, welche derselben genügen, integrirt werden.

Da, wie aus dem Anblick der Differentialgleichung unmittelbar sich ergiebt, nur $x = +1$ und $x = -1$ singuläre Punkte sind, so werden um jeden Punkt ξ herum, diese beiden Werthe ausgenommen, zwei Fundamentalintegrale existiren, die sich nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x - \xi$ entwickeln lassen.

Um zuerst die beiden dem Nullpunkte zugehörigen eindeutigen Fundamentalintegrale zu entwickeln, setze man

$$(32)\qquad y = A_0 x^{\alpha} + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + \cdots,$$

woraus sich wieder

$$\frac{dy}{dx} = \alpha A_0 x^{\alpha-1} + (\alpha+1) A_1 x^{\alpha} + (\alpha+2) A_2 x^{\alpha+1} + \cdots$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha(\alpha-1) A_0 x^{\alpha-2} + (\alpha+1)\,\alpha A_1 x^{\alpha-1} + (\alpha+2)(\alpha+1) A_2 x^{\alpha} + \cdots$$

und durch Einsetzen in die Differentialgleichung die Bestimmungsgleichungen

$$(33)\qquad \alpha(\alpha-1) = 0$$

$$(34)\qquad A_1 = A_3 = \cdots = A_{2\nu+1} = 0$$

$$(35)\qquad A_{2\nu+2} = -\frac{(n-\alpha-2\nu)(n+\alpha+2\nu+1)}{(\alpha+2\nu+1)(\alpha+2\nu+2)} A_{2\nu}$$

ergeben. Setzt man nun der Gleichung (33) entsprechend der Reihe nach $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$, so erhält man *für die beiden Fundamentalintegrale die nothwendig convergenten Reihenentwicklungen*

$$(36)\qquad y_1 = 1 - \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} x^4 - \frac{n(n-2)(n-4)(n+1)(n+3)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} x^6 + \cdots$$

$$(37)\qquad y_2 = x - \frac{(n-1)(n+2)}{2\cdot 3} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} x^5 - \cdots,$$

und man erkennt durch Anwendung des *Cauchy*'schen Kriteriums sofort, dass der Convergenzbereich dieser Reihen der um den Nullpunkt gelegte Einheitskreis ist; *das allgemeine Integral um den Punkt $x = 0$ herum hat somit die Form*

$$(38)\qquad y = a_1 y_1 + a_2 y_2.$$

Ist n eine ganze Zahl, und zwar eine positive gerade oder eine negative ungerade, so ist y_1 eine ganze Function und y_2 eine unendliche Reihe; ist dagegen n eine negative gerade oder positive ungerade Zahl, so wird y_1 eine unendliche Potenzreihe und y_2 eine ganze Function darstellen,

und es ist selbstverständlich, dass der Ausdruck für das particuläre Integral, welches sich als ganze Function um den Nullpunkt darstellt, ein in der ganzen Ebene gültiger bleibt; man bezeichnet *für positive ganzzahlige n diese Integrale, welche ganze Functionen von x sind*, mit

$$(39)\qquad P^{(n)}(x) = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}$$

$$\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right),$$

und nennt sie die n^{te} *Kugelfunction.*

Gehen wir nun wieder zur Differentialgleichung (31) zurück und suchen die um einen der singulären Punkte $x = \pm 1$ gültigen particulären Fundamentalintegrale, deren Form wir a priori in einem späteren Kapitel bestimmen lernen werden, für die wir hier aber nur eine Reihe hypothetisch ansetzen können, deren Convergenz nachher zu prüfen sein wird.

Setzt man

$$(40)\qquad x - 1 = t,$$

so geht die Differentialgleichung (31) in

$$(41)\qquad t(t+2)\frac{d^2y}{dt^2} + 2(t+1)\frac{dy}{dt} - n(n+1)y = 0$$

über, und setzt man jetzt

$$(42)\qquad y = A_0 t^\alpha + A_1 t^{\alpha+1} + A_2 t^{\alpha+2} + \cdots$$

$$(43)\qquad \frac{dy}{dt} = \alpha A_0 t^{\alpha-1} + (\alpha+1)A_1 t^\alpha + (\alpha+2)A_2 t^{\alpha+1} + \cdots$$

$$(44)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \alpha(\alpha-1)A_0 t^{\alpha-2} + (\alpha+1)\alpha A_1 t^{\alpha-1} + (\alpha+2)(\alpha+1)A_2 t^\alpha + \cdots,$$

so liefern diese Ausdrücke in (41) substituirt die Bestimmungsgleichungen

$$(45)\qquad \alpha^2 = 0,\quad A_\nu = \frac{(n-\nu+1)(n+\nu)}{2\nu^2}A_{\nu-1},$$

und somit eines der particulären Integrale von (41) in der Umgebung von $t = 0$ in der Form

$$(46)\quad y_1 = 1 + \frac{n(n+1)}{2\,.\,1^2}\,t + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{2^2\,.\,1^2\,.\,2^2}\,t^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)(n+2)(n+3)}{2^3\,.\,1^2\,.\,2^2\,.\,3^2}\,t^3 + \cdots,$$

welche Reihe, wie das *Cauchy*'sche Kriterium wieder sofort zeigt, zum Convergenzbereich den um $t = 0$ mit dem Radius 2 gelegten Kreis besitzt; es lautet somit vermöge der Substitution (40) *das eine zu* $x = 1$ *gehörige particuläre Integral der Differentialgleichung* (31)

$$(47)\quad y_1 = 1 + \frac{n(n+1)}{2\,.\,1^2}(x-1) + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{2^2\,.\,1^2\,.\,2^2}(x-1)^2 + \cdots,$$

und diese Reihe ist convergent innerhalb eines um $x = 1$ mit dem Radius 2 beschriebenen Kreises, der also durch den anderen singulären Punkt -1 geht.

Um das zweite zu y_1 um $x = 1$ gehörige Fundamentalintegral zu finden, wende man wieder die Beziehung (25) an, vermöge welcher sich in unserem Falle, weil

$$f_1(x) = -\frac{2x}{1-x^2},$$

also

$$e^{\int f_1(x)\,dx} = x^2 - 1$$

ist,

$$(48)\quad y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2\,(x^2-1)}$$

ergiebt, und beachtet man, dass

$$(49)\quad x^2 - 1 = 2(x-1) + (x-1)^2,$$

so folgt durch Zusammenstellung von (49) mit (47) *für das zweite zu* y_1 *gehörige Fundamentalintegral um* $x = 1$ *die Entwicklung*

$$(50)\quad y_2 = \frac{1}{2}\,y_1 \log(x-1) + a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots,$$

also eine der Form (30) des Integrales der *Riccati*'schen Gleichung ganz ähnliche Form. Genau so würden sich die um $x = -1$ gültigen Fundamentalintegrale darstellen, wenn nur $x - 1$ überall durch $x + 1$ ersetzt wird.

Es soll nun endlich noch untersucht werden, ob wir für die Differentialgleichung (31) in unendlich grossen Räumen

gültige Fundamentalintegrale aufstellen können, welche aus der Ebene durch Ausschliessung eines endlichen um den Nullpunkt gelegten Kreises entstehen. Man sieht unmittelbar, dass diese Forderung nichts anderes bedeutet, als für die beiden Fundamentalintegrale Reihenentwicklungen aufzustellen, welche in einem um den Unendlichkeitspunkt gelegten Kreise gültig sind, d. h. Entwicklungen für dieselben zu finden, die nach fallenden Potenzen von x fortschreiten. Setzen wir deshalb

$$(51)\quad y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha-1} + A_2 x^{\alpha-2} + \cdots$$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha A_0 x^{\alpha-1} + (\alpha-1) A_1 x^{\alpha-2} + (\alpha-2) A_2 x^{\alpha-3} + \cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha(\alpha-1) A_0 x^{\alpha-2} + (\alpha-1)(\alpha-2) A_1 x^{\alpha-3} + (\alpha-2)(\alpha-3) A_2 x^{\alpha-4} + \cdots,$$

so ergeben sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung (31) die Bestimmungsgleichungen

$$(52)\qquad \alpha(\alpha+1) = n(n+1)$$

$$(53)\qquad A_1 = A_3 = \cdots = A_{2k+1} = 0$$

$$(54)\qquad A_{2k} = \frac{(\alpha-2k+2)(\alpha-2k+1)}{(\alpha-2k-n)(\alpha-2k+n+1)} A_{2k-2};$$

setzt man nun der Gleichung (52) gemäss

1) $\alpha = n$,

so erhält man

$$A_{2k} = \frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{-2k(2n-2k+1)} A_{2k-2},$$

und somit *das particuläre Integral*

$$(55)\quad y_1 = x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \,.\, 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \cdots,$$

welches nach dem bekannten Kriterium für alle ausserhalb des um Nullpunkt beschriebenen Einheitskreises gelegenen Punkte der Ebene convergirt, das aber, wenn n eine positive ganze Zahl ist, eine ganze Function wird, und sich von $P^{(n)}(x)$ nur um einen constanten Factor unterscheidet.

Ist

2) $\alpha = -n-1$,

so ergiebt sich aus (54)

$$A_{2k} = \frac{(n+2k-1)(n+2k)}{(2n+2k+1)\,2k} A_{2k-2},$$

und somit *das zweite Fundamentalintegral*

$$(56) \qquad y_2 = x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-n-3} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)} x^{-n-5} + \cdots,$$

welches wieder, wie man sogleich sieht, für alle Punkte der Ebene convergent ist, welche ausserhalb des um den Nullpunkt beschriebenen Einheitskreises gelegen sind, und das für negative ganzzahlige n offenbar in eine ganze Function übergeht. Man führt für *positive ganzzahlige Werthe von n* die unendliche Reihe

$$(57) \quad Q^{(n)}(x) = \frac{1.2\ldots n}{1.3\ldots(2n+1)}\left(x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-n-3} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)} x^{-n-5} + \cdots\right)$$

ein, und nennt *diese die n^{te} Kugelfunction zweiter Art, während $P^{(n)}(x)$ als n^{te} Kugelfunction erster Art bezeichnet wird.*

Ist $2n$ eine ungerade positive Zahl, so sieht man, dass die Reihe (55) divergent ist, da von einer bestimmten Grenze an alle Glieder unendlich gross werden, während dann y_2 convergent bleibt, und das Umgekehrte tritt ein, wenn $2n$ eine ungerade negative Zahl ist. *Sei das erstere der Fall*, so liefert wieder die Beziehung (48)

$$(58) \qquad y_1 = y_2 \int \frac{dx}{y_2^2(x^2-1)},$$

und da in der Umgebung von $x = \infty$, d. h. nach fallenden Potenzen von x entwickelt,

$$(59) \quad \frac{1}{y_2^2(x^2-1)} = \frac{1}{x^{-2n-2}\left(1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-2} + \cdots\right)^2 x^2(1-x^{-2})} = x^{2n}\{1 + a_1 x^{-2} + a_2 x^{-4} + \cdots\},$$

so wird, wenn

$$(60)\qquad 2n = 2\nu + 1$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{y_2^2(x^2-1)} = a_{\nu+1}\, x^{-1} + x^{2\nu+1} + a_1\, x^{2\nu-1} + \cdots,$$

also durch Integration

$$\int \frac{dx}{y_2^2(x^2-1)} = a_{\nu+1} \log x + A_0\, x^{2\nu+2} + A_1\, x^{2\nu} + \cdots,$$

und somit nach (58) *das erste Fundamentalintegral in der Form*

$$(61)\qquad y_1 = a_{\nu+1}\, y_2 \log x + A_0 x^{\nu+\frac{1}{2}} + B_1\, x^{\nu-\frac{3}{2}} + \cdots$$

oder

$$(62)\qquad y_1 = a_{n+\frac{1}{2}}\, y_2 \log x + A_0\, x^n + B_1\, x^{n-2} + \cdots,$$

und ähnlich gestaltet sich der Ausdruck des zweiten Fundamentalintegrals durch das erste, wenn n eine ungerade negative Zahl ist, ausgenommen, wenn $2n = -1$ ist, in welchem Fall y_2 noch ein convergenter Integralausdruck bliebe. Aber, *wenn* $2n = -1$ *ist*, dann fallen, wie man aus (55) und (56) unmittelbar sieht, y_1 und y_2 zusammen und zwar *in den Integralausdruck*

$$(63)\qquad y_1 = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2^2}\, x^{-\frac{5}{2}} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{2^2\,.\,4^2}\, x^{-\frac{9}{2}} + \cdots;$$

das zweite particuläre Integral wird man wieder nach (48) in der Form erhalten

$$(64)\qquad y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2(x^2-1)},$$

und somit, da nach fallenden Potenzen von x entwickelt

$$\frac{1}{y_1^2(x^2-1)} = \frac{1}{x^{-1}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2^2}\, x^{-2} + \cdots\right)^2 x^2(1-x^{-2})}$$
$$= x^{-1}(1 + a_1\, x^{-2} + a_2\, x^{-4} + \cdots),$$

also integrirt

$$\int \frac{dx}{y_1^{\,2}(x^2 - 1)} = \log x + A_1 x^{-2} + A_2 x^{-4} + \cdots$$

ist, als Ausdruck für das *zugehörige zweite Fundamentalintegral*

$$(65) \qquad y_2 = y_1 \log x + B_1 x^{-\frac{5}{2}} + B_2 x^{-\frac{9}{2}} + \cdots.$$

5. Endlich mag noch eine dritte, ebenfalls in den Anwendungen häufig vorkommende Differentialgleichung

$$(66) \qquad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

erwähnt werden, welche die *Bessel*'sche genannt wird. Da es uns in dem vorliegenden Abschnitte nicht um die Eigenschaften, sondern nur um die Entwicklungsformen der Integrale zu thun ist, so wird diese Aufgabe gelöst sein, wenn wir zeigen können, dass wir durch eine einfache algebraische Substitution die *Bessel*'sche Differentialgleichung auf die verallgemeinerte *Riccati*'sche Differentialgleichung (9) zurückführen können; setzt man nämlich

$$(67) \qquad y = x^{\nu} z,$$

so sieht man unmittelbar, dass die Differentialgleichung (66) in

$$(68) \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \frac{dz}{dx} + z = 0$$

übergeht, und somit für

$$(69) \qquad m = 2\nu + 1, \quad n = 1$$

mit der Differentialgleichung (9) zusammenfällt.

6. In den bisher betrachteten Fällen ergaben sich im Wesentlichen nur solche Reihenentwicklungen für die Integrale algebraischer Differentialgleichungen, welche nach positiven ganzen Potenzen von $x - \xi$ fortschreiten oder auch nach positiven ganzen fallenden Potenzen von x, wenn die Integrale in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes entwickelt werden sollten; man kann jedoch auch häufig in zweckmässiger Weise Entwicklungen für die Integrale von Differentialgleichungen aufstellen, welche nach Potenzen von anderen Functionen von x als ganzen linearen fortschreiten und deshalb auch andere Convergenzbereiche besitzen, als Kreise, die um die betrachteten Punkte gelegt sind.

Sei z. B. wieder die vorher behandelte Differentialgleichung der Kugelfunctionen vorgelegt

$$(70)\qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0,$$

und setzt man

$$(71)\qquad x^2-1=\varrho^2,$$

so geht wegen

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\varrho}\frac{d\varrho}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{d\varrho^2}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)^2+\frac{dy}{d\varrho}\frac{d^2\varrho}{dx^2}$$

vermöge (71) die Differentialgleichung (70) in

$$(72)\quad \varrho(\varrho^2+1)\frac{d^2y}{d\varrho^2}+(2\varrho^2+1)\frac{dy}{d\varrho}-n(n+1)\varrho y=0$$

über, und diese Differentialgleichung hat für $\varrho=0$ einen singulären Punkt; es soll die Entwicklung der Fundamentalintegrale von (72) um diesen Punkt herum untersucht werden. Setzen wir

$$(73)\qquad y=A_0\varrho^\alpha+A_1\varrho^{\alpha+1}+A_2\varrho^{\alpha+2}+\cdots,$$

also

$$\frac{dy}{d\varrho}=\alpha A_0\varrho^{\alpha-1}+(\alpha+1)A_1\varrho^\alpha+(\alpha+2)A_2\varrho^{\alpha+1}+\cdots$$

$$\frac{d^2y}{d\varrho^2}=\alpha(\alpha-1)A_0\varrho^{\alpha-2}+(\alpha+1)\alpha A_1\varrho^{\alpha-1}$$
$$+(\alpha+2)(\alpha+1)A_2\varrho^\alpha+\cdots,$$

so ergeben sich durch Einsetzen dieser Werthe in (72) die Bestimmungsgleichungen

$$(74)\qquad \alpha=0,\quad A_1=A_3=\cdots=A_{2\nu+1}=0,$$

$$(75)\qquad A_{2\nu+2}=-\frac{(n-2\nu)(n+2\nu+1)}{(2\nu+1)(2\nu+2)}A_{2\nu},$$

so dass hieraus nur *ein* particuläres Integral und zwar in Form der Reihe

$$(76)\ y_1=1-\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\varrho^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\varrho^4-\cdots$$

folgt, welche, wie unmittelbar zu sehen, zum Convergenzbereich den um den Nullpunkt der ϱ-Ebene gelegten Ein-

heitskreis hat. Um das zugehörige zweite Fundamentalintegral zu finden, benutze man den Ausdruck (25), der in unserem Falle in

$$(77)\qquad y_2 = y_1 \int \frac{d\varrho}{y_1^2\, e^{\int \frac{2\varrho^2+1}{\varrho(\varrho^2+1)} d\varrho}}$$

übergeht; nun ist aber

$$\int \frac{2\varrho^2+1}{\varrho(\varrho^2+1)} d\varrho = \int \frac{3\varrho^2+1}{\varrho^3+\varrho} d\varrho - \int \frac{\varrho\, d\varrho}{\varrho^2+1}$$

$$= \log(\varrho^3+\varrho) - \frac{1}{2}\log(\varrho^2+1) = \log \varrho\sqrt{\varrho^2+1}$$

und somit nach (77)

$$(78)\qquad y_2 = y_1 \int \frac{d\varrho}{y_1^2 \varrho \sqrt{\varrho^2+1}},$$

und daher in der Umgebung des Nullpunktes von ϱ nach (76)

$$\frac{1}{y_1^2 \varrho\sqrt{\varrho^2+1}} = \varrho^{-1}\cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{n(n+1)}{1.2}\varrho^2 + \cdots\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2}\varrho^2 + \cdots\right)}$$

$$= \varrho^{-1}(1 + a_2\varrho^2 + a_4\varrho^4 + \cdots),$$

woraus

$$(79)\qquad \int \frac{d\varrho}{y_1^2\varrho\sqrt{\varrho^2+1}} = \log\varrho + A_2\varrho^2 + A_4\varrho^4 + \cdots$$

folgt, so dass das zweite Fundamentalintegral die Form annimmt

$$(80)\qquad y_2 = y_1 \log\varrho + B_2\varrho^2 + B_4\varrho^4 + \cdots.$$

Setzt man nun die beiden Fundamentalintegrale wieder vermöge (71) in die ursprüngliche unabhängige Variable x um, so ergeben sich die convergenten Formen

$$(81)\quad y_1 = 1 - \frac{n(n+1)}{1.2}(x^2-1) + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1.2.3.4}(x^2-1)^2 - \cdots$$

und

$$(82)\quad y_2 = \frac{1}{2} y_1 \log(x^2-1) + B_2(x^2-1) + B_4(x^2-1)^2 + \cdots,$$

und es erübrigt nur noch, den Convergenzbereich der Reihe (81) in der x-Ebene festzustellen. Da aber die Reihe (76) für alle ϱ convergent war, deren Modul < 1, so wird (81) vermöge (71) für alle diejenigen x convergent sein, für welche

$$(83) \qquad \operatorname{mod}(x^2 - 1) < 1$$

ist; nun ist aber $\operatorname{mod}(x - 1)$ die Entfernung des complexen Punktes x von dem positiven Einheitspunkte, und $\operatorname{mod}(x + 1)$ die Entfernung desselben x-Punktes vom negativen Einheitspunkte, es werden daher alle Punkte derjenigen Curve, welche die x-Werthe einschliesst, die der Ungleichheit (83) genügen, das constante Product 1 der Entfernungen von dem positiven und negativen Einheitspunkte haben, somit eine Lemniscate bilden, für welche der Nullpunkt ein Doppelpunkt ist — *die Reihe* (81) *hat somit diese Lemniscate zum Convergenzbereich des ersten Fundamentalintegrales.*

Wir werden in den nächsten beiden Kapiteln die Entwicklungsformen der Integrale algebraischer Differentialgleichungsysteme in der Umgebung singulärer Punkte, welche sich in den betrachteten Beispielen nur in specieller Gestalt ergaben, ganz allgemein behandeln und vermöge der Theorie der ähnlichen Abbildung beliebiger ebener Räume auf einander die Convergenzbereiche der Integrale discutiren können.

Fünftes Kapitel.

Untersuchung der Eigenschaften der Integrale algebraischer Differentialgleichungssysteme in der Umgebung eines beliebigen Werthes der unabhängigen Variabeln.

I. Untersuchung der Eigenschaften der Integrale beliebiger algebraischer Differentialgleichungssysteme in der Umgebung singulärer Punkte, die nicht Verzweigungspunkte sind.

1. Es war im ersten Kapitel gezeigt worden, dass das System von Differentialgleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_1}{dx} = G_1(x, t_1, y_1, \cdots y_m) \\ \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_2}{dx} = G_2(x, t_1, y_1, \cdots y_m) \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots y_m)}{\partial t_1} \dfrac{dy_m}{dx} = G_m(x, t_1, y_1, \cdots y_m), \end{cases}$$

worin $G_1, G_2, \dots G_m$ ganze Functionen der eingeschlossenen Grössen, und t_1 eine Lösung der mit Adjungirung von x, $y_1, \dots y_m$ algebraisch irreductibeln Gleichung

$$(2)\qquad G(x, t, y_1, \dots y_m) = 0$$

oder

$$(3)\qquad g_0(x, y_1, \dots y_m) t^\nu + g_1(x, y_1, \dots y_m) t^{\nu-1} + \cdots + g_\nu(x, y_1, \dots y_m) = 0$$

ist*), in der Umgebung des Punktes $x = \xi$ ein Integralsystem $y_1, \ldots y_m$ besitzt, welches für $x = \xi$ die willkürlich festgesetzten Werthe $\eta_1, \ldots \eta_m$ annimmt und sich nach positiven ganzen steigenden Potenzen von $x - \xi$ in der Form entwickeln lässt

$$(4) \qquad \begin{cases} y_1 = \eta_1 + \alpha_1(x - \xi) + \alpha_2(x - \xi)^2 + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_m = \eta_m + \mu_1(x - \xi) + \mu_2(x - \xi)^2 + \cdots, \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass der dem Werthecomplex $\xi, \eta_1, \ldots \eta_m$ entsprechende Werth τ_1 der Lösung t_1 der Gleichung (2) nicht unendlich gross ist, was stets der Fall sein wird, wenn

$$g_0(\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m)$$

von Null verschieden ist, und ebendiese Gleichung für das angegebene Werthesystem nicht gleiche Lösungen für t_1 liefert, d. h. der Werth τ_1 des Zweiges t_1 der Gleichung

$$(5) \qquad G(\xi, t_1, \eta_1, \ldots \eta_m) = 0$$

nicht zugleich auch eine Lösung der Gleichung

$$(6) \qquad \frac{\partial G(\xi, t_1, \eta_1, \ldots \eta_m)}{\partial t_1} = 0$$

ist.

Betrachten wir jetzt ein Werthesystem $\xi, \eta_1, \ldots \eta_m$, für welches die in Frage kommende Lösung τ_1 der Gleichung (2) unendlich gross sein soll und nur diese eine, so dass

$$(7) \qquad g_0(\xi, \eta_1, \ldots \eta_m) = 0$$

ist, aber $g_1(\xi, \eta_1, \ldots \eta_m)$ von Null verschieden, so mache man die Substitution

$$(8) \qquad t = \frac{1}{u},$$

dann wird nach (2) und (3)

*) und auf die Form (1) liess sich jedes algebraische Differentialgleichungsystem bringen.

$$(9)\qquad G(x, t, y_1, \dots y_m) = g_0(x, y_1, \dots y_m)\frac{1}{u^\nu}$$
$$+ g_1(x, y_1, \dots y_m)\frac{1}{u^{\nu-1}} + \dots + g_\nu(x, y_1, \dots y_m)$$
$$= u^{-\nu}[g_0(x, y_1, \dots y_m) + g_1(x, y_1, \dots y_m)u + \dots$$
$$+ g_\nu(x, y_1, \dots y_m)u^\nu],$$

oder, wenn

$$(10)\qquad g_0(x, y_1, \dots y_m) + g_1(x, y_1, \dots y_m)u + \dots$$
$$+ g_\nu(x, y_1, \dots y_m)u^\nu = \mathfrak{G}(x, u, y_1, \dots y_m)$$

gesetzt wird,

$$(11)\qquad G(x, t, y_1, \dots y_m) = u^{-\nu}\,\mathfrak{G}(x, u, y_1, \dots y_m).$$

Die Werthe von t, welche

$$(12)\qquad G(x, t, y_1, \dots y_m) = 0$$

befriedigen, werden durch reciproke Substitution die Werthe von u geben, welche

$$(13)\qquad \mathfrak{G}(x, u, y_1, \dots y_m) = 0$$

machen, und dem einfachen Werthe $\tau_1 = \infty$ für $\xi, \eta_1, \dots \eta_m$ wird, weil $g_0(\xi, \eta_1, \dots \eta_m) = 0$, nach (10) der einfache Werth $v_1 = 0$ von u_1 entsprechen; ferner folgt wegen

$$\frac{du}{dt} = -u^2$$

aus (11)

$$(14)\qquad \frac{\partial G(x, t, y_1, \dots y_m)}{\partial t} = -u^{-\nu+2}\frac{\partial \mathfrak{G}(x, u, y_1 \dots y_m)}{\partial u}$$
$$+ \nu u^{-\nu+1}\mathfrak{G}(x, u, y_1, \dots y_m),$$

oder für eine Lösung t_1 der Gleichung (12), also eine Lösung u_1 der Gleichung (13)

$$(15)\qquad \frac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots y_m)}{\partial t_1} = -u_1^{-\nu+2}\frac{\partial \mathfrak{G}(x, u_1, y_1, \dots y_m)}{\partial u_1}.$$

Beachtet man ferner, dass $G_\alpha(x, t_1, y_1, \dots y_m)$ eine ganze Function der eingeschlossenen Grössen war, welche man vermöge der Gleichung (2) als vom $\nu - 1^{\text{ten}}$ Grade in Bezug auf t_1 betrachten durfte, so wird

$$(16)\quad u_1^{\nu-1} G_\alpha\left(x, \frac{1}{u_1}, y_1, \ldots y_m\right) = -\mathfrak{G}_\alpha(x, u_1, y_1, \ldots y_m)$$

eine ganze Function von $x, y_1, \ldots y_m$ und u_1 und zwar in letzterer Variabeln vom $\nu - 1^{\text{ten}}$ Grade sein, und es werden somit die Differentialgleichungen (1) in die folgenden übergehen:

$$(17)\quad \begin{cases} u_1 \dfrac{\partial \mathfrak{G}(x, u_1, y_1, \ldots y_m)}{\partial u_1} \dfrac{dy_1}{dx} = \mathfrak{G}_1(x, u_1, y_1, \cdots y_m) \\ u_1 \dfrac{\partial \mathfrak{G}(x, u_1, y_1, \ldots y_m)}{\partial u_1} \dfrac{dy_2}{dx} = \mathfrak{G}_2(x, u_1, y_1, \cdots y_m) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_1 \dfrac{\partial \mathfrak{G}(x, u_1, y_1, \ldots y_m)}{\partial u_1} \dfrac{dy_m}{dx} = \mathfrak{G}_m(x, u_1, y_1, \cdots y_m), \end{cases}$$

worin der dem Werthesystem $\xi, \eta_1, \ldots \eta_m$ entsprechende Werth v_1 der Lösung u_1 der Gleichung (13) gleich Null und eine einfache Lösung dieser Gleichung ist. Daraus folgt aber, dass, weil aus der Gleichung (13) nach früheren Auseinandersetzungen

$$\begin{aligned}(18)\quad u_1 = {} & a_0(x-\xi) + a_1(y_1 - \eta_1) + \cdots + a_m(y_m - \eta_m) \\ & + a_{00}(x-\xi)^2 + a_{11}(y_1-\eta_1)^2 + \cdots + a_{mm}(y_m - \eta_m)^2 \\ & + a_{01}(x-\xi)(y_1-\eta_1) + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

hervorgeht, durch Einsetzen dieses Werthes von u_1 in

$$\mathfrak{G}_\alpha(x, u_1, y_1, \cdots y_m) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{G}(x, u_1, y_1, \ldots y_m)}{\partial u_1}$$

sich

$$(19)\quad \frac{\mathfrak{G}_\alpha(x, u_1, y_1, \ldots y_m)}{\dfrac{\partial \mathfrak{G}(x, u_1, y_1, \ldots y_m)}{\partial u_1}} = \frac{A_\alpha + \mathfrak{R}_\alpha(x-\xi, y_1-\eta_1, \ldots y_m - \eta_m)}{a + r(x-\xi, y_1 - \eta_1, \ldots y_m - \eta_m)}$$

ergiebt, worin $\mathfrak{R}_\alpha$ und r nach positiven, steigenden ganzen Potenzen der eingeschlossenen Grössen fortschreitende Reihen ohne constante Glieder, und A_α sowie a Constanten sind, von denen der Annahme nach die letztere von Null verschieden sein muss, da

$$(20) \qquad u = \left(\frac{\partial\, \mathfrak{G}(x, u_1, y_1, \ldots y_m)}{\partial u_1}\right)_{\xi, 0, \eta_1, \ldots \eta_m}$$

ist, und die Gleichung (13) die Lösung $r_1 = 0$ nur einfach haben sollte. Dann lässt sich aber der Ausdruck (19) in der Umgebung von ξ, $\eta_1, \ldots \eta_m$ in eine nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x - \xi$, $y_1 - \eta_1, \ldots y_m - \eta_m$ fortschreitende convergente Reihe entwickeln, und es können daher in diesen Bereichen die Differentialgleichungen (17) ersetzt werden durch

$$(21) \qquad \begin{cases} u_1 \dfrac{dy_1}{dx} = r_1(x - \xi, y_1 - \eta_1, \ldots y_m - \eta_m) \\ u_1 \dfrac{dy_2}{dx} = r_2(x - \xi, y_1 - \eta_1, \ldots y_m - \eta_m) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_1 \dfrac{dy_m}{dx} = r_m(x - \xi, y_1 - \eta_1, \ldots y_m - \eta_m), \end{cases}$$

worin die Reihen $r_1, r_2, \ldots r_m$ im Allgemeinen auch constante Glieder enthalten können, und u_1 durch (18) gegeben ist, oder, wenn

$$(22) \qquad u_1 = r_0(x - \xi, y_1 - \eta_1, \ldots y_m - \eta_m)$$

gesetzt wird, *worin die Reihe r_0 kein constantes Glied enthält*, durch

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{r_1(x - \xi, y_1 - \eta_1, \ldots y_m - \eta_m)}{r_0(x - \xi, y_1 - \eta_1, \ldots y_m - \eta_m)} \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{r_2(x - \xi, y_1 - \eta_1, \ldots y_m - \eta_m)}{r_0(x - \xi, y_1 - \eta_1, \ldots y_m - \eta_m)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dy_m}{dx} = \dfrac{r_m(x - \xi, y_1 - \eta_1, \ldots y_m - \eta_m)}{r_0(x - \xi, y_1 - \eta_1, \ldots y_m - \eta_m)}; \end{cases}$$

wir finden somit,

dass, wenn für die Werthcombination $x = \xi$, $y_1 = \eta_1$, $\ldots y_m = \eta_m$ die Gleichung $G(x, t, y_1, \ldots y_m) = 0$ für t_1 die einfache Lösung $\tau_1 = \infty$ liefert, also der Coefficient der höchsten t-Potenz und nicht auch der nächstfolgende verschwindet,

das Differentialgleichungsystem (1) *sich durch das System* (23) *in der Umgebung der betrachteten Werthe ersetzen lässt.*

2. Es würde sich jetzt darum handeln, aus der Form der Differentialgleichungen (23) zu schliessen, wie $y_1, \dots y_m$ in der Umgebung von $x = \xi$ beschaffen sind, wenn sie für diesen Werth der Variabeln die Werthe $\eta_1, \dots \eta_m$ annehmen sollen; wir wollen aber zunächst noch einen anderen Fall der Differentialgleichungen (1) auf dieselbe Form (23) zurückführen. Betrachten wir nämlich jetzt ein Werthesystem ξ, $\eta_1, \dots \eta_m$, welches einerseits für die Lösung t_1 der Gleichung (2) einen Werth τ_1 liefert, der zugleich die nach t_1 genommene Ableitungsgleichung (6) befriedigt, also eine mehrfache Lösung der Gleichung (2) ist, andererseits so beschaffen ist, dass sich t_1 in dessen Umgebung nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x - \xi$, $y_1 - \eta_1, \dots y_m - \eta_m$ entwickeln lässt*) in der Form

$$(24) \qquad t_1 - \tau_1 = \varrho(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots y_m - \eta_m),$$

worin die Reihe ϱ kein constantes Glied enthält, so wird

$$(25) \qquad G_\alpha(x, t_1, y_1, \dots y_m) = r_\alpha(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots y_m - \eta_m)$$

und

$$(26) \qquad \frac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots y_m)}{\partial t_1} = r_0(x - \xi, y_1 - \eta_1, \dots y_m - \eta_m)$$

sein, worin wieder die Reihe r_0 kein von den Variabeln freies Glied besitzt, da

$$(27) \qquad \left(\frac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots y_m)}{\partial t_1}\right)_{\xi, \tau_1, \eta_1, \dots \eta_m} = 0$$

sein sollte, so dass durch Einsetzen der Entwicklungen (25) und (26) in das System (1) sich wiederum ein Differentialgleichungsystem der Form (23) ergiebt. Dasselbe würde gelten für eine eindeutige Entwicklung der Lösung u_1 der Gleichung (13). Fassen wir daher die beiden Fälle zusammen, so finden wir,

dass, wenn die Gleichung (2) *zu einem Werthesysteme* $x = \xi$, $y_1 = \eta_1, \dots y_m = \eta_m$ *für* t_1 *entweder eine einfache*

*) Wie dies aus der Gleichung (2) zu erkennen ist, wird später gezeigt werden.

unendlich grosse Lösung oder eine endliche vielfache Lösung liefert, die sich in der Umgebung von $x = \xi$, $y_1 = \eta_1, \ldots y_m = \eta_m$ *in eine nach positiven steigenden ganzen Potenzen von* $x - \xi$, $y_1 - \eta_1, \ldots y_m - \eta_m$ *fortschreitende convergirende Reihe entwickeln lässt, die Differentialgleichungen* (1) *sich in der Umgebung der betrachteten Werthe auf ein Differentialgleichungsystem der Form*

$$(28) \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{r_1(x-\xi, y_1-\eta_1, \ldots y_m-\eta_m)}{r_0(x-\xi, y_1-\eta_1, \ldots y_m-\eta_m)} \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{r_2(x-\xi, y_1-\eta_1, \ldots y_m-\eta_m)}{r_0(x-\xi, y_1-\eta_1, \ldots y_m-\eta_m)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dy_m}{dx} = \dfrac{r_m(x-\xi, y_1-\eta_1, \ldots y_m-\eta_m)}{r_0(x-\xi, y_1-\eta_1, \ldots y_m-\eta_m)} \end{cases}$$

zurückführen lassen, worin $r_0, r_1, \ldots r_m$ *nach positiven ganzen Potenzen der eingeschlossenen Grössen fortschreitende convergirende Reihen bedeuten, von denen die erstere* k e i n c o n s t a n t e s *Glied besitzt.*

Die allgemeine Untersuchung des Differentialgleichungsystems (1) *ist somit zurückgeführt einerseits auf die Untersuchung von Integralen des Differentialgleichungsystems* (28) *in der Umgebung der Punkte* $x = \xi$, $y_1 = \eta_1, \ldots y_m = \eta_m$, *andererseits auf die Untersuchung des Differentialgleichungsystemes* (1) *in der Umgebung solcher Werthesysteme* $x = \xi$, $y_1 = \eta_1, \ldots y_m = \eta_m$, *für welche die Gleichung* (2) *mehrfache, jedoch nicht nach positiven steigenden ganzen Potenzen von*

$$x - \xi, \quad y_1 - \eta_1, \quad \ldots y_m - \eta_m$$

entwickelbare Lösungen besitzt.

3. Wir gehen zunächst auf die Untersuchung der Differentialgleichungen (28) in der Umgebung von $x = \xi$, $y_1 = \eta_1, \ldots y_m = \eta_m$ näher ein, und wollen zuerst den Fall hervorheben, in welchem *sämmtliche* Reihen $r_1, r_2, \ldots r_m$ constante Glieder enthalten, somit die rechten Seiten der Differentialgleichungen (28) für $x = \xi$, $y_1 = \eta_1, \ldots y_m = \eta_m$ unendlich gross werden. In diesem Falle wird

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dy_1} = \dfrac{r_0(x-\xi,\, y_1-\eta_1,\, \ldots y_m-\eta_m)}{r_1(x-\xi,\, y_1-\eta_1,\, \ldots y_m-\eta_m)} \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dy_1} = \dfrac{r_2(x-\xi,\, y_1-\eta_1,\, \ldots y_m-\eta_m)}{r_1(x-\xi,\, y_1-\eta_1,\, \ldots y_m-\eta_m)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_m}{dy_1} = \dfrac{r_m(x-\xi,\, y_1-\eta_1,\, \ldots y_m-\eta_m)}{r_1(x-\xi,\, y_1-\eta_1,\, \ldots y_m-\eta_m)}, \end{cases}$$

und da der Voraussetzung nach die rechte Seite der ersten Gleichung dieses Differentialgleichungsystems, in welchem y_1 die unabhängige Variable, $x, y_2, \ldots y_m$ die abhängigen Variabeln bedeuten, für $x = \xi$, $y_1 = \eta_1, \ldots y_m = \eta_m$ gleich Null, die rechten Seiten der anderen Differentialgleichungen für dieses Werthesystem endliche Grössen werden, so lässt sich nach den früher entwickelten Sätzen das Differentialgleichungsystem (29) in der Umgebung dieses Werthesystems in der Form darstellen

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dy_1} = \mathfrak{R}_1(x-\xi,\, y_1-\eta_1,\, \ldots y_m-\eta_m) \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dy_1} = \mathfrak{R}_2(x-\xi,\, y_1-\eta_1,\, \ldots y_m-\eta_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_m}{dy_1} = \mathfrak{R}_m(x-\xi,\, y_1-\eta_1,\, \ldots y_m-\eta_m), \end{cases}$$

worin $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots \mathfrak{R}_m$ convergente, nach positiven ganzen Potenzen der eingeschlossenen Grössen fortschreitende Reihen bedeuten, von denen die erstere kein constantes Glied besitzt, während die anderen alle ein solches haben. Nun folgt aber aus dem Fundamentalsatze über die Existenz eindeutiger Integrale solcher Differentialgleichungen, dass dann, weil

$$\left(\frac{dx}{dy_1}\right)_{\xi,\, \eta_1,\, \ldots \eta_m} = 0$$

sein soll,

$$(31)\quad \begin{cases} x - \xi = \alpha_2(y_1-\eta_1)^2 + \alpha_3(y_1-\eta_1)^3 + \cdots \\ y_2 - \eta_2 = \beta_1(y_1-\eta_1) + \beta_2(y_1-\eta_1)^2 + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m - \eta_m = \mu_1(y_1-\eta_1) + \mu_2(y_1-\eta_1)^2 + \cdots \end{cases}$$

wird, worin $\beta_1, \ldots \mu_1$ der gemachten Annahme zufolge von Null verschieden sind, und da einige der Coefficienten der ersten Reihe für $x - \xi$ verschwinden können, so wird, wenn der erste nicht verschwindende Coefficient α_n, also

$$\left(\frac{dx}{dy_1}\right)_{\xi, \eta_1, \ldots \eta_m} = 0, \quad \left(\frac{d^2x}{dy_1^2}\right)_{\xi, \eta_1, \ldots \eta_m} = 0, \cdots$$

$$\left(\frac{d^{n-1}x}{dy_1^{n-1}}\right)_{\xi, \eta_1, \ldots \eta_m} = 0, \quad \left(\frac{d^nx}{dy_1^n}\right)_{\xi, \eta_1, \ldots \eta_m} = n!\,\alpha_n$$

ist, was durch unmittelbare Differentiation der ersten der Gleichungen (30) nach y_1 mit Benutzung der anderen dieser Gleichungen festgestellt werden kann, sich

$$(32) \qquad x - \xi = \alpha_n(y_1 - \eta_1)^n + \alpha_{n+1}(y_1 - \eta_1)^{n+1} + \cdots$$

ergeben. Daraus folgt aber mit Hülfe der Umkehrung dieser Reihe*)

$$(33) \quad y_1 - \eta_1 = \frac{1}{\alpha_n^{\frac{1}{n}}}(x - \xi)^{\frac{1}{n}} + a_2(x - \xi)^{\frac{2}{n}} + a_3(x - \xi)^{\frac{3}{n}} + \cdots,$$

---

*) Wenn

$$(\alpha) \qquad t = c_1u + c_2u^2 + c_3u^3 + \cdots$$

gegeben ist, worin die Potenzreihe einen um $u = 0$ gelegten Kreis zum Convergenzbereich hat, und *in welcher c_1 von Null verschieden sein soll,* so lässt sich leicht einsehen, dass einer der Zweige der Grösse u als Function von t aufgefasst eine um $t = 0$ convergente Potenzreihe sein muss. Denn aus (α) folgt

$$\frac{dt}{du} = c_1 + 2c_2u + 3c_3u^2 + \cdots$$

und somit

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{c_1 + 2c_2u + 3c_3u^2 + \cdots},$$

oder, da c_1 von Null verschieden ist,

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{c_1} + C_1u + C_2u^2 + \cdots,$$

und somit für das mit $t = 0$ verschwindende Integral nach dem Fundamentalsatz von der Existenz der Integrale

$$(\beta) \qquad u = \frac{1}{c_1}t + k_2t^2 + k_3t^3 + \cdots,$$

was gezeigt werden sollte.

worin $a_2, a_3, \ldots$ constante Coefficienten bedeuten, und somit nach den andern Gleichungen (31) durch Einsetzen von (33)

$$(34)\quad \begin{cases} y_2 - \eta_2 = \dfrac{\beta_1}{\alpha_n^{\frac{1}{n}}}(x-\xi)^{\frac{1}{n}} + b_2(x-\xi)^{\frac{2}{n}} + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_m - \eta_m = \dfrac{\mu_1}{\alpha_n^{\frac{1}{n}}}(x-\xi)^{\frac{1}{n}} + m_2(x-\xi)^{\frac{2}{n}} + \cdots. \end{cases}$$

Wir finden somit das folgende Resultat:

Wenn in dem Differentialgleichungsystem

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{r_1(x-\xi, y_1-\eta_1, \ldots y_m-\eta_m)}{r_0(x-\xi, y_1-\eta_1, \ldots y_m-\eta_m)} \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{r_2(x-\xi, y_1-\eta_1, \ldots y_m-\eta_m)}{r_0(x-\xi, y_1-\eta_1, \ldots y_m-\eta_m)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{dy_m}{dx} = \dfrac{r_m(x-\xi, y_1-\eta_1, \ldots y_m-\eta_m)}{r_0(x-\xi, y_1-\eta_1, \ldots y_m-\eta_m)} \end{cases}$$

$r_0, r_1, \ldots r_m$ *nach ganzen positiven Potenzen der eingeschlossenen Grössen fortschreitende convergente Reihen vorstellen, von denen die erstere für* $x = \xi$, $y_1 = \eta_1, \ldots y_m = \eta_m$ *verschwindet, während die anderen für eben dieses Werthesystem endliche, von Null verschiedene Werthe annehmen, so lassen sich die Integrale* $y_1, y_2, \ldots y_m$ *dieses Differentialgleichungsystemes, welche für* $x = \xi$ *die Werthe* $\eta_1, \ldots \eta_m$ *annehmen sollen, unter der Annahme, dass der erste für dieses Werthesystem nicht verschwindende Differentialquotient von* x *nach* y_1 *genommen der* n^{te} *ist, in der Umgebung dieser Werthe in der Form darstellen*

$$(36)\quad \begin{cases} y_1 - \eta_1 = a_1(x-\xi)^{\frac{1}{n}} + a_2(x-\xi)^{\frac{2}{n}} + \cdots \\ y_2 - \eta_2 = b_1(x-\xi)^{\frac{1}{n}} + b_2(x-\xi)^{\frac{2}{n}} + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_m - \eta_m = m_1(x-\xi)^{\frac{1}{n}} + m_2(x-\xi)^{\frac{2}{n}} + \cdots, \end{cases}$$

worin $a_1, b_1, \ldots m_1$ *von Null verschieden sind.*

Es ist leicht zu sehen, dass im Wesentlichen die eben gemachten Schlüsse nur darauf beruhten, dass die rechten Seiten des Systemes (30) für $x = \xi$, $y_1 = \eta_1, \ldots y_m = \eta_m$ nicht unendlich gross werden, und nehmen wir somit an, dass in dem Differentialgleichungsystem (28), für welches die Reihe r_0 kein constantes Glied haben sollte, wenigstens eine der anderen Reihen z. B. r_α ein constantes Glied besitzt, so wird man offenbar durch Division aller Differentialgleichungen durch die α^{te} wieder ein System mit der unabhängigen Variabeln y_α erhalten, dessen rechte Seiten für das betrachtete Werthesystem endlich oder Null sind, und man erhält genau durch dieselben Schlüsse den allgemeinen Satz:

Wenn in dem Differentialgleichungsysteme (35) $r_0, r_1, \ldots r_m$ *nach ganzen positiven Potenzen der eingeschlossenen Grössen fortschreitende convergente Reihen vorstellen, von denen die erstere für* $x = \xi$, $y_1 = \eta_1, \ldots y_m = \eta_m$ *verschwindet, während von den anderen mindestens eine z. B.* r_α *nicht verschwindet, so lassen sich die Integrale* $y_1, y_2, \ldots y_m$, *welche für* $x = \xi$ *die Werthe* $\eta_1, \ldots \eta_m$ *annehmen sollen, unter der Annahme, dass der erste für dieses Werthesystem nicht verschwindende Differentialquotient von* x *nach* y_α *genommen der* n^{te} *ist, in der Umgebung dieser Werthe in der Form darstellen*

$$(37) \quad \begin{cases} y_1 - \eta_1 = a_1 (x - \xi)^{\frac{1}{n}} + a_2 (x - \xi)^{\frac{2}{n}} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_\alpha - \eta_\alpha = k_1 (x - \xi)^{\frac{1}{n}} + k_2 (x - \xi)^{\frac{2}{n}} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_m - \eta_m = m_1 (x - \xi)^{\frac{1}{n}} + m_2 (x - \xi)^{\frac{2}{n}} + \cdots, \end{cases}$$

worin jedenfalls k_1 *von Null verschieden ist.*

Nachdem der Fall des Differentialgleichungsystems (28) erledigt ist, in welchem r_0 kein constantes Glied besitzt, aber mindestens eine der Reihen $r_1, r_2, \ldots r_m$ ein solches enthält, bleibt uns der bei weitem schwierigere Fall zur

Untersuchung übrig, in welchem für sämmtliche Reihen r_0, $r_1, \ldots r_m$ die constanten Glieder fehlen, oder sich

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{\xi, \eta_1, \ldots \eta_m}, \quad \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{\xi, \eta_1, \ldots \eta_m}, \quad \ldots \left(\frac{dy_m}{dx}\right)_{\xi, \eta_1, \ldots \eta_m}$$

in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ ergeben.

II. Untersuchung der Eigenschaften der Integrale beliebiger Differentialgleichungssysteme in der Umgebung solcher Werthesysteme, für welche die Differentialquotienten eindeutig, aber unbestimmt sind.

1. Indem wir, um die folgenden Untersuchungen auch gleich für transcendente Differentialgleichungssysteme durchzuführen, das Differentialgleichungssystem (28) des vorigen Abschnittes von der speciellen Form befreien, dass alle Differentialquotienten denselben Nenner r_0 haben, ferner durch Einführung neuer Variabeln für die Grössen

$$x - \xi, \; y_1 - \eta_1, \; y_2 - \eta_2, \; \ldots y_m - \eta_m$$

das Nullsystem aller Variabeln als das singuläre zu betrachten haben werden,

legen wir das allgemeinere Differentialgleichungssystem von der Form zu Grunde

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx} = \dfrac{\mathfrak{P}_1(x, x_1, x_2, \ldots x_n)}{\mathfrak{Q}_1(x, x_1, x_2, \ldots x_n)} \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dx} = \dfrac{\mathfrak{P}_2(x, x_1, x_2, \ldots x_n)}{\mathfrak{Q}_2(x, x_1, x_2, \ldots x_n)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dx_n}{dx} = \dfrac{\mathfrak{P}_n(x, x_1, x_2, \ldots x_n)}{\mathfrak{Q}_n(x, x_1, x_2, \ldots x_n)}, \end{cases}$$

in welchem die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ Potenzreihen von $x, x_1, \ldots x_n$ sind, die sämmtlich constante Glieder nicht enthalten, und stellen uns die Aufgabe, festzustellen, welcher Natur diejenigen Integrale x_1,

$x_2, \ldots x_n$ um $x = 0$ herum sind, welche sämmtlich für $x = 0$ ebenfalls den Werth Null annehmen, wobei wir die Untersuchung jedoch nur unter der Voraussetzung anstellen, dass x_1, $x_2, \ldots x_n$ für $x = 0$ so Null werden, dass ihr Verhältniss zu endlichen Potenzen von x für $x = 0$ endlich ist.

Setzen wir das System (1) in die Form

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{Q}_1(x, x_1, x_2, \ldots x_n)\dfrac{dx_1}{dx} = \mathfrak{P}_1(x, x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \mathfrak{Q}_2(x, x_1, x_2, \ldots x_n)\dfrac{dx_2}{dx} = \mathfrak{P}_2(x, x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{Q}_n(x, x_1, x_2, \ldots x_n)\dfrac{dx_n}{dx} = \mathfrak{P}_n(x, x_1, x_2, \ldots x_n), \end{cases}$$

oder, wenn wir die Potenzreihen durch je ein Glied repräsentiren,

$$(3)\quad \begin{cases} \left(A'x^{\alpha'}x_1^{\alpha_1'}x_2^{\alpha_2'}\ldots x_n^{\alpha_n'}+\cdots\right)\dfrac{dx_1}{dx} = \left(Ax^{\alpha}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}+\cdots\right) \\ \left(B'x^{\beta'}x_1^{\beta_1'}x_2^{\beta_2'}\ldots x_n^{\beta_n'}+\cdots\right)\dfrac{dx_2}{dx} = \left(Bx^{\beta}x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n}+\cdots\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(N'x^{\nu'}x_1^{\nu_1'}x_2^{\nu_2'}\ldots x_n^{\nu_n'}+\cdots\right)\dfrac{dx_n}{dx} = \left(Nx^{\nu}x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\ldots x_n^{\nu_n}+\cdots\right), \end{cases}$$

so werden, wenn wir der gemachten Voraussetzung zufolge als Ordnung des Nullwerdens von $x_1, x_2, \ldots x_n$ im Punkte $x = 0$ die $\mu_1^{\text{te}}, \mu_2^{\text{te}}, \ldots \mu_n^{\text{te}}$ nehmen, so dass

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{dx_2}{dx}, \quad \ldots \frac{dx_n}{dx}$$

von der $\mu_1 - 1^{\text{ten}}$, $\mu_2 - 1^{\text{ten}}$, $\ldots \mu_n - 1^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden, mindestens zwei Posten auf beiden Seiten jeder Gleichung des Systemes (3) dieselbe Ordnung haben müssen; nehmen wir nun an, dass dies die in den einzelnen Klammern hervorgehobenen Glieder seien, so folgt

$$(4)\begin{cases} \alpha' + \alpha_1'\mu_1 + \alpha_2'\mu_2 + \cdots + \alpha_n'\mu_n + \mu_1 - 1 \\ \qquad = \alpha + \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \cdots + \alpha_n\mu_n \\ \beta' + \beta_1'\mu_1 + \beta_2'\mu_2 + \cdots + \beta_n'\mu_n + \mu_2 - 1 \\ \qquad = \beta + \beta_1\mu_1 + \beta_2\mu_2 + \cdots + \beta_n\mu_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \nu' + \nu_1'\mu_1 + \nu_2'\mu_2 + \cdots + \nu_n'\mu_n + \mu_n - 1 \\ \qquad = \nu + \nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_2 + \cdots + \nu_n\mu_n \end{cases}$$

oder

$$(5)\begin{cases} \mu_1(\alpha_1' - \alpha_1 + 1) + \mu_2(\alpha_2' - \alpha_2) + \cdots + \mu_n(\alpha_n' - \alpha_n) = \alpha - \alpha' + 1 \\ \mu_1(\beta_1' - \beta_1) + \mu_2(\beta_2' - \beta_2 + 1) + \cdots + \mu_n(\beta_n' - \beta_n) = \beta - \beta' + 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_1(\nu_1' - \nu_1) + \mu_2(\nu_2' - \nu_2) + \cdots + \mu_n(\nu_n' - \nu_n + 1) = \nu - \nu' + 1, \end{cases}$$

und da die $\alpha, \beta, \ldots \nu$ ganze Zahlen sind, so ergeben sich $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, wenn die Gleichungen (5) nicht für diese Grössen unbestimmte Werthe liefern, d. h., falls $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ in der Form

$$\mu_1 = \frac{D_1}{D}, \; \mu_2 = \frac{D_2}{D}, \; \cdots \mu_n = \frac{D_n}{D}$$

dargestellt werden, die Determinanten

$$D, \; D_1, \; D_2, \; \ldots D_n$$

nicht verschwinden*), jedenfalls als rationale Zahlen; *wenn*

*) So würde sich für ein Differentialgleichungsystem erster Klasse

$$\left(A' x^{\alpha'} x_1^{\alpha_1'} + \cdots\right) \frac{dx_1}{dx} = \left(A x^{\alpha} x_1^{\alpha_1} + \ldots\right)$$

zur Bestimmung von μ_1 die Gleichung ergeben

$$\mu_1(\alpha_1' - \alpha_1 + 1) = \alpha - \alpha' + 1,$$

und der oben erwähnte Ausnahmefall wäre durch die beiden Gleichungen gekennzeichnet

$$\text{(a)} \qquad \alpha_1' - \alpha_1 + 1 = 0, \quad \alpha - \alpha' + 1 = 0;$$

für die Differentialgleichung

$$x \frac{dx_1}{dx} = k x_1$$

wir von nun an die Fälle von der Untersuchung ausschliessen, in denen sich aus den Gleichungen (5) *die μ-Grössen in unbestimmter Form ergeben,* so erhalten wir zunächst den Satz,

dass die Integrale $x_1, x_2, \ldots x_n$ für $x = 0$ von rationaler Ordnung Null werden müssen, wenn sie überhaupt endliche Ordnungszahlen besitzen sollen.

Setzen wir

$$(6) \qquad \mu_1 = \frac{p_1}{q_1}, \quad \mu_2 = \frac{p_2}{q_2}, \quad \cdots \mu_n = \frac{p_n}{q_n},$$

worin $p_1, \ldots p_n, q_1 \ldots q_n$ ganze Zahlen bedeuten, oder mit dem gemeinschaftlichen Nenner Q

$$(7) \qquad \mu_1 = \frac{P_1}{Q}, \quad \mu_2 = \frac{P_2}{Q}, \quad \cdots \mu_n = \frac{P_n}{Q},$$

und nehmen wir an, die in den Klammern der Gleichungen (3) hervorgehobenen Glieder gehören zur Gruppe niedrigster Dimension, so wird sich, wenn

$$(8) \qquad x = t^Q, \quad x_1 = v_1 t^{P_1}, \quad x_2 = v_2 t^{P_2}, \quad \ldots x_n = v_n t^{P_n}$$

gesetzt wird, aus den transformirten Gleichungen (3)

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \left(A' t^{\alpha' Q + \alpha_1' P_1 + \alpha_2' P_2 + \cdots + \alpha_n' P_n} v_1^{\alpha_1'} v_2^{\alpha_2'} \ldots v_n^{\alpha_n'} + \cdots\right)\left(P_1 t^{P_1 - 1} v_1 + t^{P_1} \frac{dv_1}{dt}\right) \\ \qquad - \left(A t^{\alpha Q + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_n P_n} v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \ldots v_n^{\alpha_n} + \cdots\right) Q t^{Q-1} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \left(N' t^{\nu' Q + \nu_1' P_1 + \nu_2' P_2 + \cdots + \nu_n' P_n} v_1^{\nu_1'} v_2^{\nu_2'} \ldots v_n^{\nu_n'} + \cdots\right)\left(P_n t^{P_n - 1} v_n + t^{P_n} \frac{dv_n}{dt}\right) \\ \qquad - \left(N t^{\nu Q + \nu_1 P_1 + \nu_2 P_2 + \cdots + \nu_n P_n} v_1^{\nu_1} v_2^{\nu_2} \ldots v_n^{\nu_n} + \cdots\right) Q t^{Q-1} = 0 \end{array} \right.$$

ergeben; beachtet man nun, dass, weil die bezeichneten Glieder in den Klammern zu der Gruppe niedrigster Dimension gehören sollten, sie nothwendig, da $v_1, v_2, \ldots v_n$ für $t = 0$ endliche

z. B. wäre $\alpha' = 1$, $\alpha_1' = 0$, $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 1$, also die beiden Beziehungen (a) erfüllt, und in der That wird das Integral

$$x_1 = cx^k,$$

in dem $x = 0$, $x_1 = 0$ sich entsprechen, nicht von einer rationalen Ordnung Null, wenn k eine irrationale Zahl ist.

Werthe annehmen, in Bezug auf t gleiche Dimension haben müssen, dass sie also zugleich Glieder sind, wie sie oben zur Herleitung der Beziehungen (5) gebraucht wurden, so werden auch für diese die Gleichungen (5) gelten, die mit Benutzung von (7) in

$$(10)\begin{cases}(\alpha_1'+1)P_1+\alpha_2'P_2+\cdots+\alpha_n'P_n+\alpha'Q=\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\cdots\\ \qquad\qquad\qquad+\alpha_nP_n+(\alpha+1)Q=m_1\\ \beta_1'P_1+(\beta_2'+1)P_2+\cdots+\beta_n'P_n+\beta'Q=\beta_1P_1+\beta_2P_2+\cdots\\ \qquad\qquad\qquad+\beta_nP_n+(\beta+1)Q=m_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \nu_1'P_1+\nu_2'P_2+\cdots+(\nu_n'+1)P_n+\nu'Q=\nu_1P_1+\nu_2P_2+\cdots\\ \qquad\qquad\qquad+\nu_nP_n+(\nu+1)Q=m_n\end{cases}$$

übergehen, und vermöge dieser Beziehung sieht man, dass die Variable t im m_1-1ten Grade eingeht in alle Glieder der ersten Gruppe der ersten Gleichung von (9) und von höherem Grade in alle anderen Ausdrücke der weiteren Gruppen, dass t im m_2-1ten Grade eingeht in alle Glieder der ersten Gruppe der zweiten Gleichung von (9) und von höherem Grade in alle anderen Ausdrücke der weiteren Gruppen u. s. w. Man kann die Gleichungen (9) somit resp. durch

$$t^{m_1-1},\quad t^{m_2-1},\quad \ldots\; t^{m_n-1}$$

dividiren und erhält daher

$$(11)\begin{cases}\left(A'v_1^{\alpha_1'}v_2^{\alpha_2'}\ldots v_n^{\alpha_n'}+\cdots\right)\left(P_1v_1+t\dfrac{dv_1}{dt}\right)\\ \qquad\qquad-\left(Av_1^{\alpha_1}v_2^{\alpha_2}\ldots v_n^{\alpha_n}+\cdots\right)Q=0\\ \left(B'v_1^{\beta_1'}v_2^{\beta_2'}\ldots v_n^{\beta_n'}+\cdots\right)\left(P_2v_2+t\dfrac{dv_2}{dt}\right)\\ \qquad\qquad-\left(Bv_1^{\beta_1}v_2^{\beta_2}\ldots v_n^{\beta_n}+\cdots\right)Q=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left(N'v_1^{\nu_1'}v_2^{\nu_2'}\ldots v_n^{\nu_n'}+\cdots\right)\left(P_nv_n+t\dfrac{dv_n}{dt}\right)\\ \qquad\qquad-\left(Nv_1^{\nu_1}v_2^{\nu_2}\ldots v_n^{\nu_n}+\cdots\right)Q=0,\end{cases}$$

wobei in den auf die Posten der ersten Gruppe der einzelnen

Klammern folgenden Ausdrücken die Grösse t explicite enthalten sein wird, und es kommt darauf an, dieses System von Differentialgleichungen im Punkte $t = 0$ zu untersuchen, wobei erst festzustellen sein wird, welche Werthe von v_1, v_2, ... v_n dem Werthe $t = 0$ entsprechen. Da der Annahme nach

$$\left(\frac{x_1}{x^{\mu_1}}\right)_0, \quad \left(\frac{x_2}{x^{\mu_2}}\right)_0, \quad \ldots \left(\frac{x_n}{x^{\mu_n}}\right)_0$$

endliche Grössen sein sollten, so folgte aus (8) zunächst, dass die dem Werthe $t = 0$ entsprechenden Werthe von v_1, v_2, ... v_n, die wir mit

$$v_1^0, \quad v_2^0, \quad \ldots v_n^0$$

bezeichnen wollen, jedenfalls endlich sind; bemerkt man ferner, dass ebenso

$$\left(\frac{\frac{dx_1}{dx}}{\mu_1 x^{\mu_1 - 1}}\right)_0, \quad \left(\frac{\frac{dx_2}{dx}}{\mu_2 x^{\mu_2 - 1}}\right)_0, \quad \ldots \left(\frac{\frac{dx_n}{dx}}{\mu_n x^{\mu_n - 1}}\right)_0$$

dieselben endlichen Grössen v_1^0, v_2^0, .. v_n^0 darstellen, also auch

$$\left(\frac{P_1 v_1 t^{P_1 - 1} + t^{P_1} \frac{dv_1}{dt}}{\mu_1 Q t^{\mu_1 Q - 1}}\right)_0, \quad \ldots \left(\frac{P_n v_n t^{P_n - 1} + t^{P_n} \frac{dv_n}{dt}}{\mu_n Q t^{\mu_n Q - 1}}\right)_0,$$

oder vermöge (7)

$$v_1^0 + \frac{1}{\mu_1 Q}\left(t\frac{dv_1}{dt}\right)_0, \quad \ldots v_n^0 + \frac{1}{\mu_n Q}\left(t\frac{dv_n}{dt}\right)_0$$

die endlichen Werthe v_1^0, v_2^0, ... v_n^0 annehmen müssen, so folgt, dass die Grössen

$$\left(t\frac{dv_1}{dt}\right)_0, \quad \left(t\frac{dv_2}{dt}\right)_0, \quad \ldots \left(t\frac{dv_n}{dt}\right)_0$$

sämmtlich verschwinden. Es werden daher, wenn man $t = 0$ in die Gleichungen (11) substituirt, die Werthe v_1^0, v_2^0, ... v_n^0 durch die n Gleichungen bestimmt sein:

$$
(12)\left\{\begin{aligned}
F_1(v_1^0, v_2^0, \ldots v_n^0) &= (A' v_1^{0\alpha_1'} v_2^{0\alpha_2'} \ldots v_n^{0\alpha_n'} + \cdots) P_1 v_1^0 \\
&\quad - (A v_1^{0\alpha_1} v_2^{0\alpha_2} \ldots v_n^{0\alpha_n} + \cdots) Q = 0 \\
F_2(v_1^0, v_2^0, \ldots v_n^0) &= (B' v_1^{0\beta_1'} v_2^{0\beta_2'} \ldots v_n^{0\beta_n'} + \cdots) P_2 v_2^0 \\
&\quad - (B v_1^{0\beta_1} v_2^{0\beta_2} \ldots v_n^{0\beta_n} + \cdots) Q = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_n(v_1^0, v_2^0, \ldots v_n^0) &= (N' v_1^{0\nu_1'} v_2^{0\nu_2'} \ldots v_n^{0\nu_n'} + \ldots) P_n v_n^0 \\
&\quad - (N v_1^{0\nu_1} v_2^{0\nu_2} \ldots v_n^{0\nu_n} + \cdots) Q = 0.
\end{aligned}\right.
$$

2. *Wir nehmen zunächst an, dass die diesen Gleichungen genügenden Werthe $v_1^0, v_2^0, \ldots v_n^0$ nicht eine der Klammern der Gleichungen* (12) *zu Null machen, d. h. dass die Grössen*

$$
\begin{gathered}
A' v_1^{0\alpha_1'} v_2^{0\alpha_2'} \ldots v_n^{0\alpha_n'} + \cdots, \quad A v_1^{0\alpha_1} v_2^{0\alpha_2} \ldots v_n^{0\alpha_n} + \cdots \\
B' v_1^{0\beta_1'} v_2^{0\beta_2'} \ldots v_n^{0\beta_n'} + \cdots, \quad B v_1^{0\beta_1} v_2^{0\beta_2} \ldots v_n^{0\beta_n} + \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
N' v_1^{0\nu_1'} v_2^{0\nu_2'} \ldots v_n^{0\nu_n'} + \cdots, \quad N v_1^{0\nu_1} v_2^{0\nu_2} \ldots v_n^{0\nu_n}
\end{gathered}
$$

sämmtlich von Null verschieden sind.

Setzen wir dann

$$
(13) \quad v_1 = v_1^0 + \zeta_1, \quad v_2 = v_2^0 + \zeta_2, \quad \ldots v_n = v_n^0 + \zeta_n,
$$

so dass $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ für $t = 0$ verschwinden, so werden $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ als Functionen von t nach (11) durch die Differentialgleichungen definirt sein

$$
(14) \quad t\frac{d\zeta_\varrho}{dt}
= \frac{\begin{aligned}&-[R'(v_1^0+\zeta_1)^{\varrho_1'}(v_2^0+\zeta_2)^{\varrho_2'}\ldots(v_n^0+\zeta_n)^{\varrho_n'}+\cdots]\,P_\varrho(v_\varrho^0+\zeta_\varrho)\\ &+[R(v_1^0+\zeta_1)^{\varrho_1}(v_2^0+\zeta_2)^{\varrho_2}\cdots(v_n^0+\zeta_n)^{\varrho_n}+\cdots]\,Q\end{aligned}}{R'(v_1^0+\zeta_1)^{\varrho_1'}(v_2^0+\zeta_2)^{\varrho_2'}\ldots(v_n^0+\zeta_n)^{\varrho_n'}+\cdots},
$$

$$
(\varrho = 1, 2, \ldots n)
$$

worin R und R' Constanten bedeuten, oder mit Entwicklung des Zählers und Nenners der rechten Seite nach Potenzen von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ mit Berücksichtigung von (12)

$$(15)\qquad t\frac{d\zeta_\varrho}{dt}$$

$$=\frac{-\frac{\partial F_\varrho}{\partial v_1^0}\zeta_1-\frac{\partial F_\varrho}{\partial v_2^0}\zeta_2-\cdots-\frac{\partial F_\varrho}{\partial v_n^0}\zeta_n+A_\varrho t+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^2+(t,\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_n)^3+\cdots}{(K'v_1^{0\varkappa_1'}v_2^{0\varkappa_2'}\ldots v_n^{0\varkappa_n'}+\cdots)+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^1+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^2+\cdots},$$

$$(\varrho=1,2,\ldots n),$$

worin $(t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)^\lambda$ eine ganze homogene Function λ^{ten} Grades von $t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ bedeutet. Wir erhalten somit die n Differentialgleichungen für $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$

$$(16)\begin{cases} t\dfrac{d\zeta_1}{dt}=\dfrac{-\frac{\partial F_1}{\partial v_1^0}\zeta_1-\frac{\partial F_1}{\partial v_2^0}\zeta_2-\cdots-\frac{\partial F_1}{\partial v_n^0}\zeta_n+A_1t+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^2+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^3+\cdots}{(A'v_1^{0\alpha_1'}v_2^{0\alpha_2'}\ldots v_n^{0\alpha_n'}+\cdots)+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^1+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^2+\cdots} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t\dfrac{d\zeta_n}{dt}=\dfrac{-\frac{\partial F_n}{\partial v_1^0}\zeta_1-\frac{\partial F_n}{\partial v_2^0}\zeta_2-\cdots-\frac{\partial F_n}{\partial v_n^0}\zeta_n+A_nt+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^2+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^3+\cdots}{(N'v_1^{0\nu_1'}v_2^{0\nu_2'}\ldots v_n^{0\nu_n'}+\cdots)+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^1+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^2+\cdots}, \end{cases}$$

welche für die zusammengehörigen Werthesysteme $t=0$, $\zeta_1=0$, $\zeta_2=0$, $\ldots \zeta_n=0$ zu untersuchen sind.

Setzen wir zuerst voraus, dass

A. *keine der Grössen*

$$\frac{\partial F_1}{\partial v_1^0}, \ldots \frac{\partial F_1}{\partial v_n^0}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial v_1^0}, \ldots \frac{\partial F_2}{\partial v_n^0}, \ldots \frac{\partial F_n}{\partial v_1^0}, \ldots \frac{\partial F_n}{\partial v_n^0}$$

verschwindet,

so werden sich zunächst die Functionen

$$(R)\begin{cases} \dfrac{1}{(A'v_1^{0\alpha_1'}v_2^{0\alpha_2'}\ldots v_n^{0\alpha_n'}+\cdots)+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^1+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^2+\cdots} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{1}{(N'v_1^{0\nu_1'}v_2^{0\nu_2'}\ldots v_n^{0\nu_n'}+\cdots)+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^1+(t,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\zeta_n)^2+\cdots} \end{cases}$$

da die ersten Klammern der Nenner nach der oben gemachten Voraussetzung nicht verschwinden, als eindeutige Functionen von $t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ in Potenzreihen von der Form

$$(S)\quad\begin{cases} P_1 + (t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)^1 + (t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)^2 + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ P_n + (t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)^1 + (t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)^2 + \cdots \end{cases}$$

entwickeln lassen, worin $P_1, P_2, \ldots P_n$ von Null verschieden sind, und sich somit durch Einsetzen in die Gleichungen (16) in der Umgebung der Werthe $t = 0$, $\zeta_1 = 0, \ldots \zeta_n = 0$ das nachfolgende Differentialgleichungsystem ergeben:

$$(17)\quad\begin{cases} t\dfrac{d\zeta_1}{dt} = a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \cdots + a_{1n}\zeta_n + b_1 t + (t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)^2 + \cdots \\ t\dfrac{d\zeta_2}{dt} = a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + \cdots + a_{2n}\zeta_n + b_2 t + (t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)^2 + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ t\dfrac{d\zeta_n}{dt} = a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \cdots + a_{nn}\zeta_n + b_n t + (t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)^2 + \cdots, \end{cases}$$

worin die Coefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nn}$ der ad A. gemachten Annahme zufolge *von Null verschieden sind.*

Wenn jedoch

B. *einzelne oder alle Grössen*

$$\frac{\partial F_1}{\partial v_1^0}, \ldots \frac{\partial F_1}{\partial v_n^0}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial v_1^0}, \ldots \frac{\partial F_2}{\partial v_n^0}, \ldots \frac{\partial F_n}{\partial v_1^0}, \ldots \frac{\partial F_n}{\partial v_n^0}$$

verschwinden,

so werden die Reihen (S) mit den Zählern der Gleichungen (16) multiplicirt nicht sämmtlich die ersten Potenzen von ζ_1, $\zeta_2, \ldots \zeta_n$ enthalten, und somit die Form der Differentialgleichungen in der Umgebung des Nullsystems der Variabeln im Allgemeinen die folgende sein:

$$(18)\quad\begin{cases} t\dfrac{d\zeta_1}{dt} = (t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)^1 + (t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)^2 + \cdots \\ t\dfrac{d\zeta_2}{dt} = (t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)^1 + (t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)^2 + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ t\dfrac{d\zeta_n}{dt} = (t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)^1 + (t, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)^2 + \cdots, \end{cases}$$

worin die Coefficienten von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ *in den homogenen Functionen ersten Grades zum Theil oder alle verschwinden können.*

3. *Sind jedoch eine oder mehrere der Klammern der Gleichungen* (12) *gleich Null*,

so werden eine oder mehrere der Differentialgleichungen des Systemes (16) die Form haben

$$(19) \qquad t\frac{d\zeta_\varrho}{dt} = \frac{a'_{1\varrho}\zeta_1 + a'_{2\varrho}\zeta_2 + \cdots + a'_{n\varrho}\zeta_n + b'_\varrho t + \cdots}{a_{1\varrho}\zeta_1 + a_{2\varrho}\zeta_2 + \cdots + a_{n\varrho}\zeta_n + b_\varrho t + \cdots},$$

während die anderen von der Gestalt sind

$$(20) \qquad t\frac{d\zeta_\sigma}{dt} = \frac{a'_{1\sigma}\zeta_1 + a'_{2\sigma}\zeta_2 + \cdots + a'_{n\sigma}\zeta_n + b'_\sigma t + \cdots}{a_\sigma + a_{1\sigma}\zeta_1 + a_{2\sigma}\zeta_2 + \cdots + a_{n\sigma}\zeta_n + b_\sigma t + \cdots},$$

worin a_σ von Null verschieden ist.

Nun wird es sich zunächst in den folgenden Untersuchungen über die Natur der Integrale der Differentialgleichungen (1) nur darum handeln, ob dieses Differentialgleichungsystem in der Umgebung von $x = 0$, dem verschwindende Werthe aller abhängigen Variabeln entsprechen sollten, eindeutige, also nach positiven steigenden ganzen Potenzen von x entwickelbare Integrale habe, wobei die am Anfange dieses Abschnittes für die Ordnung des Nullwerdens eingeführten Bedingungen der Endlichkeit und Rationalität derselben von selbst erfüllt sind.

Um nun zu untersuchen, ob $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ *eindeutige Functionen von* t *um* $t = 0$, *dem* $\zeta_1 = \zeta_2 = \cdots = \zeta_n = 0$ *entsprechen sollen, darstellen*, darf man annehmen, dass $\left(\frac{d\zeta_\lambda}{dt}\right)_{t=0}$ als Ableitung einer eindeutigen Function nicht unendlich sein darf, und wenn man daher (19) in die Form bringt

$$(21) \qquad (a_{1\varrho}\zeta_1 + a_{2\varrho}\zeta_2 + \cdots + a_{n\varrho}\zeta_n + b_\varrho t + \cdots)\frac{d\zeta_\varrho}{dt}$$
$$= a'_{1\varrho}\frac{\zeta_1}{t} + a'_{2\varrho}\frac{\zeta_2}{t} + \cdots + a'_{n\varrho}\frac{\zeta_n}{t} + b'_\varrho + \cdots,$$

so folgt für $t = 0$, $\zeta_1 = \cdots = \zeta_n = 0$

$$(22) \quad a'_{1\varrho}\left(\frac{\zeta_1}{t}\right)_0 + a'_{2\varrho}\left(\frac{\zeta_2}{t}\right)_0 + \cdots + a'_{n\varrho}\left(\frac{\zeta_n}{t}\right)_0 + b'_\varrho = 0.$$

Da aber ferner, wenn ζ_σ eine eindeutige Function von t sein soll, die Entwicklung dieser Grösse lauten muss

$$\zeta_\sigma = At^\mu + Bt^{\mu+1} + \cdots, \tag{23}$$

und somit, wenn $\mu > 1$,

$$\left(\frac{\zeta_\sigma}{t}\right)_0 = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\zeta_\sigma}{dt}\right)_0 = 0$$

ist, und wenn $\mu = 1$,

$$\left(\frac{\zeta_\sigma}{t}\right)_0 = A \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\zeta_\sigma}{dt}\right)_0 = A$$

ist, so folgt, dass stets

$$\left(\frac{d\zeta_\sigma}{dt}\right)_0 = \left(\frac{\zeta_\sigma}{t}\right)_0 \tag{24}$$

sein wird, und dass somit, weil aus (20)

$$\frac{d\zeta_\sigma}{dt}(a_\sigma + a_{1\sigma}\zeta_1 + \cdots + a_{n\sigma}\zeta_n + b_\sigma t + \cdots) \tag{25}$$
$$= a'_{1\sigma}\frac{\zeta_1}{t} + \cdots + a'_{n\sigma}\frac{\zeta_n}{t} + b'_\sigma + \cdots$$

sich ergiebt,

$$a_\sigma \left(\frac{\zeta_\sigma}{t}\right)_0 = a'_{1\sigma}\frac{\zeta_1}{t} + \cdots + a'_{\sigma\sigma}\left(\frac{\zeta_\sigma}{t}\right)_0 + \cdots + a'_{n\sigma}\left(\frac{\zeta_n}{t}\right)_0 + b'_\sigma$$

oder

$$a'_{1\sigma}\left(\frac{\zeta_1}{t}\right)_0 + a'_{2\sigma}\left(\frac{\zeta_2}{t}\right)_0 + \cdots + (a'_{\sigma\sigma} - a_\sigma)\left(\frac{\zeta_\sigma}{t}\right)_0 + \cdots \tag{26}$$
$$+ a'_{n\sigma}\left(\frac{\zeta_n}{t}\right)_0 + b'_\sigma = 0$$

folgt.

Mögen nun die ersten p Differentialgleichungen des Systems (16) die Form (19), die folgenden $n-p$ die Form (20) haben, das System also lauten

$$\tag{27} \left\{ \begin{aligned} t\frac{d\zeta_1}{dt} &= \frac{a'_{11}\zeta_1 + a'_{21}\zeta_2 + \cdots + a'_{n1}\zeta_n + b'_1 t + \cdots}{a_{11}\zeta_1 + a_{21}\zeta_2 + \cdots + a_{n1}\zeta_n + b_1 t + \cdots} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t\frac{d\zeta_p}{dt} &= \frac{a'_{1p}\zeta_1 + a'_{2p}\zeta_2 + \cdots + a'_{np}\zeta_n + b'_p t + \cdots}{a_{1p}\zeta_1 + a_{2p}\zeta_2 + \cdots + a_{np}\zeta_n + b_p t + \cdots} \\ t\frac{d\zeta_{p+1}}{dt} &= \frac{a'_{1p+1}\zeta_1 + a'_{2p+1}\zeta_2 + \cdots + a'_{np+1}\zeta_n + b'_{p+1} t + \cdots}{a_{p+1} + a_{1p+1}\zeta_1 + a_{2p+1}\zeta_2 + \cdots + a_{np+1}\zeta_n + b_{p+1} t + \cdots} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t\frac{d\zeta_n}{dt} &= \frac{a'_{1n}\zeta_1 + a'_{2n}\zeta_2 + \cdots + a'_{nn}\zeta_n + b'_n t + \cdots}{a_n + a_{1n}\zeta_1 + a_{2n}\zeta_2 + \cdots + a_{nn}\zeta_n + b_n t + \cdots}, \end{aligned} \right.$$

worin $a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots a_n$ von Null verschieden sind, und mögen die nach (22) und (26) zugehörigen Bestimmungsgleichungen sein:

$$(28)\quad \begin{cases} a'_{11}\left(\frac{\zeta_1}{t}\right)_0 + a'_{21}\left(\frac{\zeta_2}{t}\right)_0 + \cdots + a'_{n1}\left(\frac{\zeta_n}{t}\right)_0 + b_1' = 0 \\ a'_{12}\left(\frac{\zeta_1}{t}\right)_0 + a'_{22}\left(\frac{\zeta_2}{t}\right)_0 + \cdots + a'_{n2}\left(\frac{\zeta_n}{t}\right)_0 + b_2' = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a'_{1p}\left(\frac{\zeta_1}{t}\right)_0 + a'_{2p}\left(\frac{\zeta_2}{t}\right)_0 + \cdots + a'_{np}\left(\frac{\zeta_n}{t}\right)_0 + b'_p = 0 \\ a'_{1p+1}\left(\frac{\zeta_1}{t}\right)_0 + \cdots + a'_{pp+1}\left(\frac{\zeta_p}{t}\right)_0 + (a'_{p+1p+1} - a_{p+1})\left(\frac{\zeta_{p+1}}{t}\right)_0 + \cdots \\ \qquad\qquad + a'_{np+1}\left(\frac{\zeta_n}{t}\right)_0 + b'_{p+1} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a'_{1n}\left(\frac{\zeta_1}{t}\right)_0 + a'_{2n}\left(\frac{\zeta_2}{t}\right)_0 + \cdots\cdots + a'_{n-1n}\left(\frac{\zeta_{n-1}}{t}\right)_0 \\ \qquad\qquad + (a'_{nn} - a_n)\left(\frac{\zeta_n}{t}\right)_0 + b'_n = 0, \end{cases}$$

aus denen sich die Werthe

$$(29)\qquad \left(\frac{\zeta_1}{t}\right)_0 = \alpha_1, \quad \left(\frac{\zeta_2}{t}\right)_0 = \alpha_2, \quad \cdots \left(\frac{\zeta_n}{t}\right)_0 = \alpha_n$$

ergeben sollen, die also die Gleichungen befriedigen

$$(30)\quad \begin{cases} a'_{11}\alpha_1 + a'_{21}\alpha_2 + \cdots\cdots + a'_{n1}\alpha_n + b_1' = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a'_{1p}\alpha_1 + a'_{2p}\alpha_2 + \cdots\cdots + a'_{np}\alpha_n + b'_p = 0 \\ a'_{1p+1}\alpha_1 + \cdots\cdots + a'_{pp+1}\alpha_p + (a'_{p+1p+1} - a_{p+1})\alpha_{p+1} + \cdots \\ \qquad\qquad + a'_{np+1}\alpha_n + b'_{p+1} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a'_{1n}\alpha_1 + a'_{2n}\alpha_2 + \cdots\cdots + a'_{n-1n}\alpha_{n-1} + (a'_{nn} - a_n)\alpha_n + b'_n = 0. \end{cases}$$

Macht man nun die Substitutionen

$$(31)\quad \zeta_1 = (\alpha_1 + \xi_1)t, \quad \zeta_2 = (\alpha_2 + \xi_2)t, \quad \ldots \zeta_n = (\alpha_n + \xi_n)t,$$

so dass nach (29) dem $t = 0$ die Nullwerthe von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$

entsprechen, dann gehen die linken Seiten der Differentialgleichungen (27) in

$$(32) \qquad t\frac{d\zeta_\lambda}{dt} = t\left[\alpha_\lambda + \xi_\lambda + t\frac{d\xi_\lambda}{dt}\right] = t^2\frac{d\xi_\lambda}{dt} + \alpha_\lambda t + t\xi_\lambda$$

über, während die rechten Seiten der ersten p Gleichungen dieses Systems, nachdem Zähler und Nenner durch t dividirt worden, die Form annehmen

$$(33) \qquad \frac{a'_{1\lambda}(\alpha_1+\xi_1)+a'_{2\lambda}(\alpha_2+\xi_2)+\cdots+a'_{n\lambda}(\alpha_n+\xi_n)+b'_\lambda+\cdots}{a_{1\lambda}(\alpha_1+\xi_1)+a_{2\lambda}(\alpha_2+\xi_2)+\cdots+a_{n\lambda}(\alpha_n+\xi_n)+b_\lambda+\cdots},$$

während die rechten Seiten der anderen $n-p$ Differentialgleichungen lauten:

$$(34) \qquad \frac{a'_{1\mu}(\alpha_1+\xi_1)t+a'_{2\mu}(\alpha_2+\xi_2)t+\cdots+a'_{n\mu}(\alpha_n+\xi_n)t+b'_\mu t+\cdots}{a_\mu+a_{1\mu}(\alpha_1+\xi_1)t+a_{2\mu}(\alpha_2+\xi_2)t+\cdots+a_{n\mu}(\alpha_n+\xi_n)t+b_\mu t+\cdots},$$

und es gehen somit die Differentialgleichungen (27), wenn die Gleichungen (30) berücksichtigt und

$$(35) \qquad a_{1\lambda}\alpha_1 + a_{2\lambda}\alpha_2 + \cdots + a_{n\lambda}\alpha_n + b_\lambda = A_\lambda$$

gesetzt werden, in die folgenden über:

$$(36)\left\{\begin{aligned}
t^2\frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{a'_{11}\xi_1+a'_{21}\xi_2+\cdots+a'_{n1}\xi_n+c_1't+\cdots}{A_1+a_{11}\xi_1+a_{21}\xi_2+\cdots+a_{n1}\xi_n+c_1t+\cdots}-\alpha_1t-t\xi_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
t^2\frac{d\xi_p}{dt} &= \frac{a'_{1p}\xi_1+a'_{2p}\xi_2+\cdots+a'_{np}\xi_n+c'_pt+\cdots}{A_p+a_{1p}\xi_1+a_{2p}\xi_2+\cdots+a_{np}\xi_n+c_pt+\cdots}-\alpha_pt-t\xi_p\\
t^2\frac{d\xi_{p+1}}{dt} &= \frac{a_{p+1}\alpha_{p+1}t+a'_{1p+1}\xi_1t+\cdots+a'_{np+1}\xi_nt+\cdots}{a_{p+1}+A_{p+1}t+a_{1p+1}\xi_1t+\cdots+a_{np+1}\xi_nt+\cdots}-\alpha_{p+1}t-t\xi_{p+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
t^2\frac{d\xi_n}{dt} &= \frac{a_n\alpha_nt+a'_{1n}\xi_1t+\cdots+a'_{nn}\xi_nt+\cdots}{a_n+A_nt+a_{1n}\xi_1t+\cdots+a_{nn}\xi_nt+\cdots}-\alpha_nt-t\xi_n,
\end{aligned}\right.$$

oder *wenn*

$$A_1,\ A_2,\ \ldots A_p$$

von Null verschieden sind, da dann die reciproken Werthe sämmtlicher Nenner, weil auch $a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots a_n$ nicht ver-

schwinden sollten, in Potenzreihen nach $t, \xi_1, \ldots \xi_n$ entwickelt werden können, für die Umgebung der Nullwerthe das Differentialgleichungsystem:

$$(37)\quad \begin{cases} t^2 \frac{d\xi_1}{dt} = \mathfrak{a}_{11}\xi_1 + \mathfrak{a}_{12}\xi_2 + \cdots + \mathfrak{a}_{1n}\xi_n + \mathfrak{b}_1 t + \cdots \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ t^2 \frac{d\xi_n}{dt} = \mathfrak{a}_{n1}\xi_1 + \mathfrak{a}_{n2}\xi_2 + \cdots + \mathfrak{a}_{nn}\xi_n + \mathfrak{b}_n t + \cdots. \end{cases}$$

Sind jedoch eine oder mehrere der Grössen $A_1, A_2, \ldots A_p$ gleich Null, so ist dieser Schluss nicht erlaubt; mag dann $A_1 = A_2 = \cdots = A_\delta = 0$ sein, so wird eine der δ ersten Differentialgleichungen (36) lauten:

$$(38)\quad t^2 \frac{d\xi_\lambda}{dt} = \frac{a'_{1\lambda}\xi_1 + a'_{2\lambda}\xi_2 + \cdots + a'_{n\lambda}\xi_n + c'_\lambda t + \cdots}{a_{1\lambda}\xi_1 + a_{2\lambda}\xi_2 + \cdots + a_{n\lambda}\xi_n + c_\lambda t + \cdots} - \alpha_\lambda t - t\xi_\lambda,$$

und sich daraus wieder

$$\left(\alpha_\lambda + \xi_\lambda + t\frac{d\xi_\lambda}{dt}\right)(a_{1\lambda}\xi_1 + a_{2\lambda}\xi_2 + \cdots + a_{n\lambda}\xi_n + c_\lambda t + \cdots)$$
$$= a'_{1\lambda}\frac{\xi_1}{t} + a'_{2\lambda}\frac{\xi_2}{t} + \cdots + a'_{n\lambda}\frac{\xi_n}{t} + c'_\lambda + \cdots$$

oder

$$(39)\quad a'_{1\lambda}\left(\frac{\xi_1}{t}\right)_0 + a'_{2\lambda}\left(\frac{\xi_2}{t}\right)_0 + \cdots + a'_{n\lambda}\left(\frac{\xi_n}{t}\right)_0 + c'_\lambda = 0$$
$$(\text{für } \lambda = 1, 2, \ldots \delta)$$

ergeben.

Fassen wir jedoch eine der $p - \delta$ folgenden Differentialgleichungen von (36) in's Auge, welche die Form haben

$$(40)\quad t^2 \frac{d\xi_\mu}{dt} = \frac{a'_{1\mu}\xi_1 + a'_{2\mu}\xi_2 + \cdots + a'_{n\mu}\xi_n + c'_\mu t + \cdots}{A_\mu + a_{1\mu}\xi_1 + a_{2\mu}\xi_2 + \cdots + a_{n\mu}\xi_\mu + c_\mu t + \cdots} - \alpha_\mu t - t\xi_\mu,$$

worin A_μ von Null verschieden ist, so folgt wiederum

$$\left(\alpha_\mu + \xi_\mu + t\frac{d\xi_\mu}{dt}\right)(A_\mu + a_{1\mu}\xi_1 + \cdots + a_{n\mu}\xi_\mu + c_\mu t + \cdots)$$
$$= a'_{1\mu}\frac{\xi_1}{t} + a'_{2\mu}\frac{\xi_2}{t} + \cdots + a'_{n\mu}\frac{\xi_n}{t} + c'_\mu + \cdots$$

oder für $t = 0$

$$(41)\quad a'_{1\mu}\left(\frac{\xi_1}{t}\right)_0 + a'_{2\mu}\left(\frac{\xi_2}{t}\right)_0 + \cdots + a'_{n\mu}\left(\frac{\xi_n}{t}\right)_0 + c'_\mu - A_\mu \alpha_\mu = 0$$
$$(\text{für } \mu = \delta + 1, \ldots p).$$

Endlich ergiebt sich aus den $n-p$ letzten Gleichungen (36)

$$\left(\alpha_\nu + \xi_\nu + t\frac{d\xi_\nu}{dt}\right)(a_\nu + A_\nu t + a_{1\nu}\xi_1 t + \cdots)$$
$$= a_\nu \alpha_\nu + a'_{1\nu}\xi_1 + \cdots + a'_{n\nu}\xi_n + \cdots$$

oder für $t = 0$

$$(42)\quad a'_{1\nu}\left(\frac{\xi_1}{t}\right)_0 + a'_{2\nu}\left(\frac{\xi_2}{t}\right)_0 + \cdots + a'_{n\nu}\left(\frac{\xi_n}{t}\right)_0 = 0 \;(\text{für } \nu = p+1, \ldots n).$$

Wenn sich nun aus den n Gleichungen (39), (41), (42) die Werthe

$$(43)\qquad \left(\frac{\xi_1}{t}\right)_0 = \beta_1, \quad \left(\frac{\xi_2}{t}\right)_0 = \beta_2, \;\cdots \left(\frac{\xi_n}{t}\right)_0 = \beta_n$$

ergeben, so mache man wieder die Substitutionen

$$(44)\quad \xi_1 = (\beta_1 + \eta_1)t, \quad \xi_2 = (\beta_2 + \eta_2)t, \ldots \xi_n = (\beta_n + \eta_n)t,$$

und es wird für $\lambda = 1, 2, \ldots n$

$$t^2\frac{d\xi_\lambda}{dt} = t^2\left[\beta_\lambda + \eta_\lambda + t\frac{d\eta_\lambda}{dt}\right] = t^3\frac{d\eta_\lambda}{dt} + \beta_\lambda t^2 + \eta_\lambda t^2$$

folgen, und somit genau nach denselben Schlüssen wie oben, n Differentialgleichungen analog den Gleichungen (36), nur dass die linken Seiten

$$t^3\frac{d\eta_\lambda}{dt}$$

lauten; sind wieder die den dortigen $A_1, A_2, \ldots A_p$ analogen Grössen

$$B_1, B_2, \ldots B_p,$$

die nach (35) durch die Beziehung definirt sein werden

$$(45)\qquad a_{1\lambda}\beta_1 + a_{2\lambda}\beta_2 + \cdots + a_{n\lambda}\beta_n + c_\lambda = B_\lambda,$$

von Null verschieden, so kommen wir zu einem Systeme von Differentialgleichungen der Form

$$(46)\begin{cases} t^3 \dfrac{d\eta_1}{dt} = \mathfrak{A}_{11}\eta_1 + \mathfrak{A}_{12}\eta_2 + \cdots + \mathfrak{A}_{1n}\eta_n + \mathfrak{B}_1 t + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ t^3 \dfrac{d\eta_n}{dt} = \mathfrak{A}_{n1}\eta_1 + \mathfrak{A}_{n2}\eta_2 + \cdots + \mathfrak{A}_{nn}\eta_n + \mathfrak{B}_n t + \cdots; \end{cases}$$

sind dagegen p_1 der Grössen B_λ Null, so führen analoge Schlüsse entweder zu einem dem Systeme (46) entsprechenden Differentialgleichungsystem, dessen linke Seiten den Factor t^4 haben, oder zu analogen weiteren Folgerungen, u. s. w. Nun ist aber leicht zu sehen, dass nach einer bestimmten Anzahl solcher Operationen die ganzen Zahlen p, p_1, ... immer kleiner werden; denn, da aus (31), (44) u. ä. folgt, dass

$$(47) \qquad \zeta_\varepsilon = \alpha_\varepsilon t + \beta_\varepsilon t^2 + \cdots,$$

ausserdem, wenn die A_λ, B_λ, ... verschwinden, sich aus (35), (45) u. ä. die Beziehungen ergeben

$$(48) \qquad \begin{cases} a_{1\lambda}\alpha_1 + a_{2\lambda}\alpha_2 + \cdots + a_{n\lambda}\alpha_n + b_\lambda = 0 \\ a_{1\lambda}\beta_1 + a_{2\lambda}\beta_2 + \cdots + a_{n\lambda}\beta_n + c_\lambda = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \end{cases}$$

so würde, wenn die Gleichungen bis in's Unendliche fortgingen, durch Multiplication mit t, t^2, ... und Addition

$$(49) \qquad a_{1\lambda}\zeta_1 + a_{2\lambda}\zeta_2 + \cdots + a_{n\lambda}\zeta_n = -(b_\lambda t + c_\lambda t^2 + \cdots)$$

folgen; schliesst man also die Existenz dieser aus den Coefficienten der Gleichungen (27) zusammengesetzten ganz speciellen Relationen zwischen den n Integralelementen des Differentialgleichungsystems (16) aus, indem man in diesem Falle ζ_n aus (49) durch ζ_1, ζ_2, ... ζ_{n-1} ausgedrückt in (16) einsetzen könnte, und dann das so transformirte System $n-1$ter Klasse als das zu untersuchende Differentialgleichungsystem zu betrachten hätte, so folgt, dass man bei Fortsetzung dieser Schlüsse, wenn man ausserdem berücksichtigt, dass man für den Fall, dass

$$a_{1\lambda} = a_{2\lambda} = \cdots = a_{n\lambda} = 0$$

ist, für die Glieder zweiter Dimension im Nenner der Gleichungen (19) die ähnlichen Reductionen anwenden könnte, jedenfalls zu einem Differentialgleichungsystem der Form

$$
(50) \quad \begin{cases}
t^m \dfrac{dX_1}{dt} = M_{11} X_1 + M_{12} X_2 + \cdots + M_{1n} X_n + M_1 t + \cdots \\
t^m \dfrac{dX_2}{dt} = M_{21} X_1 + M_{22} X_2 + \cdots + M_{2n} X_n + M_2 t + \cdots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
t^m \dfrac{dX_n}{dt} = M_{n1} X_1 + M_{n2} X_2 + \cdots + M_{nn} X_n + M_n t + \cdots
\end{cases}
$$

gelangt, worin m eine positive ganze Zahl bedeutet. Es fragt sich nun, ob ein solches Differentialgleichungsystem, in welchem $t = 0$, $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $\dots X_n = 0$ sich entsprechen, im Allgemeinen um $t = 0$ herum eindeutige Integrale haben kann, oder ob dies nur in ganz speciellen Fällen, in denen die Coefficienten der rechten Seite einer oder mehreren bestimmten Bedingungen genügen, stattfinden wird. Dass aber ein solches System, für welches $m > 1$ ist, im Allgemeinen keine eindeutigen Integrale haben kann, lässt sich schon an dem einfachsten Falle *einer* Differentialgleichung der Form

$$
(51) \qquad t^2 \frac{dX}{dt} = aX + bt + b_1 t^2 + b_2 t^3 + \cdots
$$

erkennen.

Denn angenommen dieselbe habe ein solches, das für $t = 0$ verschwindet, also durch

$$
(52) \qquad X = A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \cdots
$$

dargestellt wird, so folgen durch Einsetzen in (51) die Bedingungen

$$
(53) \qquad \begin{cases}
A_1 a + b = 0 \\
A_2 a + b_1 = A_1 \\
A_3 a + b_2 = 2 A_2 \\
A_4 a + b_3 = 3 A_3 \\
\dots\dots\dots,
\end{cases}
$$

aus denen der Reihe nach die Coefficienten $A_1, A_2, A_3, \dots$ bestimmt werden können. Multiplicirt man die n ersten Gleichungen der Reihe nach mit

$$
1, \; a, \; \frac{a^2}{2!}, \; \frac{a^3}{3!}, \; \dots \; \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}
$$

und addirt alle, so folgt

$$(54)\quad A_n \frac{a^n}{(n-1)!} = -\left[b + \frac{b_1 a}{1!} + \frac{b_2 a^2}{2!} + \cdots + \frac{b_{n-1} a^{n-1}}{(n-1)!}\right].$$

Wir wollen nun beweisen, dass die linke Seite dieser Gleichung sich für unendlich grosse n der Null nähert; zu dem Zwecke bilden wir die Reihe

$$(55)\qquad A_1 a + A_2 \frac{a^2}{1!} + A_3 \frac{a^3}{2!} + \cdots,$$

und es wird genügen, die Convergenz derselben nachzuweisen. Nun wird aber wegen der vorausgesetzten Convergenz von (52) auch die Modulnreihe

$$\operatorname{mod} A_1 \operatorname{mod} t + \operatorname{mod} A_2 (\operatorname{mod} t)^2 + \cdots$$

convergent, und somit bekanntlich

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\operatorname{mod} A_n \; (\operatorname{mod} t)^n} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\operatorname{mod} A_n} \; \operatorname{mod} t$$

nicht grösser als 1, also

$$(56)\qquad \operatorname{mod} \left(\sqrt[n]{A_n}\right)_{n=\infty} = \delta$$

sein, worin δ eine endliche Grösse ist; bildet man nun die Reihe der Moduln von (55)

$$(57)\quad \operatorname{mod} A_1 \operatorname{mod} a + \operatorname{mod} A_2 \frac{\operatorname{mod} a^2}{1!} + \operatorname{mod} A_3 \operatorname{mod} \frac{a^3}{2!} + \cdots,$$

so wird für diese

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\operatorname{mod} A_n \frac{(\operatorname{mod} a)^n}{(n-1)!}} = \operatorname{mod} a \cdot \delta \cdot \left(\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n!}}\right)_{n=\infty},$$

oder weil bekanntlich

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

ist,

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\operatorname{mod} A_n \frac{(\operatorname{mod} a)^n}{(n-1)!}} = 0,$$

also die Reihe (57), und somit auch (55) convergent, und es nehmen daher die Glieder derselben gegen Null hin ab; für un-

endlich wachsende n wird sonach die linke Seite, also auch die rechte Seite der Gleichung (54) verschwinden, und somit die Beziehung bestehen müssen

$$b + b_1 \frac{a}{1!} + b_2 \frac{a^2}{2!} + b_3 \frac{a^3}{3!} + \cdots = 0; \tag{58}$$

es wird also die vorgelegte Differentialgleichung (51) *nur dann ein um* $t = 0$ *eindeutiges Integral besitzen können, das für* $t = 0$ *verschwindet, wenn zwischen den in der Differentialgleichung enthaltenen Constanten die Beziehung* (58) *erfüllt ist.* Es lässt sich umgekehrt unmittelbar einsehen, dass, wenn diese erfüllt ist, die mit Hülfe der Beziehungen (53) formal der Differentialgleichung (51) genügende Reihe (52) auch wirklich convergent ist, doch ist dies hier unwesentlich, indem nur gezeigt werden sollte, dass nur in einzelnen Ausnahmefällen *eindeutige* Integrale für Differentialgleichungsysteme von der Form (50) existiren werden, *es wird also der in dieser Nummer 3. behandelte Fall im Allgemeinen keine eindeutigen Integrale liefern*, und die Untersuchung sich somit nur auf die Fälle A) und B) der Nummer 2. zu erstrecken haben, für welche die Differentialgleichungen gemeinsam durch die Form (18) dargestellt waren.

4. Bevor wir nun in der Untersuchung des Differentialgleichungsystems (18) weitergehen, fassen wir die bisher gewonnenen Resultate zusammen.

Ist das Differentialgleichungsystem

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx} &= \frac{\mathfrak{P}_1(x, x_1, x_2, \ldots x_n)}{\mathfrak{Q}_1(x, x_1, x_2, \ldots x_n)} \\ \frac{dx_2}{dx} &= \frac{\mathfrak{P}_2(x, x_1, x_2, \ldots x_n)}{\mathfrak{Q}_2(x, x_1, x_2, \ldots x_n)} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dx} &= \frac{\mathfrak{P}_n(x, x_1, x_2, \ldots x_n)}{\mathfrak{Q}_n(x, x_1, x_2, \ldots x_n)}, \end{aligned}\right. \tag{59}$$

in welchem die $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{Q}$ *Potenzreihen von* $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ *sind, die sämmtlich constante Glieder nicht enthalten, vorgelegt, und soll untersucht werden, ob dasselbe um* $x = 0$ *herum, dem* $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots x_n = 0$ *entsprechen sollen, eindeutige, also*

nach ganzen positiven steigenden Potenzen von x entwickelbare Integrale besitzt, so bestimme man mit Hülfe der Glieder niedrigster Dimension, wie die Gleichungen (3) *und* (4) *es angeben, die als endlich vorausgesetzten Ordnungszahlen* $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ *des Nullwerdens der Functionen* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *im Puncte* $x = 0$; *ergiebt sich irgend eine derselben als rationale gebrochene Zahl, so ist klar, dass die Integrale des Differentialgleichungsystems* (59) *um* $x = 0$ *herum nicht eindeutig sein können*). Sind jedoch* $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ *ganze Zahlen, so setze man den Gleichungen* (8) *gemäss*

$$(60) \qquad x_1 = v_1 x^{\mu_1}, \quad x_2 = v_2 x^{\mu_2}, \quad \ldots \; x_n = v_n x^{\mu_n},$$

dann ergeben sich den Gleichungen (12) *zufolge zur Ermittlung der dem Werthe* $x = 0$ *zugehörigen Werthe* $v_1^0, v_2^0, \ldots v_n^0$ *der Variabeln* $v_1, v_2, \ldots v_n$ *die Bestimmungsgleichungen*

$$(61) \begin{cases} F_1(v_1^0, v_2^0, \ldots v_n^0) = \left(A' v_1^{0\alpha_1'} v_2^{0\alpha_2'} \ldots v_n^{0\alpha_n'} + \cdots\right)\mu_1 v_1^0 \\ \qquad\qquad - \left(A v_1^{0\alpha_1} v_2^{0\alpha_2} \ldots v_n^{0\alpha_n} + \cdots\right) = 0 \\ F_2(v_1^0, v_2^0, \ldots v_n^0) = \left(B' v_1^{0\beta_1'} v_2^{0\beta_2'} \ldots v_n^{0\beta_n'} + \cdots\right)\mu_2 v_2^0 \\ \qquad\qquad - \left(B v_1^{0\beta_1} v_2^{0\beta_2} \ldots v_n^{0\beta_n} + \cdots\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(v_1^0, v_2^0, \ldots v_n^0) = \left(N' v_1^{0\nu_1'} v_2^{0\nu_2'} \ldots v_n^{0\nu_n'} + \cdots\right)\mu_n v_n^0 \\ \qquad\qquad - \left(N v_1^{0\nu_1} v_2^{0\nu_2} \ldots v_n^{0\nu_n} + \cdots\right) = 0. \end{cases}$$

Für ein Werthesystem $v_1^0, v_2^0, \ldots v_n^0$, *welches den Gleichungen* (61) *genügt, aber zugleich einen oder mehrere der Klammerausdrücke dieser Gleichungen zu Null macht, werden im Allgemeinen für das Differentialgleichungsystem keine um* $x = 0$ *herum eindeutigen Integrale existiren, d. h. nur, wenn zwischen den Coefficienten derselben ganz specielle numerische Relationen erfüllt werden, könnte eine Ausnahme eintreten**).*

---

*) Vorher war die Untersuchung auch noch für den Fall, dass $x_1, x_2, \ldots x_n$ von rational gebrochener Ordnung Null werden, also um $x = 0$ herum verzweigt sind, durchgeführt worden.

**) Wir suchen in diesen Betrachtungen Kriterien für die Eindeutigkeit der Integrale ähnlich denen zu gewinnen, wie sie für den Fundamentalsatz von der Existenz eindeutiger Integrale um nicht singuläre Punkte herum aufgestellt wurden, und die nur von der Natur der Ent-

Für die Lösungsysteme von $v_1^0, v_2^0, \ldots v_n^0$ jedoch, für welche keiner der Klammerausdrücke in (61) verschwindet, führen die Substitutionen

$$(62) \quad v_1 = v_1^0 + \zeta_1, \quad v_2 = v_2^0 + \zeta_2, \quad \ldots \quad v_n = v_n^0 + \zeta_n$$

auf ein Differentialgleichungsystem der Form

$$(63) \begin{cases} t\dfrac{d\zeta_1}{dt} = \dfrac{-\dfrac{\partial F_1}{\partial v_1^0}\zeta_1 - \cdots - \dfrac{\partial F_1}{\partial v_n^0}\zeta_n + A_1 t + (t, \zeta_1, \ldots \zeta_n)^2 + (t, \zeta_1, \ldots \zeta_n)^3 + \cdots}{(A' v_1^{0\alpha_1'} \ldots v_n^{0\alpha_n'} + \cdots) + (t, \zeta_1, \ldots \zeta_n)^1 + (t, \zeta_1, \ldots \zeta_n)^2 + \cdots} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t\dfrac{d\zeta_n}{dt} = \dfrac{-\dfrac{\partial F_n}{\partial v_1^0}\zeta_1 - \cdots - \dfrac{\partial F_n}{\partial v_n^0}\zeta_n + A_n t + (t, \zeta_1, \ldots \zeta_n)^2 + (t, \zeta_1, \ldots \zeta_n)^3 + \cdots}{(N' v_1^{0\nu_1'} \ldots v_n^{0\nu_n'} + \cdots) + (t, \zeta_1, \ldots \zeta_n)^1 + (t, \zeta_1, \ldots \zeta_n)^2 + \cdots}, \end{cases}$$

oder durch Entwicklung nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $t, \zeta_1, \ldots \zeta_n$ auf das Differentialgleichungsystem

$$(64) \begin{cases} t\dfrac{d\zeta_1}{dt} = a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \cdots + a_{1n}\zeta_n + b_1 t \\ \qquad\qquad + (t, \zeta_1, \ldots \zeta_n)^2 + (t, \zeta_1, \ldots \zeta_n)^3 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t\dfrac{d\zeta_n}{dt} = a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \cdots + a_{nn}\zeta_n + b_n t \\ \qquad\qquad + (t, \zeta_1, \ldots \zeta_n)^2 + (t, \zeta_1, \ldots \zeta_n)^3 + \cdots, \end{cases}$$

in welchem die Grössen

$$a_{11}, \ldots a_{1n}, b_1, \ldots a_{n1}, \ldots a_{nn}, b_n$$

auch zum Theil oder alle Null sein können, und es bleibt somit nur die Frage zu beantworten, ob ein Differentialgleichungsystem von der Form (64) in der Umgebung des Punktes $t = 0$, dem die Werthe der abhängigen Variabeln

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \cdots = \zeta_n = 0$$

entsprechen sollen, eindeutige, nach positiven steigenden ganzen Potenzen von t entwickelbare Integrale besitzt, unabhängig von den speciellen numerischen Werthen der in die rechten Seiten der Differentialgleichungen eintretenden Coefficienten.

wicklungen der rechten Seiten der Differentialgleichungen und nicht von den numerischen Werthen der Coefficienten dieser Entwicklungen selbst abhingen.

III. Untersuchung der Kriterien für die Eindeutigkeit der Integrale eines Differentialgleichungssystems der Form $x\frac{dy_\varrho}{dx} = (x, y_1, y_2, \dots y_n)^1 + (x, y_1, y_2, \dots y_n)^2 + \cdots \quad (\varrho = 1, 2, \dots n)$ in der Umgebung des Werthes $x = 0$, dem die Nullwerthe der Integrale entsprechen.

1. Wir sehen jetzt ganz davon ab, wie wir auf das am Ende des vorigen Abschnittes aufgestellte System (64) geführt worden sind, für welches nur noch die Kriterien dafür aufzustellen waren, wann dasselbe für verschwindende unabhängige und abhängige Variablen eindeutige Integrale besitze, sondern legen uns jetzt ganz allgemein die Frage vor,

von welcher Natur die für $x = 0$ verschwindenden Integrale des Differentialgleichungssystems

$$(1)\quad \begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx} = \lambda_{11}y_1 + \lambda_{12}y_2 + \cdots + \lambda_{1n}y_n + a_1x \\ \qquad\qquad + (x, y_1, y_2, \dots y_n)^2 + (x, y_1, y_2, \dots y_n)^3 + \cdots \\ x\dfrac{dy_2}{dx} = \lambda_{21}y_1 + \lambda_{22}y_2 + \cdots + \lambda_{2n}y_n + a_2x \\ \qquad\qquad + (x, y_1, y_2, \dots y_n)^2 + (x, y_1, y_2, \dots y_n)^3 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x\dfrac{dy_n}{dx} = \lambda_{n1}y_1 + \lambda_{n2}y_2 + \cdots + \lambda_{nn}y_n + a_nx \\ \qquad\qquad + (x, y_1, y_2, \dots y_n)^2 + (x, y_1, y_2, \dots y_n)^3 + \cdots \end{cases}$$

in der Umgebung von $x = 0$ sind.

Multipliciren wir, um zunächst das Differentialgleichungsystem (1) auf ein einfacheres zu reduciren, die einzelnen Gleichungen desselben mit den noch näher zu bestimmenden constanten Grössen

$$A_1, \quad A_2, \quad \dots A_n,$$

und addiren alle n Gleichungen, so erhält man

$$(2)\qquad x\frac{d}{dx}[A_1y_1 + A_2y_2 + \cdots + A_ny_n] =$$

$$(A_1\lambda_{11} + A_2\lambda_{21} + \cdots + A_n\lambda_{n1})y_1 + (A_1\lambda_{12} + A_2\lambda_{22} + \cdots + A_n\lambda_{n2})y_2 +$$
$$+ (A_1\lambda_{1n} + A_2\lambda_{2n} + \cdots + A_n\lambda_{nn})y_n$$
$$+ (A_1a_1 + A_2a_2 + \cdots + A_na_n)x + (x, y_1, y_2, \dots y_n)^2$$
$$+ (x, y_1, y_2, \dots y_n)^3 + \cdots;$$

setzt man nun

(3) $$A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n = Y,$$

und bestimmt die bisher noch willkürlichen Grössen $A_1, A_2, \ldots A_n$ so, dass

(4) $$(A_1\lambda_{11}+A_2\lambda_{21}+\cdots+A_n\lambda_{n1})y_1+(A_1\lambda_{12}+\cdots+A_n\lambda_{n2})y_2+\cdots$$
$$+(A_1\lambda_{1n}+\cdots+A_n\lambda_{nn})y_n$$
$$= P(A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n) = PY,$$

worin P noch zu ermitteln sein wird, oder dass, wenn die Coefficienten von $y_1, y_2, \ldots y_n$ einander gleich gesetzt werden,

(5) $$\begin{cases} A_1(\lambda_{11} - P) + A_2\lambda_{21} + \cdots + A_n\lambda_{n1} = 0 \\ A_1\lambda_{12} + A_2(\lambda_{22} - P) + \cdots + A_n\lambda_{n2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1\lambda_{1n} + A_2\lambda_{2n} + \cdots + A_n(\lambda_{nn} - P) = 0 \end{cases}$$

wird, so folgt, dass P eine Lösung der Gleichung n^{ten} Grades

(6) $$\begin{vmatrix} \lambda_{11} - P & \lambda_{21} & \ldots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} - P & \ldots & \lambda_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \ldots & \lambda_{nn} - P \end{vmatrix} = 0$$

sein muss, und dass sich zu jeder Lösung

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots P_n$$

dieser Gleichung*) die zugehörigen Werthe von $A_1, A_2,$

*) Wir wollen im Folgenden die im Allgemeinen gültige Voraussetzung machen, dass die n Lösungen $P_1, P_2, \ldots P_n$ der Gleichung (6) sämmtlich verschieden sind; will man aber für ein bestimmt vorgelegtes Differentialgleichungsystem auch den Fall gleicher Lösungen der Gleichung (6) in Betracht ziehen, so werden die folgenden Schlüsse, wie es thatsächlich nachher geschehen wird, so zu modificiren sein, dass man die Coefficienten des Differentialgleichungsystemes (1) sich unendlich wenig ändern lässt, wodurch die Lösungen der analogen Gleichung (6) wieder unter einander verschieden sein werden, und dann in den durch analytische Ausdrücke gefundenen oder in ihrem Charakter bestimmten Integralen die unendlich wenig veränderten Coefficienten wieder ihre ursprünglichen Werthe annehmen lässt.

$\ldots A_n$ aus dem Gleichungsysteme (5) ergeben. Bezeichnen wir die zu P_ε gehörigen Werthe dieser Grössen mit

$$A_{1\varepsilon}, \quad A_{2\varepsilon}, \quad \ldots A_{n\varepsilon},$$

und setzen ferner der Gleichung (3) gemäss

$$(7) \quad \begin{cases} A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + \cdots + A_{n1}y_n = Y_1 \\ A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{n2}y_n = Y_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{1n}y_1 + A_{2n}y_2 + \cdots + A_{nn}y_n = Y_n, \end{cases}$$

so werden vermöge der Gleichungen (4) und (7), aus denen $y_1, y_2, \ldots y_n$ sich homogen und linear durch $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ mit constanten Coefficienten ausdrücken lassen, die Differentialgleichungen (2) das nachfolgende System liefern:

$$(8) \begin{cases} x\dfrac{dY_1}{dx} = P_1 Y_1 + \alpha_1 x + (x, Y_1, Y_2, \ldots Y_n)^2 + \cdots \\ x\dfrac{dY_2}{dx} = P_2 Y_2 + \alpha_2 x + (x, Y_1, Y_2, \ldots Y_n)^2 + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x\dfrac{dY_n}{dx} = P_n Y_n + \alpha_n x + (x, Y_1, Y_2, \ldots Y_n)^2 + \cdots. \end{cases}$$

Bezeichnen wir nun wieder die abhängigen Variabeln dieses Differentialgleichungsystems mit $y_1, y_2, \ldots y_n$, so bleibt uns für ein System der Form

$$(9) \begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx} = \lambda_1 y_1 + \alpha_1 x + (x, y_1, \ldots y_n)^2 + (x, y_1, \ldots y_n)^3 + \cdots \\ x\dfrac{dy_2}{dx} = \lambda_2 y_2 + \alpha_2 x + (x, y_1, \ldots y_n)^2 + (x, y_1, \ldots y_n)^3 + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x\dfrac{dy_n}{dx} = \lambda_n y_n + \alpha_n x + (x, y_1, \ldots y_n)^2 + (x, y_1, \ldots y_n)^3 + \cdots \end{cases}$$

die Natur der für $x = 0$ verschwindenden Integrale in der Umgebung dieses Punktes zu untersuchen*).

---

*) Es mag noch bemerkt werden, dass die Substitution

$$x = X^\varrho,$$

wofür

$$\frac{dy_r}{dx} = \frac{dy_r}{dX}\,\frac{1}{\varrho X^{\varrho-1}}, \text{ also } x\frac{dy_r}{dx} = \frac{1}{\varrho} X \frac{dy_r}{dX}$$

2. Wir wollen nun zeigen, dass man unter einer für die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ gleich aufzustellenden Bedingung die nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitenden Entwicklungen

$$(10) \qquad \begin{cases} y_1 = c_{11}x + c_{12}x^2 + c_{13}x^3 + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n = c_{n1}x + c_{n2}x^2 + c_{n3}x^3 + \cdots \end{cases}$$

so bestimmen kann, dass sie formell dem Differentialgleichungsystem (9) genügen; wenn dann auch deren Convergenz festgestellt sein wird, so wird damit die Existenz eindeutiger Integrale um $x = 0$ herum erwiesen sein.

Setzt man (10) in (9) ein, so folgt

$$(11) \begin{cases} x(c_{11}+2c_{12}x+3c_{13}x^2+\cdots) = \lambda_1(c_{11}x+c_{12}x^2+\cdots)+\alpha_1 x \\ \qquad\qquad + (x, c_{11}x+\cdots, \cdots c_{n1}x+\cdots)^2+\cdots \\ x(c_{21}+2c_{22}x+3c_{23}x^2+\cdots) = \lambda_2(c_{21}x+c_{22}x^2+\cdots)+\alpha_2 x \\ \qquad\qquad + (x, c_{11}x+\cdots, \cdots c_{n1}x+\cdots)^2+\cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x(c_{n1}+2c_{n2}x+3c_{n3}x^2+\cdots) = \lambda_n(c_{n1}x+c_{n2}x^2+\cdots)+\alpha_n x \\ \qquad\qquad + (x, c_{11}x+\cdots, \cdots c_{n1}x+\cdots)^2+\cdots, \end{cases}$$

und durch Identificirung der Coefficienten von x^μ:

$$(12) \quad \begin{cases} \mu c_{1\mu} = \lambda_1 c_{1\mu} + \varphi_{1\mu} \\ \mu c_{2\mu} = \lambda_2 c_{2\mu} + \varphi_{2\mu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mu c_{n\mu} = \lambda_n c_{n\mu} + \varphi_{n\mu}, \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} (\mu - \lambda_1) c_{1\mu} = \varphi_{1\mu} \\ (\mu - \lambda_2) c_{2\mu} = \varphi_{2\mu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (\mu - \lambda_n) c_{n\mu} = \varphi_{n\mu}, \end{cases}$$

worin $\varphi_{1\mu}, \varphi_{2\mu}, \ldots \varphi_{n\mu}$ Polynome der Coefficienten der Differentialgleichungen (9) und der Grössen

---

wird, das System (9) in ein anderes der Form

$$X\frac{dy_1}{dX} = \varrho\lambda_1 y_1 + (X, y_1, y_2, \cdots y_n)^2 + (X, y_1, y_2, \cdots y_n)^3 + \cdots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$X\frac{dy_n}{dX} = \varrho\lambda_n y_n + (X, y_1, y_2, \cdots y_n)^2 + (X, y_1, y_2, \cdots y_n)^3 + \cdots$$

überführt, in welchem in den Reihen der rechten Seiten der Differentialgleichungen die erste Potenz der unabhängigen Variabeln fehlt.

$c_{11}, c_{12}, \ldots c_{1\mu-1}, \quad c_{21}, c_{22}, \ldots c_{2\mu-1}, \ldots c_{n1}, \quad c_{n2}, \ldots c_{n\mu-1}$

mit ganzzahligen Coefficienten sind. *Sind somit* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *nicht positive ganze Zahlen,* so erhält man durch successive Berechnung aus den Gleichungen (12)

$$(13) \qquad c_{1\mu} = \psi_{1\mu}, \quad c_{2\mu} = \psi_{2\mu}, \quad \ldots c_{n\mu} = \psi_{n\mu},$$

worin die ψ-Functionen Summen von Ausdrücken bedeuten, deren Zähler Producte aus den Coefficienten der Differentialgleichungen in ganze Zahlen sind, und deren Nenner die Form haben

$$(A) \quad 1-\lambda_r, \ (1-\lambda_r)(2-\lambda_r), \ (1-\lambda_r)(2-\lambda_r)(3-\lambda_r), \ldots$$
$$(1-\lambda_r)(2-\lambda_r), \ldots (\mu-\lambda_r),$$

die der Annahme nach nicht Null sein können; wir wollen den kleinsten Modul der Factoren

$$1-\lambda_r, \quad 2-\lambda_r, \quad 3-\lambda_r, \ldots$$

für alle $r = 1, 2, \ldots n$ mit m bezeichnen.

Berechnet man nun alle Grössen $c_{1\mu}, \ldots c_{n\mu}$ aus den Gleichungen (13), so werden die mit Hülfe dieser Grössen gebildeten Reihen (10) jedenfalls formal dem Differentialgleichungsystem (9) Genüge leisten, und es kommt nur noch darauf an nachzuweisen, dass dieselben in gewissen Bereichen um den Nullpunkt herum convergent sind. Mag nun die rechte Seite der ersten Gleichung von (9) als Function der von einander unabhängigen Variabeln $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ aufgefasst um $x=0, y_1=0, \ldots y_n=0$ herum Convergenzkreise mit den Radien $\varrho_1, r_{11}, \ldots r_{1n}$, die zweite mit den Radien $\varrho_2, r_{21}, \ldots r_{2n}$, die letzte mit den Radien $\varrho_n, r_{n1}, \ldots r_{nn}$ besitzen, und werden die Coefficienten des Gliedes $x^\alpha y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha_n}$ in der ersten, zweiten, ... n^{ten} eben dieser Reihen mit

$$A_{\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \quad B_{\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \quad \ldots N_{\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

bezeichnet, so werden wegen der Convergenz der Reihen bekanntlich die Ausdrücke

$$\operatorname{mod} A_{\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \varrho_1^\alpha r_{11}^{\alpha_1} r_{12}^{\alpha_2} \ldots r_{1n}^{\alpha_n}, \ \operatorname{mod} B_{\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \varrho_2^\alpha r_{21}^{\alpha_1} r_{22}^{\alpha_2} \ldots r_{2n}^{\alpha_n},$$
$$\ldots \operatorname{mod} N_{\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \varrho_n^\alpha r_{n1}^{\alpha_1} r_{n2}^{\alpha_2} \ldots r_{nn}^{\alpha_n}$$

für die unendlich wachsende Summe $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ gegen Null convergiren, und sich daher eine endliche Grösse M angeben lassen, unter der alle diese Ausdrücke liegen, so dass

$$(14)\quad \begin{cases} \operatorname{mod} A_{\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} < \dfrac{M}{\varrho_1^{\alpha} r_{11}^{\alpha_1} r_{12}^{\alpha_2} \ldots r_{1n}^{\alpha_n}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \operatorname{mod} N_{\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} < \dfrac{M}{\varrho_n^{\alpha} r_{n1}^{\alpha_1} r_{n2}^{\alpha_2} \ldots r_{nn}^{\alpha_n}} \end{cases}$$

ist, und wenn nun die kleinste der Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ mit ϱ und die kleinste der Grössen $r_{1\alpha}, r_{2\alpha}, \ldots r_{n\alpha}$ mit r_α bezeichnet wird, so werden um so mehr.

$$(15)\quad \operatorname{mod} A_{\alpha\alpha_1\alpha_2,\ldots\alpha_n}, \ldots \operatorname{mod} N_{\alpha\alpha_1\alpha_2,\ldots\alpha_n} < \frac{M}{\varrho^{\alpha} r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \ldots r_n^{\alpha_n}}\ .$$

sein.

Setzt man somit in den Reihen (10) für die c-Grössen diejenigen Werthe, welche aus den oben in (13) gefundenen Ausdrücken dadurch hervorgehen, dass man statt der einzelnen Glieder ihre Moduln, statt der Moduln von $A, B, \ldots N$ die durch (15) gegebenen oberen Grenzen substituirt, und ausserdem die Moduln der Nenner der $\psi_{\gamma\delta}$-Grössen, deren Form durch (A) angezeigt ist, noch dadurch kleiner, also die Moduln der $\psi_{\gamma\delta}$ noch dadurch grösser macht, dass man die Moduln der Ausdrücke

$$1 - \lambda_r,\quad 2 - \lambda_r,\quad 3 - \lambda_r,\ \ldots$$

durch den oben bezeichneten kleinsten ihrer Moduln m ersetzt, so mögen $\psi_{1\mu}, \psi_{2\mu}, \ldots \psi_{n\mu}$ in

$$(16)\qquad C_{1\mu} = \chi_{1\mu},\quad C_{2\mu} = \chi_{2\mu},\quad \ldots\ C_{n\mu} = \chi_{n\mu}$$

übergehen, und es ist klar, dass, wenn die Convergenz der Reihen

$$(17)\quad \begin{cases} Y_1 = C_{11}x + C_{12}x^2 + C_{13}x^3 + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n = C_{n1}x + C_{n2}x^2 + C_{n3}x^3 + \cdots \end{cases}$$

festgestellt werden kann, auch die Convergenz der Reihen (10) erwiesen sein wird.

Bildet man aber die Gleichungen

$$(18)\begin{cases} m\eta_1 = \frac{M}{\varrho}x + \frac{M}{\varrho^2}x^2 + \frac{M}{r_1^2}\eta_1^2 + \cdots + \frac{M}{r_n^2}\eta_n^2 + \frac{M}{\varrho r_1}x\eta_1 + \cdots \\ \qquad + \frac{M}{r_{n-1}r_n}\eta_{n-1}\eta_n + \cdots \\ m\eta_2 = \frac{M}{\varrho}x + \frac{M}{\varrho^2}x^2 + \frac{M}{r_1^2}\eta_1^2 + \cdots + \frac{M}{r_n^2}\eta_n^2 + \frac{M}{\varrho r_1}x\eta_1 + \cdots \\ \qquad + \frac{M}{r_{n-1}r_n}\eta_{n-1}\eta_n + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m\eta_n = \frac{M}{\varrho}x + \frac{M}{\varrho^2}x^2 + \frac{M}{r_1^2}\eta_1^2 + \cdots + \frac{M}{r_n^2}\eta^{n2} + \frac{M}{\varrho r_1}x\eta_1 + \cdots \\ \qquad + \frac{M}{r_{n-1}r_n}\eta_{n-1}\eta_n + \cdots, \end{cases}$$

so werden dieselben nach dem in III. 7. des ersten Kapitels bewiesenen Satze jedenfalls durch convergirende Potenzreihen befriedigt werden können, weil die Functionaldeterminante dieser Gleichungen für $x = 0$, $\eta_1 = 0, \ldots \eta_n = 0$ den Werth

$$\begin{vmatrix} m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & m \end{vmatrix}$$

annimmt, welcher von Null verschieden ist; setzt man diese Potenzreihen nun mit unbestimmten Coefficienten an

$$(19)\begin{cases} \eta_1 = k_{11}x + k_{12}x^2 + k_{13}x^3 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_n = k_{n1}x + k_{n2}x^2 + k_{n3}x^3 + \cdots, \end{cases}$$

und führt diese Werthe in die Gleichungen (18) ein, um die k zu bestimmen, so erhält man die folgenden identisch zu erfüllenden Gleichungen

$$
(20)\begin{cases}
m(k_{11}x+k_{12}x^2+\cdots)=\frac{M}{\varrho}x+\frac{M}{\varrho^2}x^2+\frac{M}{r_1^2}(k_{11}x+k_{12}x^2+\cdots)^2+\cdots \\
\qquad +\frac{M}{r_n^2}(k_{n1}x+k_{n2}x^2+\cdots)^2 \\
\qquad +\frac{M}{\varrho r_1}x(k_{11}x+k_{12}x^2+\cdots)+\cdots \\
\qquad +\frac{M}{r_{n-1}r_n}(k_{n-11}x+\cdots)(k_{n1}x+\cdots) \\
\qquad +\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
m(k_{n1}x+k_{n2}x^2+\cdots)=\frac{M}{\varrho}x+\frac{M}{\varrho^2}x^2+\frac{M}{r_1^2}(k_{11}x+k_{12}x^2+\cdots)^2+\cdots \\
\qquad +\frac{M}{r_n^2}(k_{n1}x+k_{n2}x^2+\cdots)^2 \\
\qquad +\frac{M}{\varrho r_1}x(k_{11}x+k_{12}x^2+\cdots)+\cdots \\
\qquad +\frac{M}{r_{n-1}r_n}(k_{n-11}x+\cdots)(k_{n1}x+\cdots) \\
\qquad +\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Durch Identificirung der Coefficienten von x^μ ergiebt sich

$$(21)\qquad mk_{1\mu}=\Phi_{1\mu},\quad mk_{2\mu}=\Phi_{2\mu},\quad \ldots\; mk_{n\mu}=\Phi_{n\mu},$$

worin die Grössen $\Phi_{1\mu}, \Phi_{2\mu}, \ldots \Phi_{n\mu}$ Polynome der Coefficienten der rechten Seiten der Gleichungen (20) und der Grössen

$$k_{11}, \ldots k_{1\mu-1},\quad k_{21}, \ldots k_{2\mu-1}, \ldots k_{n1}, \ldots k_{n\mu-1}$$

mit ganzzahligen Coefficienten sind, und man sieht sogleich durch Vergleichung mit (11), (12) und (13), dass die k unmittelbar aus den c hervorgehen, wenn statt der Moduln der Grössen $A, B, \ldots N$ die durch (15) gegebenen oberen Grenzen und statt der Moduln der Ausdrücke $1-\lambda_r$, $2-\lambda_r, \ldots$ der kleinste derselben m substituirt wird, d. h. dass

$$(22)\qquad C_{\alpha\beta}=k_{\alpha\beta}$$

ist. Da nun die Reihen (19) convergent waren, so sind es auch die Reihen (17) und daher auch aus den angegebenen Gründen die Reihen (10), und wir erhalten somit den folgenden wichtigen Satz:

Das System von Differentialgleichungen

$$(23)\begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx}=\lambda_1 y_1+\alpha_1 x+(x,y_1,y_2,\dots y_n)^2+(x,y_1,y_2,\dots y_n)^3+\cdots \\ x\dfrac{dy_2}{dx}=\lambda_2 y_2+\alpha_2 x+(x,y_1,y_2,\dots y_n)^2+(x,y_1,y_2,\dots y_n)^3+\cdots \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x\dfrac{dy_n}{dx}=\lambda_n y_n+\alpha_n x+(x,y_1,y_2,\dots y_n)^2+(x,y_1,y_2,\dots y_n)^3+\cdots \end{cases}$$

hat, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ *nicht positive ganze Zahlen bedeuten, ein um* $x=0$ *herum eindeutiges Integralsystem, dessen Elemente für* $x=0$ *sämmtlich verschwinden; dabei können einzelne der Integralelemente oder auch alle identisch verschwinden.*

Da nun die Gleichungen (9) aus (1) vermöge der Substitutionen (7) abgeleitet sind, so *werden also auch in diesem Falle die Integrale* $y_1, y_2, \dots y_n$ *des Systemes* (1) *um* $x=0$ *herum eindeutige Functionen von* x *sein,* wobei jedoch für die Reduction vorausgesetzt werden musste, dass die Gleichung (6) nur verschiedene Lösungen besitzt.

Beachtet man jedoch, dass für den Fall gleicher Lösungen eine unendlich kleine Variation der Coefficienten des Differentialgleichungssystems für die neue Gleichung (6) verschiedene Lösungen, also für das neue Differentialgleichungssystem eindeutige Integrale liefern wird, und dass, wenn man diese Variationen wieder verschwinden lässt, keiner der Coefficienten der Integralreihen unendlich werden kann, so erkennt man die allgemeine Gültigkeit des eben ausgesprochenen Satzes für das Differentialgleichungsystem (1) ohne jegliche Beschränkung für die Lösungen der Gleichung (6).

3. *Man kann nun leicht einsehen, dass das Differentialgleichungsystem* (23) *nur dieses eine um* $x=0$ *herum eindeutige Integralsystem besitzt, für welches alle Integralelemente für* $x=0$ *verschwinden, wie man auch in diesen Punkt eintreten mag.*

Denn angenommen es bestünde ausser dem eindeutigen Integralsysteme

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \dots \eta_n$$

noch ein anderes, das wir in die Form setzen wollen

$$\eta_1+Y_1, \quad \eta_2+Y_2, \quad \dots \eta_n+Y_n,$$

so dass auch $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ für $x=0$ verschwinden, so würde für $\nu=1, 2, \dots n$ identisch erfüllt sein

$$(24)\quad x\frac{d\eta_\nu}{dx} = \lambda_\nu \eta_\nu + \alpha_\nu x + (x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)^2 + \cdots,$$

$$(25)\quad x\frac{d(\eta_\nu + Y_\nu)}{dx} = \lambda_\nu(\eta_\nu + Y_\nu) + \alpha_\nu x + (x, \eta_1 + Y_1, \ldots \eta_n + Y_n)^2 + \cdots,$$

und durch Abziehen

$$(26)\quad x\frac{dY_\nu}{dx} = \lambda_\nu Y_\nu + [x, \eta_1, \ldots \eta_n, Y_1, \ldots Y_n],$$
$$(\text{für } \nu = 1, 2, \ldots n),$$

worin die Klammer $[x, \eta_1, \ldots \eta_n, Y_1, \ldots Y_n]$ nicht Posten enthält, welche nur aus den Grössen $x, \eta_1, \ldots \eta_n$ zusammengesetzt sind, da alle diese beim Abziehen fortfielen.

Sei nun

$$\eta_\varrho = c_{\varrho 1} x + c_{\varrho 2} x^2 + \cdots$$
$$Y_\varrho = C_{\varrho 1} x + C_{\varrho 2} x^2 + \cdots,$$

und Y_μ diejenige der Grössen $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$, welche mit dem kleinsten Exponenten von x in ihrer Entwicklung

$$(27)\quad Y_\mu = C_{\mu\sigma} x^\sigma + C_{\mu\sigma+1} x^{\sigma+1} + \cdots$$

beginnt, so wird sich aus der μ^{ten} Differentialgleichung des Systemes (26)

$$(28)\quad x\frac{dY_\mu}{dx} = \lambda_\mu Y_\mu + [x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n, Y_1, Y_2, \ldots Y_n]$$

durch Einsetzen aller Reihenentwicklungen von $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$

$$(29)\quad x(\sigma C_{\mu\sigma} x^{\sigma-1} + (\sigma + 1) C_{\mu\sigma+1} x^\sigma + \cdots)$$
$$= \lambda_\mu (C_{\mu\sigma} x^\sigma + C_{\mu\sigma+1} x^{\sigma+1} + \cdots) + K_1 x^{\sigma+1} + K_2 x^{\sigma+2} + \cdots$$

ergeben, weil die anderen Y mindestens mit x_σ beginnen und entweder noch mit x oder η_τ oder Y_τ multiplicirt sind; daraus würde aber folgen

$$(30)\quad \sigma C_{\mu\sigma} = \lambda_\mu C_{\mu\sigma},$$

d. h. es wäre $\lambda_\mu = \sigma$ gegen die Voraussetzung eine ganze positive Zahl, und es giebt somit, wie oben behauptet wurde, nur *ein* um $x = 0$ herum verschwindendes eindeutiges Integralsystem der Differentialgleichungen (23).

Um nun zu dem oben ausgeschlossenen Falle überzugehen, *in welchem einer oder mehrere der in den Differentialgleichungen* (9) *auftretenden Coefficienten der ersten Potenzen der abhängigen Variabeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ positive ganze Zahlen sind*, schicken wir den folgenden Hülfsatz voraus.

4. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ zunächst noch beliebige Zahlen, *nur den Fall ausgenommen, dass eine dieser Grössen der Einheit gleich ist*, und bemerkt man, dass, wenn $y_1, \ldots y_n$ eindeutige Integrale des Systems (9) sein sollen, sich aus den einzelnen Differentialgleichungen

$$(31) \quad \left(\frac{y_1}{x}\right)_0 = \frac{\alpha_1}{1-\lambda_1}, \quad \left(\frac{y_2}{x}\right)_0 = \frac{\alpha_2}{1-\lambda_2}, \quad \ldots \left(\frac{y_n}{x}\right)_0 = \frac{\alpha_n}{1-\lambda_n}$$

ergiebt, so wird sich durch die Substitutionen

$$(32) \quad \begin{cases} y_1 = -\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_1 - 1} + \eta_1\right) x \\ y_2 = -\left(\frac{\alpha_2}{\lambda_2 - 1} + \eta_2\right) x \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = -\left(\frac{\alpha_n}{\lambda_n - 1} + \eta_n\right) x, \end{cases}$$

wie man sofort sieht, aus den Gleichungen (9) das folgende System von Differentialgleichungen ergeben:

$$(33) \quad \begin{cases} x\frac{d\eta_1}{dx} = (\lambda_1 - 1)\eta_1 + \beta_1 x + (x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)^2 + \cdots \\ x\frac{d\eta_2}{dx} = (\lambda_2 - 1)\eta_2 + \beta_2 x + (x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)^2 + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x\frac{d\eta_n}{dx} = (\lambda_n - 1)\eta_n + \beta_n x + (x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)^2 + \cdots, \end{cases}$$

in welchen vermöge der Gleichungen (31) dem $x = 0$ die Anfangswerthe $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_n = 0$ entsprechen, und worin die reellen Theile der Coefficienten von resp. $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ um eine Einheit kleiner sind als die entsprechenden Coefficienten in dem Differentialgleichungsystem (9); wendet man auf das System (33) wiederum Substitutionen analog (32) an, indem man annimmt, dass keine der Grössen $\lambda_1 - 1$, $\lambda_2 - 1, \ldots \lambda_n - 1$ der Einheit gleich war, so erhält man wieder n entsprechende Differentialgleichungen, für welche die reellen Theile der Coefficienten der ersten Potenzen der abhängigen Variabeln um zwei Einheiten kleiner sind als die entsprechenden im Systeme (9), u. s. w. Auf diese Weise wird man entweder zu einem Differentialgleichungsysteme kommen, in welchem die ersten ε Gleichungen zu Coefficienten von resp. $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\varepsilon$ die Einheit haben, also das System die Form hat

$$(34)\quad \begin{cases} x\dfrac{d\eta_1}{dx} = \eta_1 + \gamma_1 x + (x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)^2 + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x\dfrac{d\eta_\varepsilon}{dx} = \eta_\varepsilon + \gamma_\varepsilon x + (x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)^2 + \cdots \\ x\dfrac{d\eta_{\varepsilon+1}}{dx} = \lambda_{\varepsilon+1}\eta_{\varepsilon+1} + \gamma_{\varepsilon+1} x + (x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)^2 + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x\dfrac{d\eta_n}{dx} = \lambda_n\eta_n + \gamma_n x + (x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)^2 + \cdots, \end{cases}$$

oder man wird bei der Reduction überhaupt nicht auf Coefficienten der ersten Potenz der abhängigen Variabeln geführt, welche der Einheit gleich sind, und dann wird man die reellen Theile dieser Coefficienten durch successive Anwendung der Substitutionen (32) offenbar zu Null oder negativ machen können, und wir finden somit,

dass das Differentialgleichungsystem (9) *durch successiv angewandte Substitutionen von der Form* (32) *in ein ähnliches umgeformt werden kann, in welchem entweder die reellen Theile der Coefficienten der ersten Potenzen von $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ sämmtlich Null oder negativ sind, oder in ein solches, in welchem mindestens einer dieser Coefficienten die positive Einheit ist, ausserdem dem $x = 0$ die Werthe $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_n = 0$ entsprechen.*

5. Betrachten wir also den noch zu behandelnden Fall, in welchem eine oder mehrere der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ der Differentialgleichungen (9) positive ganze Zahlen sind, so wird sich jedenfalls dieses System nach dem eben bewiesenen Hülfsatze in eines der Form transformiren lassen

$$(35)\quad \begin{cases} x\dfrac{dY_1}{dx} = Y_1 + a_1 x + (x, Y_1, \ldots Y_n)^2 + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y\dfrac{dY_k}{dx} = Y_k + a_k x + (x, Y_1, \ldots Y_n)^2 + \cdots \\ x\dfrac{dY_{k+1}}{dx} = \mu_{k+1} Y_{k+1} + a_{k+1} x + (x, Y_1, \ldots Y_n)^2 + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x\dfrac{dY_n}{dx} = \mu_n Y_n + a_n x + (x, Y_1, \ldots Y_n)^2 + \cdots, \end{cases}$$

und es ist zu untersuchen, ob dieses für $x = 0$, wofür $Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_n = 0$ sind, eindeutige Integrale besitzen kann. Angenommen nun es wäre

$$(36) \quad \begin{cases} Y_1 = c_{11} x + c_{12} x^2 + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_n = c_{n1} x + c_{n2} x^2 + \cdots, \end{cases}$$

so folgte durch Einsetzen z. B. in die erste der Gleichungen (35)

$$\begin{aligned} x(c_{11} + 2c_{12}x + \cdots) &= c_{11}x + c_{12}x^2 + \cdots \\ &+ a_1 x + (x, c_{11}x + \cdots, \cdots c_{n1}x + \cdots)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

also giebt es *im Allgemeinen* kein eindeutiges Integral, da sonst $a_1 = 0$ sein müsste.

Ist also eine der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ in den Differentialgleichungen (9) *eine positive ganze Zahl, so hat das Differentialgleichungssystem im Allgemeinen kein um $x = 0$ eindeutiges Integralsystem.*

In dem speciellen Falle, dass in den Differentialgleichungen (35) *die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_k$ Null sind,* also die Differentialgleichungen lauten

$$(37) \quad \begin{cases} x \dfrac{dY_1}{dx} = Y_1 + (x, Y_1, \ldots Y_n)^2 + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x \dfrac{dY_k}{dx} = Y_k + (x, Y_1, \ldots Y_n)^2 + \cdots \\ x \dfrac{dY_{k+1}}{dx} = \mu_{k+1} Y_{k+1} + a_{k+1} x + (x, Y_1, \ldots Y_n)^2 + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x \dfrac{dY_n}{dx} = \mu_n Y_n + a_n x + (x, Y_1, \ldots Y_n)^2 + \cdots, \end{cases}$$

worin $\mu_{k+1}, \ldots \mu_n$ willkürliche Grössen bedeuten, die nur der Bedingung unterlagen, dass keine von ihnen der positiven Einheit gleich ist, mache man die Substitutionen

$$(38) \qquad Y_1 = xZ_1, \; Y_2 = xZ_2, \ldots Y_k = xZ_k,$$

$$(39)\quad Y_{k+1} = -\left(\frac{a_{k+1}}{\mu_{k+1}-1} + Z_{k+1}\right)x, \;\ldots\; Y_n = -\left(\frac{a_n}{\mu_n - 1} + Z_n\right)x,$$

und erhält, wie unmittelbar zu sehen, ein Differentialgleichungsystem der Form

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{dZ_1}{dx} = c_1 + (x, Z_1, Z_2, \ldots Z_n)^1 + (x, Z_1, \ldots Z_n)^2 + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{dZ_k}{dx} = c_k + (x, Z_1, Z_2, \ldots Z_n)^1 + (x, Z_1, \ldots Z_n)^2 + \cdots \\ x\dfrac{dZ_{k+1}}{dx} = (\mu_{k+1} - 1)\, Z_{k+1} + b_{k+1}x + (x, Z_1, \ldots Z_n)^2 + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x\dfrac{dZ_n}{dx} = (\mu_n - 1)\, Z_n + b_n x + (x, Z_1, \ldots Z_n)^2 + \cdots. \end{cases}$$

Ist nun keine der Grössen $\mu_{k+1}, \ldots \mu_n$ eine positive ganze Zahl, so würde, da die ersten k Gleichungen des Systemes (40) mit x multiplicirt wieder die frühere Form annehmen, in welcher die λ den oben nicht ausgenommenen Werth Null haben, das Differentialgleichungsystem (40), weil keine der neuen λ-Grössen einen positiven ganzen Werth hat, *eindeutige verschwindende Integrale haben, und ausserdem unendlich viele Systeme eindeutiger nicht verschwindender Integrale*, weil man für $x = 0$ die Werthe $Z_1 = \zeta_1$, $Z_2 = \zeta_2, \ldots Z_k = \zeta_k$ willkürlich wählen kann, wenn diese nur noch in die Convergenzbereiche der Reihen auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen (40) fallen, und die Substitutionen

$$Z_1 = \zeta_1 + Z_1', \quad Z_2 = \zeta_2 + Z_2', \quad \ldots\; Z_n = \zeta_n + Z_n'$$

die Form der Gleichungen (40) nicht ändern; war aber eine der Grössen $\mu_{k+1}, \ldots \mu_n$ eine positive ganze Zahl, so ist es auch eine der Zahlen $\mu_{k+1} - 1, \ldots \mu_n - 1$ des Systemes (40) z. B. $\mu_{k+1} - 1$, die zugleich die kleinste dieser positiven ganzen Zahlen sein mag, und macht man dann die Substitutionen

$$(41)\qquad Z_1 = (T_1 + c_1)x, \;\ldots\; Z_k = (T_k + c_k)x,$$

$$Z_{k+1} = -\left(\frac{b_{k+1}}{\mu_{k+1} - 2} + T_{k+1}\right)x, \;\ldots Z_n = -\left(\frac{b_n}{\mu_n - 2} + T_n\right)x,$$

so gehen die Differentialgleichungen (40) über in

$$(42)\begin{cases} x\dfrac{dT_1}{dx} = -T_1 + A_1 x + (x, T_1, \ldots T_n)^2 + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x\dfrac{dT_k}{dx} = -T_k + A_k x + (x, T_1, \ldots T_n)^2 + \cdots \\ x\dfrac{dT_{k+1}}{dx} = (\mu_{k+1} - 2)T_{k+1} + A_{k+1}x + (x, T_1, \ldots T_n)^2 + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x\dfrac{dT_n}{dx} = (\mu_n - 2)T_n + A_n x + (x, T_1, \ldots T_n)^2 + \cdots. \end{cases}$$

Da nun die λ der ersten k Gleichungen die negative Einheit sind, so kann man, wenn nicht schon $\mu_{k+1} - 2 = 1$ geworden ist, wieder die früheren Substitutionen anwenden, bis der Coefficient von T_{k+1} in der $k+1^{\text{ten}}$ Differentialgleichung wieder die positive Einheit ist; sind dann die entsprechenden Coefficienten der folgenden Gleichungen nicht ganze Zahlen, so muss wieder die entsprechende Grösse A_{k+1} verschwinden, wenn das System eindeutige Integrale haben soll, und wenn sie nicht verschwindet, so hat sie nicht eindeutige Integrale; so schliesst man weiter und findet also

dass, wenn die Coefficienten der ersten x-Potenzen in den so transformirten Gleichungen, in welchen der Coefficient der entsprechenden abhängigen Variabeln der positiven Einheit gleich ist, verschwinden, das ursprüngliche Differentialgleichungsystem unendlich viele eindeutige Integralsysteme um $x = 0$ herum mit verschwindenden Integralwerthen besitzt.

Fassen wir die in diesem Abschnitte gefundenen Resultate zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

Um zu beurtheilen, ob das Differentialgleichungsystem

$$(43)\begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx} = \lambda_{11}y_1 + \cdots + \lambda_{1n}y_n + a_1 x + (x, y_1, y_2, \ldots y_n)^2 + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x\dfrac{dy_n}{dx} = \lambda_{n1}y_1 + \cdots + \lambda_{nn}y_n + a_n x + (x, y_1, y_2, \ldots y_n)^2 + \cdots \end{cases}$$

für $x = 0$ *verschwindende und um diesen Punkt herum eindeutige Integrale besitze, löse man die Gleichung*

$$(44)\qquad \begin{vmatrix} \lambda_{11} - \lambda & \lambda_{21} & \dots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} - \lambda & \dots & \lambda_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \dots & \lambda_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

auf; ist dann keine der n *Lösungen*

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$$

dieser Gleichung eine positive ganze Zahl, so existirt ***ein und nur ein*** *um den Punkt* $x = 0$ *herum eindeutiges Integralsystem, welches für* $x = 0$*, in welcher Richtung man auch in diesen Punkt eintritt, verschwindet; befinden sich jedoch unter den Grössen* $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ *positive ganze Zahlen, so hat das Differentialgleichungsystem* (43) ***im Allgemeinen*** *kein derartiges um* $x = 0$ *eindeutiges Integralsystem. Bestimmt man im letzteren Falle* n^2 *Grössen* $A_{\beta\gamma}$ *durch die* n *Gleichungsysteme*

$$(45)\qquad \begin{cases} A_{1\varepsilon}(\lambda_{11} - \lambda_\varepsilon) + A_{2\varepsilon}\lambda_{21} + \dots + A_{n\varepsilon}\lambda_{n1} = 0 \\ A_{1\varepsilon}\lambda_{12} + A_{2\varepsilon}(\lambda_{22} - \lambda_\varepsilon) + \dots + A_{n\varepsilon}\lambda_{n2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{1\varepsilon}\lambda_{1n} + A_{2\varepsilon}\lambda_{2n} + \dots\dots + A_{n\varepsilon}\lambda_{nn} = 0, \end{cases}$$

und transformirt zunächst die abhängigen Variabeln des Differentialgleichungsystems (43) *durch die Substitutionen*

$$(46)\qquad \begin{cases} A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + \dots + A_{n1}y_n = Y_1 \\ A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + \dots + A_{n2}y_n = Y_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}y_1 + A_{2n}y_2 + \dots + A_{nn}y_n = Y_n, \end{cases}$$

so dass das Differentialgleichungsystem (43) *in*

$$(47)\qquad \begin{cases} x\dfrac{dY_1}{dx} = \lambda_1 Y_1 + \alpha_1 x + (x, Y_1, Y_2, \dots Y_n)^2 + \dots \\ x\dfrac{dY_2}{dx} = \lambda_2 Y_2 + \alpha_2 x + (x, Y_1, Y_2, \dots Y_n)^2 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ x\dfrac{dY_n}{dx} = \lambda_n Y_n + \alpha_n x + (x, Y_1, Y_2, \dots Y_n)^2 + \dots \end{cases}$$

übergeht, so kann man durch successiv angewandte Transformationen der Form

$$
(48) \qquad \begin{cases}
Y_1 = -\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_1 - 1} + \eta_1\right) x \\
Y_2 = -\left(\frac{\alpha_2}{\lambda_2 - 1} + \eta_2\right) x \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_n = -\left(\frac{\alpha_n}{\lambda_n - 1} + \eta_n\right) x
\end{cases}
$$

das Differentialgleichungsystem in eines von der Form

$$
(49) \qquad \begin{cases}
x \frac{d\eta_1}{dx} = \eta_1 + a_1 x + (x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)^2 + \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x \frac{d\eta_k}{dx} = \eta_k + a_k x + (x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)^2 + \cdots \\
x \frac{d\eta_{k+1}}{dx} = \mu_{k+1} \eta_{k+1} + a_{k+1} x + (x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)^2 + \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x \frac{d\eta_n}{dx} = \mu_n \eta_n + a_n x + (x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)^2 + \cdots
\end{cases}
$$

verwandeln, in welchem die Grössen $\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \ldots \mu_n$ *nicht mehr positive ganze Zahlen sind, wobei* $k = n$ *werden kann; dieses Differentialgleichungsystem nun, also auch das vorgelegte, wird dann und nur dann, wenn*

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$$

ist, um $x = 0$ *herum eindeutige, für das vorgelegte System in* $x = 0$ *verschwindende Integralsysteme und zwar unendlich viele solche besitzen.*

IV. Untersuchung der Natur und der Kriterien der nicht eindeutigen Integrale eines Differentialgleichungssystems der Form

$$x\frac{dy_\varrho}{dx} = (x, y_1, y_2, \dots y_n)^1 + (x, y_1, y_2, \dots y_n)^2 + \cdots \quad (\varrho = 1, 2, \dots n)$$

in der Umgebung des Werthes $x = 0$, dem die Nullwerthe der Integrale entsprechen.

Denken wir uns das Differentialgleichungssystem (1) des vorigen Abschnittes durch die dort angegebenen Substitutionen wieder auf die Form reducirt

$$(1)\quad \begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx} = \lambda_1 y_1 + \alpha_1 x + (x, y_1, y_2, \dots y_n)^2 + \cdots \\ x\dfrac{dy_2}{dx} = \lambda_2 y_2 + \alpha_2 x + (x, y_1, y_2, \dots y_n)^2 + \cdots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x\dfrac{dy_n}{dx} = \lambda_n y_n + \alpha_n x + (x, y_1, y_2, \dots y_n)^2 + \cdots, \end{cases}$$

für welches vorher die Bedingungen für die Existenz eindeutiger Integrale festgestellt waren, und legen wir uns nunmehr für das Differentialgleichungssystem (1) die Frage nach der Natur und Anzahl der für $x = 0$ verschwindenden und in der Umgebung dieses Punktes gültigen mehrdeutigen Integralsysteme vor.

1. Nehmen wir an, dass

I. *keine der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ eine positive ganze Zahl ist,*

und betrachten den Fall,

A) *in welchem die reellen Theile sämmtlicher λ-Grössen negativ oder Null sind.*

Seien die um $x = 0$ eindeutigen Integrale, deren Existenz vorher nachgewiesen war, und die für $x = 0$ verschwinden, $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$, und sei irgend ein anderes in $x = 0$ ebenfalls verschwindendes Integralsystem

$$\eta_1 + Y_1, \quad \eta_2 + Y_2, \quad \dots \eta_n + Y_n,$$

so würde nach Gleichung (26) des vorigen Abschnittes das System entstehen:

$$(2)\quad \begin{cases} x\dfrac{dY_1}{dx} = \lambda_1 Y_1 + [x,\ \eta_1, \dots \eta_n,\ Y_1, \dots Y_n]_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x\dfrac{dY_n}{dx} = \lambda_n Y_n + [x,\ \eta_1, \dots \eta_n,\ Y_1, \dots Y_n]_n, \end{cases}$$

worin die Klammern keine Posten enthalten, die nur aus den Grössen $x,\ \eta_1, \dots \eta_n$ zusammengesetzt sind. Ersetzt man in den Gleichungen (2) $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ durch ihre nach positiven ganzen steigenden Potenzen von x fortschreitenden Reihen, so gehen dieselben über in

$$(3)\quad \begin{cases} x\dfrac{dY_1}{dx} = \lambda_1 Y_1 + [x,\ Y_1, \dots Y_n]_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x\dfrac{dY_n}{dx} = \lambda_n Y_n + [x,\ Y_1, \dots Y_n]_n, \end{cases}$$

worin auf den rechten Seiten in den Klammern nur Verbindungen von x mit $Y_1, \dots Y_n$ oder dieser letzteren Grössen unter einander vorkommen, und diese Transformation gilt auch noch, wenn die $\lambda_1, \dots \lambda_n$ gar keiner Bedingung unterworfen waren. Sondert man nun von der Klammer der rechten Seite der ersten Gleichung (3) die reinen Y_1-Potenzen ab, und ähnlich die $Y_2, \dots Y_n$-Potenzen für die übrigen Gleichungen, so erhält man:

$$(4)\quad \begin{cases} x\dfrac{dY_1}{dx} = Y_1(\lambda_1 + c_{11} Y_1 + c_{12} Y_1^2 + c_{13} Y_1^3 + \cdots) \\ \qquad\qquad\qquad + [x,\ Y_1,\ Y_2, \dots Y_n]_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x\dfrac{dY_n}{dx} = Y_n(\lambda_n + c_{n1} Y_n + c_{n2} Y_n^2 + c_{n3} Y_n^3 + \cdots) \\ \qquad\qquad\qquad + [x,\ Y_1,\ Y_2, \dots Y_n]_n, \end{cases}$$

worin die Klammer $[x,\ Y_1,\ Y_2, \dots Y_n]_k$ nur Y_k mit Potenzen von x und $Y_1, \dots Y_{k-1},\ Y_{k+1}, \dots Y_n$ verbunden enthält und weder eine x-Potenz für sich noch eine der Grössen $Y_1, \dots Y_n$ mit einer Constanten multiplicirt.

2. Es ist unmittelbar einleuchtend, dass, wenn man beweisen kann, *dass ein System von nur einer derartigen Differentialgleichung mit einem negativen oder verschwindenden reellen Theile des λ überhaupt kein für $x = 0$ verschwindendes Integral hat*, auch Systeme von solchen Differentialgleichungen (4), in denen sämmtliche λ einen negativen oder verschwindenden reellen Theil haben, keine in $x = 0$ verschwindenden Integrale besitzen werden. Da sich aber *eine* solche Differentialgleichung in die Form setzen lässt:

$$(5) \qquad x\frac{dY}{dx} = Y(\lambda + c_1 Y + c_2 Y^2 + \cdots) + xY\varphi(x, Y),$$

worin $\varphi(x, Y)$ nach ganzen Potenzen von x und Y fortschreitet, so folgt

$$\frac{dY}{Y(\lambda + c_1 Y + c_2 Y^2 + \cdots)} = \frac{dx}{x} + \frac{\varphi(x, Y)\,dx}{\lambda + c_1 Y + c_2 Y^2 + \cdots},$$

oder

$$\frac{dY}{Y\left(1 + \frac{c_1}{\lambda} Y + \cdots\right)} = \lambda\frac{dx}{x} + \frac{\varphi(x, Y)\,dx}{1 + \frac{c_1}{\lambda} Y + \cdots},$$

wenn λ von Null verschieden ist.

Entwickelt man nun die Quotienten in Potenzreihen, so ergiebt sich

$$\frac{dY}{Y}\left(1 - \frac{c_1}{\lambda} Y + \cdots\right) = \lambda\frac{dx}{x} + \psi(x, Y)\,dx$$

oder

$$(6) \quad \frac{dY}{Y} - \left(\frac{c_1}{\lambda} + C_1 Y + C_2 Y^2 + \cdots\right) dY = \lambda\frac{dx}{x} + \psi(x, Y)\,dx,$$

worin $\psi(x, Y)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x und Y fortschreitende Reihe bedeutet.

Angenommen nun diese Gleichung hätte längs einer bestimmten vom Nullpunkt ausgehenden Curve ein Integral, welches auf dieser Linie für $x = 0$ selbst verschwindet, und es entspräche dem $x = x_0$ dieser Curve der Werth $Y = Y_0$, so würde man, indem längs dieser Linie integrirt wird,

$$\log \frac{Y}{Y_0} - \left[\frac{c_1}{\lambda}(Y - Y_0) + \cdots\right] = \log\left(\frac{x}{x_0}\right)^\lambda + \int\limits_{x_0}^{x} \psi(x, Y)\,dx$$

oder einfacher

$$(7) \qquad \log \frac{Y}{Y_0} = \log\left(\frac{x}{x_0}\right)^\lambda + \varepsilon$$

erhalten, worin ε eine Grösse bedeutet, welche für $x = x_0$ verschwindet und einen endlichen Werth A annimmt, wenn x gegen Null convergirt, so dass man

$$\varepsilon = A + \varepsilon_1$$

setzen kann, worin ε_1 für $x = 0$ selbst Null wird; danach ergiebt sich aus (7):

$$(8) \qquad \frac{Y}{Y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^\lambda e^{A+\varepsilon_1}.$$

Setzt man nun

$$x = re^{\vartheta i} \quad \text{und} \quad \lambda = \alpha + \beta i,$$

so folgt aus (8)

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{r^\alpha e^{-\beta\vartheta}}{r_0^\alpha e^{-\beta\vartheta_0}} e^{Ki} e^{A+\varepsilon_1},$$

worin K eine reelle Grösse bedeutet, und da nun, wenn x sich der Null nähert, r unendlich klein wird, so wird r^α, wenn α als reeller Theil von λ negativ ist, unendlich gross, während Y Null werden soll, also die linke Seite Null, die rechte, weil ε_1 gegen Null convergirt, und ϑ ein endlicher bestimmter Winkel, nämlich der Richtungswinkel der von $x = 0$ ausgehenden Curve ist, unendlich gross, also unmöglich; ist aber $\alpha = 0$, so wird die rechte Seite endlich und von Null verschieden, was ebenfalls nicht angeht, da Y der Voraussetzung nach für $x = 0$ verschwinden soll.

Ist jedoch in der Gleichung (5) $\lambda = 0$, so dass dieselbe die Form annimmt

$$(9) \qquad x\frac{dY}{dx} = a_m Y^m + a_{m+1} Y^{m+1} + \cdots + xYq(x, Y),$$

so ist zunächst leicht ersichtlich, dass, wenn alle Grössen

$$(10) \qquad a_m = a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = 0$$

sind, die Differentialgleichung also in

$$\frac{dY}{dx} = Y\varphi(x, Y) \quad \text{oder} \quad \frac{dY}{Y} = \varphi(x, Y)\,dx$$

übergeht, der eben angewandten Schlussweise zufolge sich

$$\frac{Y}{Y_0} = e^{\int\limits_{x_0} \varphi(x, Y)\,dx} = e^{A+\varepsilon_1}$$

ergiebt, was, da A endlich ist, während ε_1 mit $x = 0$ gegen Null convergirt, mit der Voraussetzung, dass $x = 0$, $Y = 0$ entsprechende Werthe sein sollen, nicht vereinbar ist. Finden jedoch die Beziehungen (10) nicht statt, und ist, was wir annehmen dürfen, in der Gleichung (9) a_m von Null verschieden, so werden wir bei der Frage nach der Existenz im Nullpunkt verschwindender Integrale die drei Fälle unterscheiden können, in denen entweder eine endliche Potenz μ von x sich angeben lässt, so dass $\left(\frac{Y}{x^\mu}\right)_0$ einen endlichen Werth annimmt, oder Y durch eine unendlich hohe Potenz von x dividirt für $x = 0$ verschwindet, oder endlich Y durch eine unendlich kleine Potenz von x dividirt für $x = 0$ unendlich gross ist, wobei in den beiden letzteren Fällen $\left(\frac{Y}{x^\alpha}\right)_0$ offenbar für jedes beliebige α entweder Null oder unendlich gross ist.

Ist nun zunächst für ein endliches bestimmtes μ

$$\left(\frac{Y}{x^\mu}\right)_0 = e$$

eine endliche Grösse, so ergiebt sich unmittelbar aus (9), dass in diesem Falle die Differentialgleichung durch ein im Nullpunkte verschwindendes Integral überhaupt nicht befriedigt werden kann, da die linke Seite derselben von der μ^{ten} Ordnung Null wird, während die rechte Seite jedenfalls von einer höheren Ordnung verschwindet.

Wird zweitens Y durch jede Potenz von x dividirt im Nullpunkte selbst Null, ist also auch

$$\left(\frac{Y}{x}\right)_0 = 0,$$

so setze man

(11) $$Y = xz$$

in die Differentialgleichung (9) ein, und erhält leicht

(12) $$x\frac{dz}{dx} = -z + a_m x^{m-1} z^m + bxz + \cdots,$$

worin der Annahme gemäss $x = 0$, $z = 0$ entsprechende Werthe sein sollen; da diese Differentialgleichung (12) aber die Form von (5) für $\lambda = -1$ hat, so besitzt dieselbe nach dem eben bewiesenen Satze überhaupt kein für $x = 0$ verschwindendes Integral in dem Sinne, dass dasselbe den Werth Null annimmt, wenn x in einer beliebigen, aber bestimmten Richtung in den Nullpunkt eintritt, und es giebt somit nach (11) für die gemachte Annahme kein für $x = 0$ verschwindendes Integral der Differentialgleichung (9).

Ist endlich

$$\left(\frac{Y}{x^\nu}\right)_0$$

für beliebige, auch noch so kleine ν unendlich gross, so wird für das in der Differentialgleichung (9) vorkommende m

$$\left(\frac{Y^m}{x}\right)_0 = \infty$$

sein müssen, da, wenn dieser Ausdruck Null oder endlich wäre, auch die m^{te} Wurzel

$$\left(\frac{Y}{x^{\frac{1}{m}}}\right)_0$$

Null oder endlich sein müsste, und daher für unendlich kleine ν $\left(\frac{Y}{x^\nu}\right)_0$ nicht wie angenommen wurde, unendlich gross werden könnte.

Setzt man nun zunächst die Differentialgleichung (9) in die Form

(13) $$\frac{dx}{dY} = \frac{x}{Y(a_m Y^{m-1} + a_{m+1} Y^m + \cdots + x\varphi(x, Y))}$$

und transformirt dieselbe durch die Substitution

(14) $$x = Y^m Z$$

in

$$Y\frac{dZ}{dY} = \frac{Z}{a_m Y^{m-1} + a_{m+1} Y^m + \cdots + Y^m Z\varphi(Y^m Z, Y)} - mZ$$

oder

$$(15) \qquad Y\frac{dZ}{dY} = \frac{Z\psi(Y,Z)}{Y^{m-1}},$$

worin $\psi(Y, Z)$ eine Potenzreihe von Y und Z ist, und nach (14) vermöge der für diesen Fall gemachten Annahme $Y=0$ und $Z=0$ entsprechende Werthe sind, so ergiebt sich wieder aus (15)

$$(16) \qquad \frac{dZ}{Z} = \frac{\psi(Y, Z)}{Y^m}\,dY,$$

und durch Integration

$$\log\frac{Z}{Z_0} = \int_{Y_0} \frac{\psi(Y, Z)}{Y^m}\,dY,$$

oder

$$(17) \qquad Z = Z_0 e^{\int_{Y_0} \frac{\psi(Y, Z)}{Y^m}\,dY},$$

und genau dieselbe Betrachtung wie die oben für die Gleichung (7) angestellte zeigt leicht, dass man im Allgemeinen*) auch dieser Gleichung nicht in der Weise Genüge leisten kann, dass, wenn Y sich auf einer beliebigen, aber bestimmten Curve gegen den Nullpunkt bewegt, Z immer kleiner wird und schliesslich verschwindet.

Ist somit in der Gleichung (5) $\lambda = 0$, *so hat dieselbe kein im Punkte* $x = 0$ *in dem angegebenen Sinne verschwindendes Integral, und somit nach dem Vorigen für keinen Werth von* λ *mit einem negativen oder verschwindenden reellen Theile in dem Nullpunkte verschwindende Integrale.*

Wir erhalten daher den folgenden zu I. A) gehörigen Satz:

Wenn in dem Systeme der Differentialgleichungen (1) *die Grössen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *nicht positive ganze Zahlen sind, so giebt es ausser dem stets existirenden für* $x = 0$ *verschwindenden eindeutigen Integralsystem, wenn die reellen Theile sämmtlicher* λ*-Grössen negativ oder Null sind, im Allgemeinen überhaupt kein anderes für* $x = 0$ *verschwindendes eindeutiges oder nicht eindeutiges Integralsystem, wobei auch der Fall, dass eine oder mehrere der*

---

*) In einzelnen Fällen können jedoch Integrale der Art existiren; so hat die Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} = -y^2$$

λ-Grössen verschwinden, mit eingeschlossen ist, vorausgesetzt dass die Integrale in dem angegebenen Sinne verschwinden sollen. Sind die reellen Theile nur einiger der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ negativ oder Null, so können Integralsysteme der verlangten Art wohl existiren,

wovon man sich durch einfache Beispiele leicht überzeugen kann.

3. Seien

B) *die reellen Theile sämmtlicher Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ positiv und von Null verschieden.*

Legen wir wieder der Betrachtung die Differentialgleichungen (3) zu Grunde, die aus dem Systeme (1) durch Absonderung der eindeutigen Integrale $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ entstanden sind, und setzen

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} Y_1 = x^{\lambda_1} \sum c^{(1)}_{\mu_1 \nu_{11} \nu_{12} \cdots \nu_{1n}} x^{\mu_1 + \lambda_1 \nu_{11} + \lambda_2 \nu_{12} + \cdots + \lambda_n \nu_{1n}} \\ \qquad (\mu_1, \nu_{11}, \nu_{12}, \ldots \nu_{1n} = 0, 1, 2, \cdots \infty) \\ Y_2 = x^{\lambda_2} \sum c^{(2)}_{\mu_2 \nu_{21} \nu_{22} \cdots \nu_{2n}} x^{\mu_2 + \lambda_1 \nu_{21} + \lambda_2 \nu_{22} + \cdots + \lambda_n \nu_{2n}} \\ \qquad (\mu_2, \nu_{21}, \nu_{22}, \ldots \nu_{2n} = 0, 1, 2, \cdots \infty) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_n = x^{\lambda_n} \sum c^{(n)}_{\mu_n \nu_{n1} \nu_{n2} \cdots \nu_{nn}} x^{\mu_n + \lambda_1 \nu_{n1} + \lambda_2 \nu_{n2} + \cdots + \lambda_n \nu_{nn}} \\ \qquad (\mu_n, \nu_{n1}, \nu_{n2}, \ldots \nu_{nn} = 0, 1, 2, \cdots \infty), \end{array}\right.$$

so soll gezeigt werden, dass sich die Coefficienten dieser nach Potenzen von

$$x,\ x^{\lambda_1},\ x^{\lambda_2},\ \ldots x^{\lambda_n}$$

fortschreitenden Reihen so bestimmen lassen, dass dem Differentialgleichungsystem (3) formal genügt wird, und dass die so bestimmten Reihen (18) innerhalb bestimmter Bereiche convergent sind.

Setzt man nämlich die Werthe von $Y_1, \ldots Y_n$ aus (18) in (3) ein, so folgt, wenn wir die r^{te} dieser Gleichungen herausgreifen,

---

ausser dem eindeutigen Integrale $y = 0$ noch das unendlich vieldeutige, im Nullpunkte verschwindende Integral

$$y = \frac{1}{\log x}.$$

$$(19)\quad x\Big[\lambda_r x^{\lambda_r-1}\sum c^{(r)}_{\mu_r\nu_{r1}\cdots\nu_{rn}}x^{\mu_r+\lambda_1\nu_{r1}+\cdots+\lambda_n\nu_{rn}}$$
$$+x^{\lambda_r}\sum(\mu_r+\lambda_1\nu_{r1}+\cdots+\lambda_n\nu_{rn})c^{(r)}_{\mu_r\nu_{r1}\cdots\nu_{rn}}x^{\mu_r+\lambda_1\nu_{r1}+\cdots+\lambda_n\nu_{rn}-1}\Big]$$
$$=\lambda_r x^{\lambda_r}\sum c^{(r)}_{\mu_r\nu_{r1}\cdots\nu_{rn}}x^{\mu_r+\lambda_1\nu_{r1}+\cdots+\lambda_n\nu_{rn}}$$
$$+\Big(x,\, x^{\lambda_1}\sum c^{(1)}_{\mu_1\nu_{11}\cdots\nu_{1n}}x^{\mu_1+\lambda_1\nu_{11}+\cdots+\lambda_n\nu_{1n}},$$
$$\ldots x^{\lambda_n}\sum c^{(n)}_{\mu_n\nu_{n1}\cdots\nu_{nn}}x^{\mu_n+\lambda_1\nu_{n1}+\cdots+\lambda_n\nu_{nn}}\Big);$$

oder, da die ersten Posten auf der rechten und linken Seite sich wegheben, wenn

$$(20)\qquad x=x,\quad x^{\lambda_1}=\xi_1,\quad x^{\lambda_2}=\xi_2,\ \ldots\ x^{\lambda_n}=\xi_n$$

gesetzt werden, durch Identificirung der Coefficienten ein und desselben Gliedes $x^p\xi_1^{p_1}\xi_2^{p_2}\ldots\xi_n^{p_n}$

$$(21)\ (p+\lambda_1 p_1+\cdots+\lambda_r(p_r-1)+\cdots+\lambda_n p_n)c^{(r)}_{pp_1\cdots p_r-1\cdots p_n}=F^{(r)}_{pp_1\cdots p_n},$$

worin die $F^{(r)}_{pp_1\cdots p_n}$ Polynome mit positiven Factoren darstellen, gebildet aus den Coeficienten der Differentialgleichungen (3) und denjenigen

$$c^{(1)}_{\mu_1\nu_{11}\cdots\nu_{1n}},\quad c^{(2)}_{\mu_2\nu_{21}\cdots\nu_{2n}},\quad\ldots\ c^{(n)}_{\mu_n\nu_{n1}\cdots\nu_{nn}},$$

für welche

$$(22)\quad\begin{cases}\mu_1\leqq p, & \nu_{11}\leqq p_1-1, & \nu_{12}\leqq p_2,\ \ldots & \nu_{1n}\leqq p_n\\ \mu_2\leqq p, & \nu_{21}\leqq p_1, & \nu_{22}\leqq p_2-1,\ \ldots & \nu_{2n}\leqq p_n\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ \mu_n\leqq p, & \nu_{n1}\leqq p_1, & \nu_{n2}\leqq p_2,\ \ldots & \nu_{nn}\leqq p_n-1\end{cases}$$

und

$$(23)\quad \mu_\sigma+\nu_{\sigma1}+\nu_{\sigma2}+\cdots+\nu_{\sigma n}<p+p_1+p_2+\cdots+p_n-1$$

ist; da ferner keine der λ-Grössen verschwinden sollte, so folgt aus (19), dass für $\mu_r=0$, $\nu_{r1}=0$, $\ldots$ $\nu_{rn}=0$ der Coefficient $c^r_{00\cdots0}$ nur in Y_r im Posten $c^{(r)}_{00\cdots0}x^{\lambda_r}$ vorkommt, also im ersten Theile der linken Seite der Gleichung (19), der gegen den ersten Theil der rechten Seite dieser Gleichung wegfiel, und es bleiben somit die Grössen

$$(24) \qquad c^{(1)}_{00\cdots 0}, \quad c^{(2)}_{00\cdots 0}, \quad \ldots c^{(n)}_{00\cdots 0}$$

völlig unbestimmt. Aus den Gleichungen (21) folgt durch successive Reduction und Berechnung der Coefficienten c

$$(25) \qquad c^{(r)}_{pp_1\cdots p_r - 1\cdots p_n} = \varphi^{(r)}_{pp_1\cdots p_r - 1\cdots p_n},$$

worin φ ein Polynom ist, von dem jeder Posten ein Product von den Coefficienten des Differentialgleichungsystems ist multiplicirt mit Potenzen von den oben bezeichneten Grössen

$$c^{(1)}_{00\cdots 0}, \quad c^{(2)}_{00\cdots 0}, \quad \ldots c^{(n)}_{00\cdots 0}$$

und ganzen Zahlen, und nach (21) dividirt durch ein Product von Factoren von der Form

$$(26) \quad p + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_\varrho(p_\varrho - 1) + \cdots + \lambda_n p_n,$$

die der Gleichung (19) zufolge nicht verschwinden können.

Sei nun

$$(27) \quad \lambda_1 = A_1 + A_1' i, \quad \lambda_2 = A_2 + A_2' i, \quad \ldots \lambda_n = A_n + A_n' i,$$

so hat (26) die Form

$$(28) \quad \begin{aligned} &p + A_1 p_1 + A_2 p_2 + \cdots + A_\varrho(p_\varrho - 1) + \cdots + A_n p_n \\ &\quad + i(A_1' p_1 + A_2' p_2 + \cdots + A_\varrho'(p_\varrho - 1) + \cdots + A_n' p_n), \end{aligned}$$

und da $A_1, A_2, \ldots A_n$ der Voraussetzung nach (ad B) sämmtlich positiv sind, so wird der Modul des Ausdruckes (28) stets über einer endlichen angebbaren Grenze K hinausliegen, so dass

$$(29) \quad \mathrm{mod}[p + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_\varrho(p_\varrho - 1) + \cdots + \lambda_n p_n] > K$$

ist für alle ganzzahligen Werthe von $p, p_1, p_2, \ldots p_n$.

Nun kann man aber beweisen, dass die so gefundenen c in die Reihen (18), welche der Herleitung gemäss dem Differentialgleichungsystem (3) formal genügen, eingesetzt dieselben zu convergenten machen. Denn offenbar wird man die Moduln der Glieder der Reihen (18) noch vergrössern, wenn man für die Moduln der Nenner der Brüche nach (29) die Grösse K substituirt und nach (14) des vorigen Abschnittes die Moduln der Coefficienten der Differentialgleichungen durch die auf den rechten Seiten dieser Gleichungen

(14) stehenden Grössen ersetzt; sind also die so entstehenden Reihen als Functionen der selbständigen Variabeln $x, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots x^{\lambda_n}$ aufgefasst convergent, so werden es auch die oben gefundenen sein. Bezeichnen wir aber die so aus (25) hervorgehenden Werthe durch C mit den zugehörigen Indices, worin

$$(30)\quad C^{(1)}_{00\ldots0} = \operatorname{mod} c^{(1)}_{00\ldots0} = C_1, \ldots C^{(n)}_{00\ldots0} = \operatorname{mod} c^{(n)}_{00\ldots0} = C_n$$

völlig willkürliche Grössen sind, so werden die neuen Reihen lauten:

$$(31)\quad \begin{cases} Z_1 = x^{\lambda_1} \sum C^{(1)}_{\mu_1 \nu_{11} \ldots \nu_{1n}} x^{\mu_1 + \lambda_1 \nu_{11} + \cdots + \lambda_n \nu_{1n}} \\ Z_2 = x^{\lambda_2} \sum C^{(2)}_{\mu_2 \nu_{21} \ldots \nu_{2n}} x^{\mu_2 + \lambda_1 \nu_{21} + \cdots + \lambda_n \nu_{2n}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ Z_n = x^{\lambda_n} \sum C^{(n)}_{\mu_n \nu_{n1} \ldots \nu_{nn}} x^{\mu_n + \lambda_1 \nu_{n1} + \cdots + \lambda_n \nu_{nn}}, \end{cases}$$

und es bleibt somit nur deren Convergenz zu erweisen.

Bildet man zu dem Zwecke das System von Gleichungen:

$$(32)\quad \begin{cases} KZ_1 = KC_1 x^{\lambda_1} + \frac{M}{\varrho} x + \frac{M}{\varrho^2} x^2 + \frac{M}{r_1} x^{\lambda_1} Z_1 + \cdots \\ \qquad + \frac{M}{r_n} x^{\lambda_n} Z_n + \frac{M}{\varrho r_1} x x^{\lambda_1} Z_1 + \cdots \\ KZ_2 = KC_2 x^{\lambda_2} + \frac{M}{\varrho} x + \frac{M}{\varrho^2} x^2 + \frac{M}{r_1} x^{\lambda_1} Z_1 + \cdots \\ \qquad + \frac{M}{r_n} x^{\lambda_n} Z_n + \frac{M}{\varrho r_1} x x^{\lambda_1} Z_1 + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ KZ_n = KC_n x^{\lambda_n} + \frac{M}{\varrho} x + \frac{M}{\varrho^2} x^2 + \frac{M}{r_1} x^{\lambda_1} Z_1 + \cdots \\ \qquad + \frac{M}{r_n} x^{\lambda_n} Z_n + \frac{M}{\varrho r_1} x x^{\lambda_1} Z_1 + \cdots \end{cases}$$

oder

$$(33)\quad \begin{cases} KZ_1 = KC_1 x^{\lambda_1} + M \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{x^{\lambda_1} Z_1}{r_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^{\lambda_n} Z_n}{r_n}\right)} - 1 \right] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ KZ_n = KC_n x^{\lambda_n} + M \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{x^{\lambda_1} Z_1}{r_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^{\lambda_n} Z_n}{r_n}\right)} - 1 \right], \end{cases}$$

in welchem man x, x^{λ_1}, ... x^{λ_n} als selbständige unabhängige, $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ als abhängige Variabeln betrachtet, so sieht man zunächst, dass die Functionaldeterminante dieser Gleichungen, gleichgültig ob man x oder x^{λ_1}, ... oder x^{λ_n} als unabhängige Variable auffasst, da der Voraussetzung gemäss die reellen Theile sämmtlicher Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ positiv und von Null verschieden sind, für $x = 0$ den Werth hat

$$\begin{vmatrix} K & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & K & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & K \end{vmatrix},$$

somit nach (29) von Null verschieden ist, also haben $Z_1, \ldots Z_n$ als Lösungen des Systemes (33) jedenfalls nach jeder der Variabeln x, x^{λ_1}, ... x^{λ_n} convergente Potenz-Entwicklungen, welche für $x = 0$, $x^{\lambda_1} = 0$, ... $x^{\lambda_n} = 0$ selbst verschwinden. Setzen wir nun, nachdem die Existenz von convergenten Reihen erwiesen ist, die nach Potenzen von x, x^{λ_1}, ... x^{λ_n} fortschreiten, und den Gleichungen (33) genügen, den oben gefundenen Integralformen (18) analog:

$$(34) \quad \begin{cases} Z_1 = x^{\lambda_1} \sum \bar{C}^{(1)}_{\mu_1 \nu_{11} \ldots \nu_{1n}} x^{\mu_1 + \lambda_1 \nu_{11} + \cdots + \lambda_n \nu_{1n}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Z_n = x^{\lambda_n} \sum \bar{C}^{(n)}_{\mu_n \nu_{n1} \ldots \nu_{nn}} x^{\mu_n + \lambda_1 \nu_{n1} + \cdots + \lambda_n \nu_{nn}}, \end{cases}$$

worin

$$(35) \quad \bar{C}^{(1)}_{00\ldots0} = C_1, \quad \bar{C}^{(2)}_{00\ldots0} = C_2, \quad \ldots \bar{C}^{(n)}_{00\ldots0} = C_n$$

genommen wird, in die Gleichungen (33) oder (32) ein, so sieht man durch Vergleichung mit (19) und (21) bei Berücksichtigung der Gleichungen (14) des vorigen Abschnittes, dass man für die $\bar{C}$ genau die Werthe C der Gleichungen (31) erhält, welche aus den oben gefundenen c hervorgingen, wenn man für die Coefficienten der Differentialgleichungen die durch III. 14. und für die Nenner der einzelnen Brüche die oben angegebenen durch die Ungleichheiten (29) bestimmten

Substitutionen machte, so dass, da die Existenz der Lösungen als Reihen, nach Potenzen $x, x^{\lambda_1}, \ldots x^{\lambda_n}$ fortschreitend, nachgewiesen ist, auch deren Convergenz, also auch die Convergenz der Reihen (18) festgestellt ist.

Wir erhalten somit bei Berücksichtigung des Umstandes, dass $C_1, C_2, \ldots C_n$ völlig willkürliche Grössen waren, den folgenden zu I. B) gehörigen Satz:

Wenn in dem Systeme von Differentialgleichungen (1) *die Grössen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *nicht positive ganze Zahlen sind, so giebt es ausser dem stets existirenden für* $x = 0$ *verschwindenden eindeutigen Integralsystem, wenn der reelle Theil sämmtlicher* λ*-Grössen positiv und von Null verschieden ist, unendlich viele andere für* $x = 0$ *verschwindende und nach ganzen Potenzen von* $x, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots x^{\lambda_n}$ *fortschreitende convergente Integralentwickelungen, und andere für* $x = 0$ *verschwindende Integrale hat das System überhaupt nicht**).

4. Es bleibt somit nur noch die Frage nach der Natur der Integrale für den Fall zu beantworten übrig, in welchem

II) *eine oder mehrere der Grössen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *positive ganze Zahlen sind,* und für welchen eindeutige, für $x = 0$ verschwindende Integrale um $x = 0$ herum im Allgemeinen, wie oben nachgewiesen, überhaupt nicht existirten.

Sei also das Differentialgleichungsystem gegeben

---

*) Sind sämmtliche $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ positive rationale Zahlen, also

$$\lambda_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad \lambda_2 = \frac{m_2}{n_2}, \quad \ldots \lambda_n = \frac{m_n}{n_n},$$

so folgt aus dem oben bewiesenen Satze unmittelbar, dass, weil die Integrale in Reihen nach Potenzen von

$$x, \; x^{\frac{m_1}{n_1}}, \; x^{\frac{m_2}{n_2}}, \; \ldots x^{\frac{m_n}{n_n}}$$

entwickelbar sind, wenn N das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $n_1, n_2, \ldots n_n$ bedeutet, die Integrale auch aufgefasst werden können als Potenzreihen fortschreitend nach positiven ganzen Potenzen von $x^{\frac{1}{N}}$, also um $x = 0$ herum N-deutige Functionen darstellen.

$$(36)\quad \begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx} = \lambda_1 y_1 + a_1 x + (x, y_1, y_2, \ldots y_n)^2 + \cdots \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x\dfrac{dy_k}{dx} = \lambda_k y_k + a_k x + (x, y_1, y_2, \ldots y_n)^2 + \cdots \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x\dfrac{dy_n}{dx} = \lambda_n y_n + a_n x + (x, y_1, y_2, \ldots y_n)^2 + \cdots, \end{cases}$$

und werde angenommen, dass

A) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ *positive ganze Zahlen seien, während mindestens eine der Grössen* $\lambda_{k+1}, \ldots \lambda_n$ *einen reellen Theil besitze, der negativ oder Null ist,*

so hat zunächst wieder nach dem Früheren das System im Allgemeinen kein eindeutiges Integralsystem, weil eine der λ-Grössen positiv ganz ist; macht man aber die Grössen $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ ein wenig kleiner, so dass sie nicht mehr positive ganze Zahlen sind, so wird das Differentialgleichungsystem ein solches werden, für das keines der λ eine positive ganze Zahl und mindestens eines der λ einen reellen Theil besitzt, welcher negativ oder Null ist, wird somit nach den oben bewiesenen Sätzen entweder nur *ein* um $x = 0$ eindeutiges, in diesem Punkte verschwindendes Integralsystem besitzen, und sonst kein weiteres eindeutiges oder mehrdeutiges, oder auch in gewissen Fällen, wie wir früher gesehen, noch andere im Allgemeinen vieldeutige Integrale haben können. Lässt man jetzt $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ sich wieder um die unendlich kleinen Grössen abnehmen, so dass sie die früheren positiven *ganzen* Zahlen werden, so muss, wenn das veränderte Differentialgleichungsystem nur das *eine* und zwar eindeutige Integralsystem besass, dieses Integralsystem divergent werden, weil die x-Potenzen ganz waren, und das Integralsystem, wenn es bei der unendlich kleinen Aenderung der $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ convergent bliebe, auch eindeutig bleiben müsste, ein solches eindeutiges System aber, wie wir wissen, nicht existirt; da aber andere Integralsysteme, wie wir annehmen, überhaupt nicht existiren, so folgt der Satz:

Wenn in dem Systeme von Differentialgleichungen (36) *einige der Grössen* $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ *positive ganze Zahlen und der reelle*

Theil einer oder mehrerer der übrigen λ-Grössen negativ oder Null ist, so besitzt im Allgemeinen das Differentialgleichungsystem, wenn das unendlich wenig variirte System nur eindeutige Integralsysteme hat, gar kein für $x = 0$ im angegebenen Sinne verschwindendes Integralsystem.

Seien

B) *$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ wiederum positive ganze Zahlen, während sämmtliche übrige $\lambda_{k+1}, \ldots \lambda_n$ positive reelle Theile besitzen,*

so setze man

$$L_1 = \lambda_1 + \gamma_1, \quad L_2 = \lambda_2 + \gamma_2, \ldots L_k = \lambda_k + \gamma_k, \quad L_{k+1} = \lambda_{k+1}, \ldots L_n = \lambda_n, \tag{37}$$

worin $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$ sehr kleine negative Grössen sind, und betrachte zunächst das Differentialgleichungsystem:

$$\left\{\begin{aligned} x\frac{dY_1}{dx} &= L_1 Y_1 + \alpha_1 x + (x, Y_1, Y_2, \ldots Y_n)^2 + \cdots \\ x\frac{dY_2}{dx} &= L_2 Y_2 + \alpha_2 x + (x, Y_1, Y_2, \ldots Y_n)^2 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x\frac{dY_n}{dx} &= L_n Y_n + \alpha_n x + (x, Y_1, Y_2, \ldots Y_n)^2 + \cdots; \end{aligned}\right. \tag{38}$$

so wird dieses nach den früheren ad I. B) gemachten Auseinandersetzungen unendlich viele für $x = 0$ verschwindende, in der Umgebung dieses Punktes nach ganzen Potenzen von

$$x, \; x^{L_1}, \; x^{L_2}, \ldots x^{L_n}$$

fortschreitende convergente Integralreihen von der Form

$$\left\{\begin{aligned} Y_1 &= x^{L_1} \sum c^{(1)}_{\mu_1 \nu_{11} \cdots \nu_{1n}} x^{\mu_1 + L_1 \nu_{11} + \cdots + L_n \nu_{1n}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_n &= x^{L_n} \sum c^{(n)}_{\mu_n \nu_{n1} \cdots \nu_{nn}} x^{\mu_n + L_1 \nu_{n1} + \cdots + L_n \nu_{nn}} \end{aligned}\right. \tag{39}$$

besitzen.

Setzt man

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x^{L_1} - x^{\lambda_1}}{L_1 - \lambda_1} = t_1, \quad x^{L_1} = x^{\lambda_1} - (\lambda_1 - L_1)\, t_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{x^{L_k} - x^{\lambda_k}}{L_k - \lambda_k} = t_k, \quad x^{L_k} = x^{\lambda_k} - (\lambda_k - L_k)\, t_k, \end{aligned}\right. \tag{40}$$

so würde, da $x^{\lambda_1}, \ldots x^{\lambda_k}$ positive ganze Potenzen von x darstellen, durch Einsetzen von (40) in die Integralreihen (39)

ein nach ganzen positiven Potenzen von x, $t_1, \ldots t_k$, $x^{\lambda_{k+1}}$, $\ldots x^{\lambda_n}$ fortschreitendes, für $x = 0$ in dem wiederholt angegebenen Sinne verschwindendes Integralsystem entstehen:

$$(41)\begin{cases} Y_1 = \sum C^{(1)}_{\mu_1 \nu_{11} \cdots \nu_{1n}} x^{\mu_1 + \nu_{1k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{1n} L_n} t_1^{\nu_{11}} t_2^{\nu_{12}} \ldots t_k^{\nu_{1k}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ Y_k = \sum C^{(k)}_{\mu_k \nu_{k1} \cdots \nu_{kn}} x^{\mu_k + \nu_{kk+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{kn} L_n} t_1^{\nu_{k1}} t_2^{\nu_{k2}} \ldots t_k^{\nu_{kk}} \\ Y_{k+1} = x^{L_{k+1}} \sum C^{(k+1)}_{\mu_{k+1} \nu_{k+11} \cdots \nu_{k+1n}} x^{\mu_{k+1} + \nu_{k+1\,k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{k+1n} L_n} \times \\ \qquad t_1^{\nu_{k+11}} t_2^{\nu_{k+12}} \ldots t_k^{\nu_{k+1k}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ Y_n = x^{L_n} \sum C^{(n)}_{\mu_n \nu_{n1} \cdots \nu_{nn}} x^{\mu_n + \nu_{nk+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{nn} L_n} t_1^{\nu_{n1}} t_2^{\nu_{n2}} \ldots t_k^{\nu_{nk}}, \end{cases}$$

worin die μ und ν andere Summationsindices als in den Gleichungen (39) bedeuten. Lässt man nun wieder in dem System der Differentialgleichungen (38) sowie in dem Integralsysteme (41) L_1 gegen $\lambda_1, \ldots L_k$ gegen λ_k convergiren, so wird, da dann nach (40), wie durch Differentiation des Zählers und Nenners nach $L_1, \ldots L_k$ hervorgeht,

$$(42) \quad t_1 = x^{\lambda_1} \log x, \quad t_2 = x^{\lambda_2} \log x, \quad \ldots t_k = x^{\lambda_k} \log x$$

folgt, und

$$(43) \qquad x^{L_{k+1}} = x^{\lambda_{k+1}}, \quad \ldots\ldots \quad x^{L_n} = x^{\lambda_n}$$

ist, das System (38) in das vorgelegte Differentialgleichungsystem (36) übergehen, und für dieses sich nach (41) das formale Integralsystem ergeben:

$$(44)\begin{cases} y_1 = \sum \bar{C}^{(1)}_{\mu_1 \nu_{11} \cdots \nu_{1n}} x^{\mu_1 + \nu_{1k+1} \lambda_{k+1} + \cdots + \nu_{1n} \lambda_n} (x^{\lambda_1} \log x)^{\nu_{11}} \\ \qquad \ldots (x^{\lambda_k} \log x)^{\nu_{1k}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_k = \sum \bar{C}^{(k)}_{\mu_k \nu_{k1} \cdots \nu_{kn}} x^{\mu_k + \nu_{kk+1} \lambda_{k+1} + \cdots + \nu_{kn} \lambda_n} (x^{\lambda_1} \log x)^{\nu_{k1}} \\ \qquad \ldots (x^{\lambda_k} \log x)^{\nu_{kk}} \\ y_{k+1} = x^{\lambda_{k+1}} \sum \bar{C}^{(k+1)}_{\mu_{k+1} \nu_{k+11} \cdots \nu_{k+1n}} x^{\mu_{k+1} + \nu_{k+1\,k+1} \lambda_{k+1} + \cdots + \nu_{k+1n} \lambda_n} \times \\ \qquad (x^{\lambda_1} \log x)^{\nu_{k+11}} \ldots (x^{\lambda_k} \log x)^{\nu_{k+1k}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x^{\lambda_n} \sum \bar{C}^{(n)}_{\mu_n \nu_{n1} \cdots \nu_{nn}} x^{\mu_n + \nu_{nk+1} \lambda_{k+1} + \cdots + \nu_{nn} \lambda_n} (x^{\lambda_1} \log x)^{\nu_{n1}} \\ \qquad \ldots (x^{\lambda_k} \log x)^{\nu_{nk}}. \end{cases}$$

von dem nur noch die Convergenz um $x = 0$ herum nachzuweisen sein wird, und da die Convergenz der Reihen (39), also auch der Reihen (41) erwiesen war, so kommt es nur darauf an, zu sehen, ob nicht dadurch, dass $L_1 = \lambda_1, \ldots L_k = \lambda_k$ gesetzt wurden, einzelne der Coefficienten C beim Uebergange in $\overline{C}$ unendlich werden, und dadurch die Reihen (44) divergent machen.

Setzt man zur Ermittelung der Form der Coefficienten C die Reihen (41) in die Differentialgleichungen des Systems (38) ein, so wird sich zunächst für jeden Index ϱ von $1, \ldots k$

$$(45) \quad x\frac{dY_\varrho}{dx} = \sum C^{(\varrho)}_{\mu_\varrho \nu_{\varrho 1} \cdots \nu_{\varrho n}} \times$$
$$\Big[(\mu_\varrho + \nu_{\varrho k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{\varrho n} L_n) x^{\mu_\varrho + \nu_{\varrho k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{\varrho n} L_n} t_1^{\nu_{\varrho 1}} \ldots t_k^{\nu_{\varrho k}}$$
$$+ \nu_{\varrho 1} x^{\mu_\varrho + \nu_{\varrho k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{\varrho n} L_n + 1} t_1^{\nu_{\varrho 1} - 1} \ldots t_k^{\nu_{\varrho k}} \frac{dt_1}{dx}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \nu_{\varrho k} x^{\mu_\varrho + \nu_{\varrho k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{\varrho n} L_n + 1} t_1^{\nu_{\varrho 1}} \ldots t_k^{\nu_{\varrho k} - 1} \frac{dt_k}{dx}\Big]$$

ergeben, und somit vermöge der aus (40) folgenden Beziehungen

$$(46) \quad \begin{cases} x\dfrac{dt_1}{dx} = L_1 t_1 + x^{\lambda_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x\dfrac{dt_k}{dx} = L_k t_k + x^{\lambda_k} \end{cases}$$

die ϱ^{te} Differentialgleichung des Systems (38) durch Substitution dieser Werthe in

$$(47) \quad \sum C^{(\varrho)}_{\mu_\varrho \nu_{\varrho 1} \cdots \nu_{\varrho n}} \times$$
$$\big[(\mu_\varrho + \nu_{\varrho 1} L_1 + \nu_{\varrho 2} L_2 + \cdots + \nu_{\varrho n} L_n) x^{\mu_\varrho + \nu_{\varrho k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{\varrho n} L_n} t_1^{\nu_{\varrho 1}} \ldots t_k^{\nu_{\varrho k}}$$
$$+ \nu_{\varrho 1} x^{\lambda_1 + \mu_\varrho + \nu_{\varrho k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{\varrho n} L_n} t_1^{\nu_{\varrho 1} - 1} t_2^{\nu_{\varrho 2}} \ldots t_k^{\nu_{\varrho k}}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \nu_{\varrho k} x^{\lambda_k + \mu_\varrho + \nu_{\varrho k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{\varrho n} L_n} t_1^{\nu_{\varrho 1}} t_2^{\nu_{\varrho 2}} \ldots t_k^{\nu_{\varrho k} - 1}\big]$$
$$= L_\varrho \sum C^{(\varrho)}_{\mu_\varrho \nu_{\varrho 1} \cdots \nu_{\varrho n}} x^{\mu_\varrho + \nu_{\varrho k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{\varrho n} L_n} t_1^{\nu_{\varrho 1}} t_2^{\nu_{\varrho 2}} \ldots t_k^{\nu_{\varrho k}}$$
$$+ a_\varrho x + \Big(x, \sum C^{(1)}_{\mu_1 \nu_{11} \cdots \nu_{1n}} x^{\mu_1 + \nu_{1k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{1n} L_n} t_1^{\nu_{11}} t_2^{\nu_{12}} \ldots t_k^{\nu_{1k}}, \ldots$$
$$x^{L_n} \sum C^{(n)}_{\mu_n \nu_{n1} \cdots \nu_{nn}} x^{\mu_n + \nu_{nk+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{nn} L_n} t_1^{\nu_{n1}} t_2^{\nu_{n2}} \ldots t_n^{\nu_{nk}}\Big)^2 + \cdots$$

übergehen.

Bezeichnet nun σ eine der Zahlen $k+1, k+2, \ldots n$, so erhält man, da sich nach (41) Y_σ von Y_ϱ formal nur um den Factor x^{L_σ} unterscheidet, wieder mit Benutzung der Gleichungen (46) die der Gleichung (47) analoge Beziehung:

$$\sum C^{(\sigma)}_{\mu_\sigma \nu_{\sigma 1} \cdots \nu_{\sigma n}} \times \tag{48}$$

$$\Big[(\mu_\sigma + \nu_{\sigma 1} L_1 + \cdots + \nu_{\sigma n} L_n)\, x^{\mu_\sigma + \nu_{\sigma k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{\sigma n} L_n}\, t_1^{\nu_{\sigma 1}} \ldots t_k^{\nu_{\sigma k}}$$
$$+ \nu_{\sigma 1} x^{\lambda_1 + \mu_\sigma + \nu_{\sigma k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{\sigma n} L_n}\, t_1^{\nu_{\sigma 1} - 1}\, t_2^{\nu_{\sigma 2}} \ldots t_k^{\nu_{\sigma k}}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ \nu_{\sigma k} x^{\lambda_k + \mu_\sigma + \nu_{\sigma k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{\sigma n} L_n}\, t_1^{\nu_{\sigma 1}}\, t_2^{\nu_{\sigma 2}} \ldots t_k^{\nu_{\sigma k} - 1}\Big]$$
$$= \alpha_\sigma x + \Big(x, \sum C^{(1)}_{\mu_1 \nu_{11} \cdots \nu_{1n}} x^{\mu_1 + \nu_{1k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{1n} L_n}\, t_1^{\nu_{11}}\, t_2^{\nu_{12}} \ldots t_k^{\nu_{1k}},$$
$$\ldots x^{L_n} \sum C^{(n)}_{\mu_n \nu_{n1} \cdots \nu_{nn}} x^{\mu_n + \nu_{nk+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{nn} L_n}\, t_1^{\nu_{n1}}\, t_2^{\nu_{n2}} \ldots t_k^{\nu_{nk}}\Big)^2 + \cdots,$$

indem der Posten

$$L_\sigma x^{L_\sigma} \sum C^{(\sigma)}_{\mu_\sigma \nu_{\sigma 1} \cdots \nu_{\sigma n}} x^{\mu_\sigma + \nu_{\sigma k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{\sigma n} L_n}\, t_1^{\nu_{\sigma 1}}\, t_2^{\nu_{\sigma 2}} \ldots t_k^{\nu_{\sigma k}}$$

auf beiden Seiten fortfällt, und die Gleichungen (47) und (48) sollen identisch erfüllt sein für alle $x, t_1, t_2, \ldots t_k, x^{L_{k+1}}, x^{L_{k+2}}, \ldots x^{L_n}$.

Aus den ϱ Gleichungen (47) folgt zunächst durch Gleichsetzen der Coefficienten der ersten Potenz von x

$$C^{(\varrho)}_{100\cdots 0}(1 - L_\varrho) + \varepsilon_1 C^{(\varrho)}_{010\cdots 0} + \cdots + \varepsilon_k C^{(\varrho)}_{00\cdots 010\cdots 0} = \alpha_\varrho, \tag{49}$$

worin $\varepsilon_\eta = 1$ oder 0 ist, je nachdem die positive ganze Zahl $\lambda_\eta = 1$ oder > 1 ist, und analog folgt aus (48)

$$C^{(\sigma)}_{100\cdots 0} + \varepsilon_1 C^{(\sigma)}_{010\cdots 0} + \cdots + \varepsilon_k C^{(\sigma)}_{00\cdots 010\cdots 0} = \alpha_\sigma, \tag{50}$$

wenn die ε dieselbe Bedeutung haben. Allgemein wird offenbar:

$$C^{(\varrho)}_{\mu_\varrho \nu_{\varrho 1} \cdots \nu_{\varrho n}}(\mu_\varrho + \nu_{\varrho 1} L_1 + \cdots + \nu_{\varrho n} L_n - L_\varrho) \tag{51}$$
$$+ C^{(\varrho)}_{\mu_\varrho - \lambda_1, \nu_{\varrho 1}+1, \nu_{\varrho 2} \cdots \nu_{\varrho n}}(\nu_{\varrho 1} + 1)$$
$$+ C^{(\varrho)}_{\mu_\varrho - \lambda_2, \nu_{\varrho 1}, \nu_{\varrho 2}+1, \cdots \nu_{\varrho n}}(\nu_{\varrho 2} + 1) + \cdots$$
$$+ C^{(\varrho)}_{\mu_\varrho - \lambda_k, \nu_{\varrho 1}, \nu_{\varrho 2}, \cdots \nu_{\varrho k}+1, \nu_{\varrho k+1} \cdots \nu_{\varrho n}}(\nu_{\varrho k} + 1) = \varphi_{\mu_\varrho \nu_{\varrho 1} \nu_{\varrho 2} \cdots \nu_{\varrho n}}$$

und

$$(52)\quad C^{(\sigma)}_{\mu_\sigma \nu_{\sigma 1} \cdots \nu_{\sigma n}}(\mu_\sigma + \nu_{\sigma 1} L_1 + \cdots + \nu_{\sigma n} L_n)$$
$$+ C^{(\sigma)}_{\mu_\sigma - \lambda_1, \nu_{\sigma 1}+1, \nu_{\sigma 2}, \cdots \nu_{\sigma n}}(\nu_{\sigma 1} + 1)$$
$$+ C^{(\sigma)}_{\mu_\sigma - \lambda_2, \nu_{\sigma 1}, \nu_{\sigma 2}+1, \cdots \nu_{\sigma n}}(\nu_{\sigma 2} + 1) + \cdots$$
$$+ C^{(\sigma)}_{\mu_\sigma - \lambda_k, \nu_{\sigma 1}, \cdots \nu_{\sigma k}+1, \nu_{\sigma k+1}, \cdots \nu_{\sigma n}}(\nu_{\sigma k} + 1) = \psi_{\mu_\sigma \nu_{\sigma 1} \nu_{\sigma 2} \cdots \nu_{\sigma n}},$$

wenn die φ-Function in (51) den Coefficienten von

$$x^{\mu_\varrho + \nu_{\varrho k+1} L_{k+1} + \cdots + \nu_{\varrho n} L_n} t_1^{\nu_{\varrho 1}} \ldots t_k^{\nu_{\varrho k}}$$

auf der rechten Seite der Gleichung (47) von der ersten Summe abgesehen bedeutet und, σ für ϱ gesetzt, die ψ-Function dasselbe auf der rechten Seite der Gleichung (48) darstellt; diese φ- und ψ-Functionen bestehen, wie unmittelbar zu sehen, aus Posten, welche die Form haben

$$K A^{(\tau)}_{s_0 s_1 \cdots s_n} C^{(1) p_1}_{m_1 n_{11} \cdots n_{1n}} C^{(2) p_2}_{m_2 n_{21} \cdots n_{2n}} \ldots C^{(n) p_n}_{m_n n_{n1} \cdots n_{nn}},$$

worin K eine ganze Zahl und $A^{(\tau)}_{s_0 s_1 \cdots s_n}$ den Coefficienten von

$$x^{s_0} Y_1^{s_1} Y_2^{s_2} \ldots Y_n^{s_n}$$

in der τ^{ten} der Differentialgleichungen (38) bedeutet.

Aus den Gleichungen (51) und (52) sieht man aber leicht, dass, wenn man $L_1, L_2, \ldots L_n$ gegen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ convergiren lässt, die Grössen C sich als endliche Grössen ergeben, da die Factoren

$$\mu_\varrho + \nu_{\varrho 1} L_1 + \cdots + \nu_{\varrho n} L_n - L_\varrho, \quad \mu_\sigma + \nu_{\sigma 1} L_1 + \cdots + \nu_{\sigma n} L_n$$

von Null verschieden sind, und dass somit die Integrale (44) des Systems (36) convergiren.

Es ist somit der folgende Satz erwiesen:

Wenn in dem Systeme von Differentialgleichungen (1) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ *positive ganze Zahlen bedeuten und die reellen Theile der sämmtlichen übrigen* $\lambda_{k+1}, \ldots \lambda_n$ *positiv und von Null verschieden sind, so besitzt das System von Differentialgleichungen unendlich viele, für* $x = 0$ *verschwindende und nach ganzen Potenzen von*

$$x, x^{\lambda_1} \log x, \quad x^{\lambda_2} \log x, \ldots x^{\lambda_k} \log x, \quad x^{\lambda_{k+1}}, \quad x^{\lambda_{k+2}}, \ldots x^{\lambda_n}$$

fortschreitende, um $x = 0$ *convergente Integralentwicklungen, und andere für* $x = 0$ *im angegebenen Sinne verschwindende Integrale hat das System überhaupt nicht.*

5. Fassen wir die in den letzten beiden Abschnitten gewonnenen Resultate zusammen, so erhalten wir das folgende allgemeine Theorem:

Zur Untersuchung der Existenz und Natur der für $x = 0$ verschwindenden Integrale des Differentialgleichungsystems

$$(53)\begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx} = \lambda_{11} y_1 + \cdots + \lambda_{1n} y_n + a_1 x + (x, y_1, y_2, \cdots y_n)^2 + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x\dfrac{dy_n}{dx} = \lambda_{n1} y_1 + \cdots + \lambda_{nn} y_n + a_n x + (x, y_1, y_2, \cdots y_n)^2 + \cdots \end{cases}$$

in der Umgebung dieses Punktes löse man die Gleichung auf

$$(54)\qquad \begin{vmatrix} \lambda_{11} - \lambda & \lambda_{21} & \ldots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} - \lambda & \ldots & \lambda_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \ldots & \lambda_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

ist dann

1. ***keine der im Allgemeinen verschiedenen**) *n Lösungen***

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots \lambda_n$$

dieser Gleichung eine positive ganze Zahl,

so wird, wenn

A. *der reelle Theil einer oder mehrerer der λ-Grössen negativ oder Null ist,*

stets ein für $x = 0$ verschwindendes und um $x = 0$ herum eindeutiges Integralsystem existiren, und sonst, wenn die reellen Theile sämmtlicher λ-Grössen negativ oder Null sind, im Allgemeinen kein anderes eindeutiges oder nicht eindeutiges für $x = 0$ im angegebenen Sinne verschwindendes Integralsystem, während, wenn die reellen Theile nur einiger der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ negative oder verschwindende Werthe besitzen, Integralsysteme der verlangten Art wohl existiren können:

wenn dagegen

---

*) Der Uebergang zu dem Falle gleicher Lösungen ist oben besprochen worden.

B. *die reellen Theile sämmtlicher Grössen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *positiv und von Null verschieden sind,*

so wird ebenfalls stets ein für $x = 0$ *verschwindendes und in der Umgebung von* $x = 0$ *eindeutiges Integralsystem vorhanden sein, ausserdem aber unendlich viele andere für* $x = 0$ *verschwindende und nach ganzen Potenzen von*

$$x, \quad x^{\lambda_1}, \quad x^{\lambda_2}, \quad \ldots x^{\lambda_n}$$

fortschreitende convergente Integralsysteme, und sonst keine anderen mehr.

Sind jedoch

II. ***von den n Lösungen der Gleichung*** (54)

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots \lambda_k$$

positive ganze Zahlen,

so wird, wenn

A. *eine der übrigen Grössen* $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots \lambda_n$ *einen reellen Theil besitzt, der negativ oder Null ist,*

das Differentialgleichungsystem im Allgemeinen) gar kein für* $x = 0$ *verschwindendes eindeutiges Integralsystem besitzen, und auch kein anderes mehrdeutiges Integralsystem, wenn das unendlich wenig variirte Differentialgleichungsystem nur eindeutige Integrale hat;*

wenn dagegen

B. *sämmtliche übrigen Grössen* $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_n$ *positive, von Null verschiedene reelle Theile besitzen,*

so hat das Differentialgleichungsystem im Allgemeinen wieder kein für $x = 0$ *verschwindendes und in der Umgebung dieses Punktes eindeutiges Integralsystem, dagegen unendlich viele für* $x = 0$ *verschwindende und nach ganzen Potenzen von*

$$x, \; x^{\lambda_1} \log x, \; x^{\lambda_2} \log x, \; \ldots x^{\lambda_k} \log x, \; x^{\lambda_{k+1}}, \; x^{\lambda_{k+2}}, \; \ldots x^{\lambda_n}$$

fortschreitende, um $x = 0$ *convergente Integralsysteme, und sonst keine mehr.*

---

*) den im vorigen Abschnitte hervorgehobenen Fall ausgenommen, in dem, wenn durch die Substitutionen (32) des III. Abschnittes die positiven ganzzahligen λ auf die Einheit reducirt werden, dann eindeutige Integrale existiren, wenn die Coefficienten der ersten Potenzen von x zugleich verschwinden.

6. Um zu zeigen, wie man in gegebenen Fällen auch für die in dem eben ausgesprochenen allgemeinen Satze enthaltenen Ausnahmeformen von Differentialgleichungsystemen den Charakter der Integrale zu ermitteln hat, sei die Differentialgleichung vorgelegt

$$x\frac{d^m y}{dx^m} = f(x, y, y', y'', \ldots y^{(m-1)}), \tag{55}$$

und es werde verlangt, die Natur der Integrale derselben in der Umgebung des Werthes $x = 0$ festzustellen, für welchen $y, y', \ldots y^{(m-1)}$ die Werthe

$$\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{m-1} \tag{56}$$

annehmen sollen, wenn vorausgesetzt wird, dass die Function $f(x, y, y', \ldots y^{(m-1)})$ als Function der von einander unabhängigen Variabeln $x, y, y', \ldots y^{(m-1)}$ aufgefasst in der Umgebung des Nullpunktes von x und der entsprechenden Werthe (56) für die übrigen Variabeln endlich, stetig und eindeutig ist.

Setzen wir

$$y = \eta + z, \quad y' = \eta_1 + z_1, \quad y'' = \eta_2 + z_2, \\ \ldots y^{(m-1)} = \eta_{m-1} + z_{m-1}, \tag{57}$$

und denken uns die rechte Seite der Differentialgleichung (55) der eben gemachten Voraussetzung zufolge in eine nach positiven steigenden ganzen Potenzen von

$$x, y - \eta, y' - \eta_1, y'' - \eta_2, \ldots y^{(m-1)} - \eta_{m-1} \tag{58}$$

fortschreitende convergente Reihe entwickelt, so ist das vorgelegte Problem darauf reducirt, für das Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \eta_1 + z_1 \\ \dfrac{dz_1}{dx} = \eta_2 + z_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dz_{m-2}}{dx} = \eta_{m-1} + z_{m-1} \\ x\dfrac{dz_{m-1}}{dx} = a_0 z + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_{m-1} z_{m-1} + ax \\ \qquad\qquad + (x, z, z_1, \ldots z_{m-1})^2 + \cdots \end{cases} \tag{59}$$

in der Umgebung des Werthes $x = 0$, dem die Nullwerthe der abhängigen Variabeln entsprechen sollen, die Natur seiner Integrale zu untersuchen.

Setzt man (59) in die Form

$$(60) \begin{cases} x\dfrac{dz}{dx} = \eta_1 x + x z_1 \\ x\dfrac{dz_1}{dx} = \eta_2 x + x z_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x\dfrac{dz_{m-2}}{dx} = \eta_{m-1} x + x z_{m-1} \\ x\dfrac{dz_{m-1}}{dx} = a_0 z + a_1 z_1 + \cdots + a_{m-1} z_{m-1} + a x \\ \qquad\qquad + (x, z, z_1, \ldots z_{m-1})^2 + \cdots, \end{cases}$$

multiplicirt diese Differentialgleichungen der Reihe nach mit den unbestimmten Factoren $A, A_1, \cdots A_{m-1}$, und addirt alle diese Gleichungen, so erhält man den Gleichungen (3), (4) des Abschnittes III gemäss, wenn

$$(61) \qquad A z + A_1 z_1 + A_2 z_2 + \cdots + A_{m-1} z_{m-1} = Z_m$$

gesetzt wird,

$$(62)\; A_{m-1} a_0 z + A_{m-1} a_1 z_1 + \cdots + A_{m-1} a_{m-2} z_{m-2} + A_{m-1} a_{m-1} z_{m-1} \\ = P(A z + A_1 z_1 + \cdots + A_{m-2} z_{m-2} + A_{m-1} z_{m-1})$$

und somit

$$(63)\; A_{m-1} a_0 = A P,\; A_{m-1} a_1 = A_1 P,\; \ldots A_{m-1} a_{m-2} = A_{m-2} P, \\ A_{m-1} a_{m-1} = A_{m-1} P,$$

woraus

$$(64)\; P = a_{m-1},\; A_{m-2} = A_{m-1}\frac{a_{m-2}}{a_{m-1}},\; \ldots A_1 = A_{m-1}\frac{a_1}{a_{m-1}}, \\ A = A_{m-1}\frac{a_0}{a_{m-1}}$$

folgt, und daher die Differentialgleichung sich ergiebt

$$(65)\; x\frac{dZ_m}{dx} = a_{m-1} Z_m + A x + (x, z, z_1, \ldots z_{m-2}, Z_m)^2 + \cdots.$$

Ersetzt man nun $z, z_1, z_2, \ldots z_{m-2}$ durch $Z_1, Z_2, \ldots Z_{m-1}$, so erhält man nach (60), (61) und (65), wenn zugleich $A_{m-1} = 1$ gesetzt wird, das Differentialgleichungsystem

$$
(66)\quad \begin{cases}
x\dfrac{dZ_1}{dx} = \eta_1 x + xZ_2 \\
x\dfrac{dZ_2}{dx} = \eta_2 x + xZ_3 \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
x\dfrac{dZ_{m-1}}{dx} = \eta_{m-1} x - \dfrac{x}{a_{m-1}}(a_0 Z_1 + a_1 Z_2 + \cdots + a_{m-2} Z_{m-1} - a_{m-1} Z_m) \\
x\dfrac{dZ_m}{dx} = a_{m-1} Z_m + Ax + (x, Z_1, Z_2, \ldots Z_{m-1}, Z_m)^2 + \cdots,
\end{cases}
$$

dessen Integrale vermöge der angegebenen Substitutionen die Natur der Integrale des vorgelegten Differentialgleichungsystems (59) haben werden.

Da in den Bezeichnungen der vorigen Nummer

$$
(67)\qquad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \ldots \lambda_{m-1} = 0, \quad \lambda_m = a_{m-1}
$$

ist, so folgt,

I. *wenn a_{m-1} nicht eine positive ganze Zahl ist,*
zunächst aus dem dort ausgesprochenen allgemeinen Satze,

dass das Differentialgleichungsystem (59) *jedenfalls ein für $x = 0$ verschwindendes und in der Umgebung dieses Punktes eindeutiges Integralsystem besitzen wird.*

Unter eben dieser Annahme für a_{m-1} sind nun, um die Existenz und Natur noch anderer Integralsysteme zu untersuchen, die beiden Fälle zu unterscheiden, in denen der reelle Theil von a_{m-1} negativ oder positiv ist, und die beide zu I. A. des obigen Satzes gehören, indem die zu I. B. gehörige Annahme für das vorgelegte Differentialgleichungsystem nicht statthaben kann.

Sei also

a) *der reelle Theil von a_{m-1} negativ oder Null,*

so ist aus den in IV. 1. dieses Kapitels gemachten Auseinandersetzungen ersichtlich, *dass andere verschwindende Integralsysteme als das eben bezeichnete eindeutige überhaupt nicht existiren,* da schon *eine* Differentialgleichung von der Form

$$
x\frac{dy}{dx} = \lambda y + ax + (x, y)^2 + \cdots,
$$

in welcher der reelle Theil von λ negativ oder Null ist, nur *ein*

eindeutiges Integral und sonst keine anderen weder eindeutige noch mehrdeutige Integrale besitzt.

Ist jedoch

b) *der reelle Theil von* a_{m-1} *positiv*,

so dass in den Bezeichnungen des vorher bewiesenen Satzes nur einige der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ verschwindende reelle Theile haben, dann gehört diese Annahme zu den Ausnahmefällen von I. A. und muss für das vorgelegte Differentialgleichungsystem speciell behandelt werden.

Man erkennt aber sofort, dass, wenn man den Gleichungen (18) analog

$$(68) \quad \begin{cases} Z_1 = \sum c^{(1)}_{\mu_1 \nu_{1m}} x^{\mu_1 + a_{m-1}\nu_{1m}} \\ \qquad (\mu_1, \nu_{1m} = 0, 1, 2, \ldots \infty) \\ Z_2 = \sum c^{(2)}_{\mu_2 \nu_{2m}} x^{\mu_2 + a_{m-1}\nu_{2m}} \\ \qquad (\mu_2, \nu_{2m} = 0, 1, 2, \ldots \infty) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_{m-1} = \sum c^{(m-1)}_{\mu_{m-1} \nu_{m-1 m}} x^{\mu_{m-1} + a_{m-1}\nu_{m-1 m}} \\ \qquad (\mu_{m-1}, \nu_{m-1 m} = 0, 1, 2, \ldots \infty) \\ Z_m = x^{a_{m-1}} \sum c^{(m)}_{\mu_m \nu_{mm}} x^{\mu_m + a_{m-1}\nu_{mm}} \\ \qquad (\mu_m, \nu_{mm} = 0, 1, 2, \ldots \infty) \end{cases}$$

setzt, sich zunächst wieder, genau wie dort, die Coefficienten dieser Reihen eindeutig derart bestimmen lassen, dass die Ausdrücke (68) dem vorgelegten Differentialgleichungsystem formal genügen; dann aber wird, wenn für alle ganzzahligen p und p_m

$$(69) \qquad \operatorname{mod}\,[p + a_{m-1}\,p_m] > K$$

ist, ferner

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots \; C_m$$

völlig willkürliche Grössen darstellen, und $M, \varrho, r_1, r_2, \ldots$ die oben angegebene Bedeutung haben, das dem Systeme (32) analoge Gleichungsystem

$$(70)\quad\left\{\begin{aligned}
KT_1 &= KC_1 + \frac{M}{\varrho}x + \frac{M}{\varrho^2}x^2 + \frac{M}{r_1}T_1 + \cdots \\
&\quad + \frac{M}{r_m}x^{a_{m-1}}T_m + \frac{M}{\varrho r_1}xT_1 + \cdots \\
KT_2 &= KC_2 + \frac{M}{\varrho}x + \frac{M}{\varrho^2}x^2 + \frac{M}{r_1}T_1 + \cdots \\
&\quad + \frac{M}{r_m}x^{a_{m-1}}T_m + \frac{M}{\varrho r_1}xT_1 + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
KT_m &= KC_m x^{a_{m-1}} + \frac{M}{\varrho}x + \frac{M}{\varrho^2}x^2 + \frac{M}{r_1}T_1 + \cdots \\
&\quad + \frac{M}{r_m}x^{a_{m-1}}T_m + \frac{M}{\varrho r_1}xT_1 + \cdots
\end{aligned}\right.$$

zu Auflösungen convergente Reihen haben, deren Glieder einzeln grösser sind als die Moduln der Glieder der Reihen (68), und es wird somit nach Schlüssen, welche völlig den oben in Nummer 3. gemachten ähnlich sind, ersichtlich sein, dass in dem betrachteten Falle b) *ausser dem stets bestehenden eindeutigen Integralsysteme für das Differentialgleichungssystem* (66) *noch eine unendliche Anzahl im Allgemeinen nicht eindeutiger, im oben angegebenen Sinne für $x = 0$ verschwindender, nach positiven, ganzen, steigenden Potenzen von x und $x^{a_{m-1}}$ entwickelbarer Integralsysteme existirt.*

Sei

II. a_{m-1} *eine positive ganze Zahl*,

so hat nach II. A. des in der vorigen Nummer bewiesenen Satzes *das Differentialgleichungssystem* (66) *im Allgemeinen gar kein für $x = 0$ verschwindendes eindeutiges Integralsystem;* ist jedoch in der letzten Gleichung (66)

a) *der Coefficient A der ersten Potenz von x gleich Null,* so giebt es nach III. 5. dieses Kapitels *unendlich viele um $x = 0$ herum eindeutige und für diesen Werth verschwindende Integralsysteme.*

Ist dagegen

b) *der Coefficient A der ersten Potenz von x von Null verschieden,*

so würde diese Annahme für das vorgelegte Differentialgleichungssystem einen zu II. A. des in der vorigen Nummer

ausgesprochenen Hauptsatzes gehörigen Ausnahmefall liefern, indem das unendlich wenig variirte Differentialgleichungsystem auch mehrdeutige Integralsysteme besitzen wird.

Reduciren wir zunächst wieder, wie durch bekannte Substitutionen wiederholt früher geschehen, das Differentialgleichungsystem (66) auf ein anderes, in welchem a_{m-1} gleich der positiven Einheit ist, setzen sodann

$$(71) \qquad x = \xi, \quad x^{\frac{1}{2}} \log x = \eta, \quad \frac{1}{\log x} = \zeta$$

und bilden wieder die nach positiven, ganzen steigenden Potenzen von ξ, η, ζ fortschreitenden Reihen

$$(72) \quad \begin{cases} Z_1 = \sum c^{(1)}_{\mu_1 \nu_{11} \nu_{12}} \xi^{\mu_1} \eta^{\nu_{11}} \zeta^{\nu_{12}} \\ \qquad (\mu_1, \nu_{11}, \nu_{12} = 0, 1, 2, \ldots \infty) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Z_m = \sum c^{(m)}_{\mu_m \nu_{m1} \nu_{m2}} \xi^{\mu_m} \eta^{\nu_{m1}} \zeta^{\nu_{m2}}, \end{cases}$$

so kann man einerseits genau wie oben wieder beweisen, dass man die Coefficienten dieser Reihen so bestimmen kann, dass die Ausdrücke (72) dem Differentialgleichungsystem (66), in welchem $a_{m-1} = 1$ angenommen wird, formal genügen, andererseits die Convergenz dieser Reihen genau wie oben durch Vergleichung mit m solchen Reihen, welche die Auflösungen eines dem Systeme (70) analogen Gleichungsystemes bilden, feststellen, und findet somit,

dass, wenn a_{m-1} gleich der positiven Einheit und A von Null verschieden ist, für das Differentialgleichungsystem (66) *um den Punkt $x = 0$ herum unendlich vieldeutige und im Nullpunkte verschwindende Integralsysteme existiren, welche nach positiven steigenden ganzen Potenzen von x, $x^{\frac{1}{2}} \log x$, $\frac{1}{\log x}$ fortschreitende Reihen bilden.*

V. Aufstellung der Kriterien für die Eindeutigkeit der Integrale beliebiger algebraischer Differentialgleichungsysteme.

1. Nachdem wir schon am Anfange dieses Kapitels für einige Fälle algebraischer Differentialgleichungsysteme die Natur der Integrale hatten erkennen können, nehmen wir

jetzt die Untersuchung algebraischer Differentialgleichungsysteme beliebiger Klasse ganz allgemein wieder auf, indem wir die Methoden entwickeln, wie man für ein Differentialgleichungsystem der Form

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{\partial G(x, t_1, y_1, y_2, \dots y_n)}{\partial t_1} \frac{dy_1}{dx} = G_1(x, t_1, y_1, \cdots y_n) \\ \frac{\partial G(x, t_1, y_1, y_2, \dots y_n)}{\partial t_1} \frac{dy_2}{dx} = G_2(x, t_1, y_1, \cdots y_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial G(x, t_1, y_1, y_2, \dots y_n)}{\partial t_1} \frac{dy_n}{dx} = G_n(x, t_1, y_1, \cdots y_n), \end{cases}$$

worin t_1 eine Lösung der mit Adjungirung von $x, y_1, y_2, \dots y_n$ irreductibeln Gleichung

$$(2)\qquad G(x, t, y_1, y_2, \dots y_n) = 0$$

ist, die Existenz und Natur der in der Umgebung eines Punktes $x = \xi$ gültigen Integralsysteme, welche in diesem Punkte die willkürlich gegebenen Werthe

$$y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_2, \quad \dots y_n = \eta_n$$

annehmen, bestimmen kann, wobei die Werthe der Ableitungen im Punkte ξ

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_\xi, \quad \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_\xi, \quad \dots \left(\frac{dy_n}{dx}\right)_\xi$$

durch

$$\mathsf{H}_1, \quad \mathsf{H}_2, \quad \dots \mathsf{H}_n$$

bezeichnet werden mögen.

Zunächst ist aus dem ersten Abschnitte dieses Kapitels bekannt, dass, wenn der zu dem Werthesystem

$$(3)\qquad x = \xi, \ y_1 = \eta_1, \ y_2 = \eta_2, \ \dots y_n = \eta_n$$

gehörige Werth τ_1 von t_1 unendlich gross ist, die reciproke Substitution für die Variable t die Untersuchung auf $\tau_1 = 0$ zurückführt, und wir dürfen daher im Folgenden den zu dem Werthesystem (3) gehörigen Werth τ_1 von t_1 als endlich betrachten.

Differentiirt man nun die Gleichung (2) nach x, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (1)

$$(4)\qquad \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y_1} \frac{G_1}{\frac{\partial G}{\partial t_1}} + \cdots + \frac{\partial G}{\partial y_n} \frac{G_n}{\frac{\partial G}{dt_1}} + \frac{\partial G}{\partial t_1} \frac{dt_1}{dx} = 0,$$

und somit ein Differentialgleichungsystem $n + 1^{\text{ter}}$ Klasse:

$$(5)\begin{cases} \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots y_n)}{\partial t_1} \dfrac{dy_1}{dx} = G_1(x, t_1, y_1, \dots y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots y_n)}{\partial t_1} \dfrac{dy_n}{dx} = G_n(x, t_1, y_1, \dots y_n) \\ \dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \dots y_n)}{\partial t_1} \dfrac{dt_1}{dx} = -\dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial G}{\partial y_1} \dfrac{G_1}{\dfrac{\partial G}{\partial t_1}} - \dots - \dfrac{\partial G}{\partial y_n} \dfrac{G_n}{\dfrac{\partial G}{\partial t_1}} \end{cases}$$

mit der unabhängigen Variabeln x und den abhängigen Variabeln $y_1, y_2, \dots y_n$ und t_1, dessen Integralsystem für $x = \xi$ die Werthe $y_1 = \eta_1, y_2 = \eta_2, \dots y_n = \eta_n, t_1 = \tau_1$ annehmen soll.

Da nun G und G_1 ganze Functionen der Grössen $x, y_1, \dots y_n, t_1$ sind, so kann man das System (5), wenn zur Abkürzung $P_{\xi, \eta_1, \dots \eta_n, \tau_1}$ mit $(P)_0$ bezeichnet, und die oben definirten Grössen $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \dots \mathsf{H}_n$ eingeführt werden, in die Form bringen

$$(6)\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{(G_1)_0 + (x-\xi)\left(\dfrac{\partial G_1}{\partial x}\right)_0 + (t_1-\tau_1)\left(\dfrac{\partial G_1}{\partial t_1}\right)_0 + (y_1-\eta_1)\left(\dfrac{\partial G_1}{\partial y_1}\right)_0 + \cdots + (y_n-\eta_n)\left(\dfrac{\partial G_1}{\partial y_n}\right)_0 + \cdots}{\left(\dfrac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 + (x-\xi)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial x}\right)_0 + (t_1-\tau_1)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1^2}\right)_0 + (y_1-\eta_1)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial y_1}\right)_0 + \cdots + (y_n-\eta_n)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial y_n}\right)_0 + \cdots} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \dfrac{(G_n)_0 + (x-\xi)\left(\dfrac{\partial G_n}{\partial x}\right)_0 + (t_1-\tau_1)\left(\dfrac{\partial G_n}{\partial t_1}\right)_0 + (y_1-\eta_1)\left(\dfrac{\partial G_n}{\partial y_1}\right)_0 + \cdots + (y_n-\eta_n)\left(\dfrac{\partial G_n}{\partial y_n}\right)_0 + \cdots}{\left(\dfrac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 + (x-\xi)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial x}\right)_0 + (t_1-\tau_1)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1^2}\right)_0 + (y_1-\eta_1)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial y_1}\right)_0 + \cdots + (y_n-\eta_n)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial y_n}\right)_0 + \cdots} \\ \dfrac{dt_1}{dx} = \dfrac{-\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)_0 - \left(\dfrac{\partial G}{\partial y_1}\right)_0 \mathsf{H}_1 - \cdots - \left(\dfrac{\partial G}{\partial y_n}\right)_0 \mathsf{H}_n - (x-\xi)\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial G}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y_1}\dfrac{G_1}{\dfrac{\partial G}{\partial t_1}} + \cdots + \dfrac{\partial G}{\partial y_n}\dfrac{G_n}{\dfrac{\partial G}{\partial t_1}}\right)\right]_0 - \cdots}{\left(\dfrac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 + (x-\xi)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial x}\right)_0 + (t_1-\tau_1)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1^2}\right)_0 + (y_1-\eta_1)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial y_1}\right)_0 + \cdots + (y_n-\eta_n)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial y_n}\right)_0 + \cdots} \end{cases}$$

und hieraus folgt zunächst, *dass, wie schon aus Früherem bekannt ist, wenn* $\left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0$ *von Null verschieden ist, wegen der Entwickelbarkeit der reciproken Werthe der Nenner der rechten Seiten nach ganzen positiven steigenden Potenzen von*

$$x - \xi, \quad t_1 - \tau_1, \quad y_1 - \eta_1, \quad \ldots y_n - \eta_n$$

die Grössen $y_1, \ldots y_n, t_1$ *in der Umgebung von* $x = \xi$ *nach positiven ganzen steigenden Potenzen von* $x - \xi$ *entwickelbar sind und für* $x = \xi$ *die vorgeschriebenen Werthe* $\eta_1, \ldots \eta_n, \tau_1$ *annehmen.*

Ist jedoch

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 = 0, \tag{7}$$

so werden die Nenner der rechten Seiten der Differentialgleichungen kein constantes Glied enthalten, und die Differentialgleichungen (6) somit zu dem Systeme (28) des ersten Abschnittes dieses Kapitels gehören. Dort war in Nr. 3 gezeigt worden, dass, wenn nur einer der Zähler des Differentialgleichungssystems (28) z. B. r_α ein constantes Glied besitzt, die m Functionen $y_1, \ldots y_m$ sich nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $(x - \xi)^{\frac{1}{n}}$ entwickeln liessen, wenn der erste für dieses Werthesystem nicht verschwindende Differentialquotient von x nach y_α genommen der n^{te} ist, und zwar enthielt dann die Entwicklung von $y_\alpha - \eta_\alpha$ die erste Potenz von $(x - \xi)^{\frac{1}{n}}$. Wenden wir dies auf das obige Differentialgleichungssystem (6) an, so folgt,

dass, wenn in der letzten Differentialgleichung dieses Systems das constante Glied des Zählers

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}\right)_0 \mathsf{H}_1 + \cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial y_n}\right)_0 \mathsf{H} \tag{8}$$

von Null verschieden ist, sich $y_1, y_2, \ldots y_n, t_1$ *nach positiven steigenden ganzen Potenzen von* $(x - \xi)^{\frac{1}{m}}$ *entwickeln lassen, wenn der erste für das gegebene Werthesystem nicht verschwindende Differentialquotient von* x *nach* t_1 *genommen der* m^{te} *ist.*

Nun sieht man aber leicht, dass vermöge (7) nach der Annahme, dass $\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0, \cdots \left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0$ endliche Werthe haben sollen,

$$(G_1)_0 = (G_2)_0 = \cdots = (G_n)_0 = 0, \tag{9}$$

also auch

$$\left(\frac{dy_1}{dt_1}\right)_0 = \left(\frac{dy_2}{dt_1}\right)_0 = \cdots = \left(\frac{dy_n}{dt_1}\right)_0 = 0 \tag{10}$$

ist, und dass somit, wenn x als Function von t_1 aufgefasst wird, wie sich sogleich durch Differentiation der reciproken Seiten der letzten Gleichung von (6) ergiebt, die Annahme, dass der erste für das gegebene Werthesystem nicht verschwindende Differentialquotient von x nach t_1 der m^{te} ist, mit der Annahme zusammenfällt, dass

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t_1^2}\right)_0 = \cdots = \left(\frac{\partial^{m-1} G}{\partial t_1^{m-1}}\right)_0 = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^m G}{\partial t_1^m}\right)_0$$

von Null verschieden.

Somit folgt

wenn in dem Differentialgleichungsystem (1)

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t_1^2}\right)_0 = \cdots = \left(\frac{\partial^{m-1} G}{\partial t_1^{m-1}}\right)_0 = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^m G}{\partial t_1^m}\right)_0 \tag{11}$$

von Null verschieden ist, und es ist der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}\right)_0 \mathsf{H}_1 + \cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial y_n}\right)_0 \mathsf{H}_n$$

nicht Null, so lassen sich $y_1, y_2, \ldots y_n$ *nach positiven steigenden ganzen Potenzen von* $(x-\xi)^{\frac{1}{m}}$ *entwickeln und nehmen für* $x = \xi$ *die Werthe* $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ *an.*

Wenn jedoch

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}\right)_0 \mathsf{H}_1 + \cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial y_n}\right)_0 \mathsf{H}_n = 0 \tag{12}$$

wird, wobei die frühere Bedingung

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 = 0 \tag{13}$$

festzuhalten ist, so geht das Differentialgleichungsystem (6) vermöge (9) und (12) in

$$
(14)\quad
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{(x-\xi)\left(\dfrac{\partial G_1}{\partial x}\right)_0 + (t_1-\tau_1)\left(\dfrac{\partial G_1}{\partial t_1}\right)_0 + (y_1-\eta_1)\left(\dfrac{\partial G_1}{\partial y_1}\right)_0 + \cdots + (y_n-\eta_n)\left(\dfrac{\partial G_1}{\partial y_n}\right)_0 + \cdots}{(x-\xi)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial x}\right)_0 + (t_1-\tau_1)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1^2}\right)_0 + (y_1-\eta_1)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial y_1}\right)_0 + \cdots + (y_n-\eta_n)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial y_n}\right)_0 + \cdots} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{dy_n}{dx} = \dfrac{(x-\xi)\left(\dfrac{\partial G_n}{\partial x}\right)_0 + (t_1-\tau_1)\left(\dfrac{\partial G_n}{\partial t_1}\right)_0 + (y_1-\eta_1)\left(\dfrac{\partial G_n}{\partial y_1}\right)_0 + \cdots + (y_n-\eta_n)\left(\dfrac{\partial G_n}{\partial y_n}\right)_0 + \cdots}{(x-\xi)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial x}\right)_0 + (t_1-\tau_1)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1^2}\right)_0 + (y_1-\eta_1)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial y_1}\right)_0 + \cdots + (y_n-\eta_n)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial y_n}\right)_0 + \cdots} \\
\dfrac{dt_1}{dx} = \dfrac{-(x-\xi)\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial G}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y_1}\dfrac{G_1}{\dfrac{\partial G}{\partial t_1}} + \cdots + \dfrac{\partial G}{\partial y_n}\dfrac{G_n}{\dfrac{\partial G}{\partial t_1}}\right)\right]_0 - (t_1-\tau_1)\left[\dfrac{\partial}{\partial t_1}\left(\dfrac{\partial G}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y_1}\dfrac{G_1}{\dfrac{\partial G}{\partial t_1}} + \cdots + \dfrac{\partial G}{\partial y_n}\dfrac{G_n}{\dfrac{\partial G}{\partial t_1}}\right)\right]_0 - \cdots}{(x-\xi)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial x}\right)_0 + (t_1-\tau_1)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1^2}\right)_0 + (y_1-\eta_1)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial y_1}\right)_0 + \cdots + (y_n-\eta_n)\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial t_1 \partial y_n}\right)_0 + \cdots}
\end{cases}
$$

über; da nun die rechten Seiten desselben für das Werthesystem $\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n, \tau_1$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so ist die Untersuchung hiermit auf ein Differentialgleichungsystem von der Form (1) des II. Abschnittes dieses Kapitels zurückgeführt.

Ist also das Differentialgleichungsystem (1), (2) *vorgelegt, und soll für den Werth* $x = \xi$ *die Natur derjenigen Integralelemente dieses Systems untersucht werden, welche für diesen Werth von* x *die Werthe* $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ *annehmen, und deren Ableitungen in diesem Punkte die endlichen Werthe* $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_n$ *besitzen, so werden*

1) *wenn* $\left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0$ *von Null verschieden ist,*

$y_1, y_2, \ldots y_n$ *in der Umgebung von* $x = \xi$ *nach positiven steigenden ganzen Potenzen von* $x - \xi$ *entwickelbar sein;*

2) *wenn* $\left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 = 0$ *und*

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}\right)_0 \mathsf{H}_1 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_2}\right)_0 \mathsf{H}_2 + \cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial y_n}\right)_0 \mathsf{H}_n$$

von Null verschieden ist,

$y_1, y_2, \ldots y_n$ *sich nach positiven steigenden ganzen Potenzen von* $(x - \xi)^{\frac{1}{m}}$ *entwickeln lassen, worin die Zahl m die Ordnung der ersten für das Werthesystem* $\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ *nicht verschwindenden Ableitung von G nach* t_1 *genommen bezeichnet;*

3) *wenn*

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t_1}\right)_0 = 0 \quad \textit{und}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}\right)_0 \mathsf{H}_1 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_2}\right)_0 \mathsf{H}_2 + \cdots + \left(\frac{\partial G}{\partial y_n}\right)_0 \mathsf{H}_n = 0$$

ist, nach den in den letzten Abschnitten dieses Kapitels angegebenen Methoden das Differentialgleichungsystem $n + 1^{\text{ter}}$ *Klasse* (14) *in den abhängigen Variabeln* $y_1, y_2, \ldots y_n, t_1$ *und der unabhängigen Variabeln x, dessen rechte Seiten für das Werthesystem* $\xi, \eta_1, \ldots \eta_n, \tau_1$ *die unbestimmte Form* $\frac{0}{0}$ *annehmen, in Bezug auf die Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit der bezeichneten Integrale zu untersuchen sein.*

Sechstes Kapitel.

Untersuchung der Eigenschaften der Integrale linearer Differentialgleichungssysteme in der Umgebung eines beliebigen Werthes der unabhängigen Variabeln.

I. Feststellung der Natur der Mehrdeutigkeit und Discontinuität der Integralelemente beliebiger linearer Differentialgleichungssysteme.

Während es im letzten Kapitel für beliebige algebraische Differentialgleichungssysteme nur im Allgemeinen gelang, die Beschaffenheit der Integrale auch in den singulären Punkten festzustellen, gehört es zu den wesentlichsten Eigenschaften linearer Differentialgleichungssysteme, dass, sowie man für Quadraturen beliebiger algebraischer Functionen nachweisen konnte, dass sie nur wie algebraische oder logarithmische Functionen unstetig werden, auch die Integrale linearer Differentialgleichungssysteme nur Vieldeutigkeiten und Unstetigkeiten ganz bestimmt angebbarer Art besitzen.

1. Sei das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$
(1) \qquad \begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = A_{11} y_1 + A_{12} y_2 + \cdots + A_{1n} y_n \\[2ex]
\dfrac{dy_2}{dx} = A_{21} y_1 + A_{22} y_2 + \cdots + A_{2n} y_n \\[2ex]
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\[2ex]
\dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1} y_1 + A_{n2} y_2 + \cdots + A_{nn} y_n
\end{cases}
$$

gegeben, in welchem $A_{\alpha\beta}$ beliebige Functionen von x bedeuten, so werden die rechten Seiten dieses Systemes für ein gegebenes endliches Werthesystem von $x, y_1, y_2, \dots y_n$ offenbar nur dann aufhören können, endlich, stetig und eindeutig zu sein, wenn dies mit den Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ selbst der Fall ist, und es folgt somit zunächst,

dass für ein lineares Differentialgleichungsystem sämmtliche singulären Werthe nur in solchen Punkten der Ebene liegen können, in denen die Coefficienten der Differentialgleichungen aufhören, endlich, stetig und eindeutig zu sein.

Wird nun zunächst ein Theil T der x-Ebene betrachtet, in dem die Functionen $A_{\alpha\beta}$ von x eindeutig sind, und geht man von $x = x_0$ mit bestimmt angenommenen Werthen eines Integralsystems aus, so wird man, wie früher gezeigt worden, wenn x einen geschlossenen Umlauf beschreibt, der nicht singuläre Werthe, d. h. Discontinuitäten der Functionen $A_{\alpha\beta}$ einschliesst, nach x_0 mit denselben Integralwerthen zurückgelangen, es werden aber, wenn singuläre Werthe umkreist werden, die Integralelemente im Allgemeinen sich ändern, und wir wollen untersuchen, von welcher Art diese Aenderungen bei der Umkreisung *eines* solchen singulären Punktes sind. Ist der Unendlichkeitspunkt ein Eindeutigkeitspunkt, und soll die Veränderung der Integralelemente bei der Umkreisung dieses untersucht werden, so setze man

$$x = \frac{1}{t},$$

woraus sich

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{dy_1}{dt}t^2, \quad \dots \frac{dy_n}{dx} = -\frac{dy_n}{dt}t^2$$

ergiebt, und es geht, wenn $A_{\alpha\beta}$ als Function von t aufgefasst mit $A'_{\alpha\beta}$ bezeichnet wird, das System (1) in

$$\frac{dy_1}{dt} = -t^{-2}A'_{11}y_1 - t^{-2}A'_{12}y_2 - \cdots - t^{-2}A'_{1n}y_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = -t^{-2}A'_{n1}y_1 - t^{-2}A'_{n2}y_2 - \cdots - t^{-2}A'_{nn}y_n$$

über, die Untersuchung ist somit auf das entsprechende Inte-

gralsystem dieses wiederum linearen Differentialgleichungsystems in der Umgebung des Punktes $t = 0$ zurückgeführt.

Wird aber nun auch ein singulärer Punkt in Betracht gezogen, für welchen die Functionen $A_{\alpha\beta}$ vieldeutig sind, so lässt sich für den Fall, dass *keiner dieser Coefficienten in diesem Punkte unendlich vieldeutig ist*, die Untersuchung auf den Fall der Eindeutigkeit jener Functionen zurückführen: denn werde das kleinste gemeinsame Vielfache aller Cyclen, welche die Functionen $A_{\alpha\beta}$ in dem betrachteten Punkte a besitzen, mit m bezeichnet, so wird die Substitution

$$(x - a)^{\frac{1}{m}} = \xi \quad \text{oder} \quad x = \xi^m + a$$

die Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ offenbar in solche von ξ abhängige Grössen $A'_{\alpha\beta}$ verwandeln, welche bei einer einmaligen Umkreisung des Nullpunktes unverändert bleiben, also für $\xi = 0$ eindeutig sind, und es wird das Differentialgleichungsystem (1) vermöge dieser Substitution die Form annehmen:

$$\frac{dy_1}{d\xi} = m\xi^{m-1}A'_{11}y_1 + m\xi^{m-1}A'_{12}y_2 + \cdots + m\xi^{m-1}A'_{1n}y_n$$

$$\frac{dy_2}{d\xi} = m\xi^{m-1}A'_{21}y_1 + m\xi^{m-1}A'_{22}y_2 + \cdots + m\xi^{m-1}A'_{2n}y_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_n}{d\xi} = m\xi^{m-1}A'_{n1}y_1 + m\xi^{m-1}A'_{n2}y_2 + \cdots + m\xi^{m-1}A'_{nn}y_n,$$

worin sämmtliche Coefficienten in $\xi = 0$ eindeutig sind.

2. Seien nun die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

und lassen wir die Variable x den singulären Punkt a umkreisen, in welchem die Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ eindeutig sein sollen, so werden nach den Untersuchungen des dritten

Kapitels die Werthe, in welche die in (2) bezeichneten Functionen übergehen,

$$(3)\qquad \begin{cases} y'_{11} & y'_{12} \; . \; . \; . \; y'_{1n} \\ y'_{21} & y'_{22} \; . \; . \; . \; y'_{2n} \\ . \; . \; . & . \; . \; . \; . \\ y'_{n1} & y'_{n2} \; . \; . \; . \; y'_{nn} \end{cases}$$

wiederum Integrale von (1) sein, und zwar wieder ein simultanes Fundamentalsystem solcher Integrale bilden, so dass, wie oben gezeigt worden,

$$(4)\qquad \begin{cases} y'_{11} = \alpha_{11} y_{11} + \alpha_{21} y_{21} + \cdots + \alpha_{n1} y_{n1}, \ldots y'_{1n} = \alpha_{11} y_{1n} + \alpha_{21} y_{2n} + \cdots + \alpha_{n1} y_{nn} \\ y'_{21} = \alpha_{12} y_{11} + \alpha_{22} y_{21} + \cdots + \alpha_{n2} y_{n1}, \ldots y'_{2n} = \alpha_{12} y_{1n} + \alpha_{22} y_{2n} + \cdots + \alpha_{n2} y_{nn} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ y'_{n1} = \alpha_{1n} y_{11} + \alpha_{2n} y_{21} + \cdots + \alpha_{nn} y_{n1}, \ldots y'_{nn} = \alpha_{1n} y_{1n} + \alpha_{2n} y_{2n} + \cdots + \alpha_{nn} y_{nn} \end{cases}$$

und die Determinante

$$(5)\qquad R = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \; . \; . \; . \; \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \; . \; . \; . \; \alpha_{n2} \\ . \; . \; . & . \; . \; . \; . \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \; . \; . \; . \; \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Weiss man nun, worin jedes Element des Integralsystems (2) übergegangen ist, so ist auch bekannt, wie sich jedes Element irgend eines anderen Integralsystems bei der Umkreisung des Punktes a ändert; denn werde dieses mit $u_1, u_2, \ldots u_n$ bezeichnet, so ist

$$(6)\qquad \begin{cases} u_1 = \xi_1 y_{11} + \xi_2 y_{21} + \cdots + \xi_n y_{n1} \\ u_2 = \xi_1 y_{12} + \xi_2 y_{22} + \cdots + \xi_n y_{n2} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ u_n = \xi_1 y_{1n} + \xi_2 y_{2n} + \cdots + \xi_n y_{nn}, \end{cases}$$

worin $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ Constanten bedeuten, und es gehen daher nach (4) $u_1, u_2, \ldots u_n$ bei einer Umkreisung des Punktes a über in

$$(7)\quad\begin{cases} u_1' = \xi_1(\alpha_{11}y_{11}+\alpha_{21}y_{21}+\cdots+\alpha_{n1}y_{n1})+\xi_2(\alpha_{12}y_{11}+\alpha_{22}y_{21}+\cdots+\alpha_{n2}y_{n1})+\cdots \\ \qquad\qquad +\xi_n(\alpha_{1n}y_{11}+\cdots+\alpha_{nn}y_{n1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n' = \xi_1(\alpha_{11}y_{1n}+\alpha_{21}y_{2n}+\cdots+\alpha_{n1}y_{nn})+\xi_2(\alpha_{12}y_{1n}+\alpha_{22}y_{2n}+\cdots+\alpha_{n2}y_{nn})+\cdots \\ \qquad\qquad +\xi_n(\alpha_{1n}y_{1n}+\alpha_{2n}y_{2n}+\cdots+\alpha_{nn}y_{nn}), \end{cases}$$

oder, wenn

$$(8)\quad\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\cdots+\alpha_{1n}\xi_n = X_1 \\ \alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\cdots+\alpha_{2n}\xi_n = X_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\xi_1+\alpha_{n2}\xi_2+\cdots+\alpha_{nn}\xi_n = X_n \end{cases}$$

gesetzt wird, in

$$(9)\quad\begin{cases} u_1' = X_1y_{11}+X_2y_{21}+\cdots+X_ny_{n1} \\ u_2' = X_1y_{12}+X_2y_{22}+\cdots+X_ny_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n' = X_1y_{1n}+X_2y_{2n}+\cdots+X_ny_{nn}. \end{cases}$$

Wir wollen nun die constanten Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ so zu bestimmen suchen, dass

$$(10)\qquad u_1' = \omega u_1,\quad u_2' = \omega u_2,\quad \ldots\ u_n' = \omega u_n$$

ist, worin ω eine zu bestimmende Constante bedeuten soll. Da aber aus

$$(11)\quad X_1y_{1\alpha}+X_2y_{2\alpha}+\cdots+X_ny_{n\alpha} = \omega(\xi_1y_{1\alpha}+\xi_2y_{2\alpha}+\cdots+\xi_ny_{n\alpha}),$$

weil $y_{1\alpha}, y_{2\alpha}, \ldots y_{n\alpha}$ Elemente eines simultanen Fundamentalsystems sind, also zwischen ihnen für $\alpha = 1, 2, \ldots n$ keine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfinden darf, folgt, dass

$$(12)\qquad X_1 = \omega\xi_1,\quad X_2 = \omega\xi_2,\quad \ldots\ X_n = \omega\xi_n$$

sein muss, so ergiebt sich aus (8), dass $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ durch die n Gleichungen bestimmt sind:

$$(13)\quad\begin{cases} (\alpha_{11}-\omega)\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\cdots+\alpha_{1n}\xi_n = 0 \\ \alpha_{21}\xi_1+(\alpha_{22}-\omega)\xi_2+\cdots+\alpha_{2n}\xi_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\xi_1+\alpha_{n2}\xi_2+\cdots+(\alpha_{nn}-\omega)\xi_n = 0, \end{cases}$$

und dass daher ω eine Lösung der Gleichung

$$(14)\quad S(\omega) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \omega & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

ist; man nennt diese Gleichung *die zum Punkte a gehörige Fundamentalgleichung.*

Jede Lösung dieser Fundamentalgleichung wird aus (13) ein System von Werthen für $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ liefern, und somit nach (6) im Allgemeinen, *wenn nämlich alle diese n Lösungen von einander verschieden sind*, n Werthesysteme von $u_1, u_2, \ldots u_n$, welche nach (10) die Eigenschaft haben, bei einer Umkreisung von a in Werthe überzugehen, die von den Ausgangsintegralen um denselben Factor ω verschieden sind*). Da die Determinante R der Gleichung (5) in Folge der Annahme des simultanen Fundamentalsystems von Integralen von Null verschieden ist, so darf keine der Lösungen der Gleichung (14) verschwinden; setzt man daher

$$(15)\qquad \omega = e^{2r\pi i},$$

und legt dem r einen der unendlich vielen und um ganze Zahlen verschiedenen endlichen Werthe bei, welche diese Gleichung befriedigen, so werden die Functionen

$$u_1(x-a)^{-r},\quad u_2(x-a)^{-r},\quad \ldots\ u_n(x-a)^{-r}$$

in der Umgebung von a eindeutig sein, da jede der u-Grössen bei der Umkreisung von a den Factor $e^{2r\pi i}$ und $(x-a)^{-r}$ den Factor $e^{-2r\pi i}$ annimmt.

3. Zunächst ist es aber wichtig zu erkennen,

dass die Gleichung (14) *d. h. deren Coefficienten unabhängig sind von der Wahl des Fundamentalsystems* (2), *zu denen die Grössen* $\alpha_{\varrho\sigma}$ *wesentlich gehörten.*

---

*) Hat die Gleichung (14) eine r^{te} Einheitswurzel ε zur Lösung, so dass

$$u'_1 = \varepsilon u_1,\quad u'_2 = \varepsilon u_2,\quad \ldots\ u'_n = \varepsilon u_n$$

wird, so wären diese Integralelemente Functionen, welche nach r Umkreisungen des Punktes a wieder denselben Werth annehmen, also die Natur algebraischer Functionen haben.

Denn wählt man irgend ein anderes simultanes Fundamentalsystem von Integralen

$$(16)\qquad \begin{cases} \eta_{11} & \eta_{12} \; . \; . \; . \; \eta_{1n} \\ . & . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} \; . \; . \; . \; \eta_{nn}, \end{cases}$$

welches bei einer Umkreisung von a in das Fundamentalsystem

$$(17)\qquad \begin{cases} \eta'_{11} & \eta'_{12} \; . \; . \; . \; \eta'_{1n} \\ . & . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \eta'_{n1} & \eta'_{n2} \; . \; . \; . \; \eta'_{nn} \end{cases}$$

übergehen möge, so dass den Gleichungen (4) analog

$$(18)\quad \begin{cases} \eta'_{11} = \beta_{11}\eta_{11} + \beta_{21}\eta_{21} + \cdots + \beta_{n1}\eta_{n1}, \ldots \eta'_{1n} = \beta_{11}\eta_{1n} + \beta_{21}\eta_{2n} + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \beta_{n1}\eta_{nn} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \eta'_{n1} = \beta_{1n}\eta_{11} + \beta_{2n}\eta_{21} + \cdots + \beta_{nn}\eta_{n1}, \ldots \eta'_{nn} = \beta_{1n}\eta_{1n} + \beta_{2n}\eta_{2n} + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \beta_{nn}\eta_{nn} \end{cases}$$

ist, und wiederum die Determinante

$$(19)\qquad \mathrm{P} = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \; . \; . \; . \; \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \; . \; . \; . \; \beta_{2n} \\ . & . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} \; . \; . \; . \; \beta_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so wird der Gleichung (14) entsprechend die zum Punkte a gehörige Fundamentalgleichung

$$(20)\quad T(\omega) = \begin{vmatrix} \beta_{11} - \omega & \beta_{12} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} - \omega \; . \; . \; . \; \beta_{2n} \\ . \; . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \beta_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

lauten, und es ist die Identität der Gleichungen (14) und (20) nachzuweisen. Da aber die Elemente (2) ein Fundamentalsystem bildeten, so wird

$$(21)\begin{cases} \eta_{11}=c_{11}y_{11}+c_{21}y_{21}+\cdots+c_{n1}y_{n1}, \ldots \eta_{1n}=c_{11}y_{1n}+c_{21}\,y_{2n}+\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +c_{n1}y_{nn} \\ \eta_{21}=c_{12}y_{11}+c_{22}y_{21}+\cdots+c_{n2}y_{n1}, \ldots \eta_{2n}=c_{12}y_{1n}+c_{22}y_{2n}+\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +c_{n2}y_{nn} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \eta_{n1}=c_{1n}y_{11}+c_{2n}y_{21}+\cdots+c_{nn}y_{n1}, \ldots \eta_{nn}=c_{1n}y_{1n}+c_{2n}y_{2n}+\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +c_{nn}y_{nn}, \end{cases}$$

worin die Determinante

$$(22)\qquad C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, und somit einerseits aus (18) und (21)

$$(23)\begin{cases} \eta'_{11}=(\beta_{11}c_{11}+\beta_{21}c_{12}+\cdots+\beta_{n1}c_{1n})y_{11} \\ \qquad +(\beta_{11}c_{21}+\beta_{21}c_{22}+\cdots+\beta_{n1}c_{2n})y_{21}+\cdots \\ \qquad +(\beta_{11}c_{n1}+\beta_{21}c_{n2}+\cdots+\beta_{n1}c_{nn})y_{n1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \eta'_{n1}=(\beta_{1n}c_{11}+\beta_{2n}c_{12}+\cdots+\beta_{nn}c_{1n})y_{11} \\ \qquad +(\beta_{1n}c_{21}+\beta_{2n}c_{22}+\cdots+\beta_{nn}c_{2n})y_{21}+\cdots \\ \qquad +(\beta_{1n}c_{n1}+\beta_{2n}c_{n2}+\cdots+\beta_{nn}c_{nn})y_{n1} \end{cases}$$

und die ähnlich gestalteten, andererseits, weil das Gleichungsystem (21) für eine Umkreisung von a die Beziehungen

$$(24)\begin{cases} \eta'_{11}=c_{11}y'_{11}+c_{21}y'_{21}+\cdots+c_{n1}y'_{n1}, \ldots \eta'_{1n}=c_{11}y'_{1n}+c_{21}y'_{2n}+\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +c_{n1}y'_{nn} \\ \eta'_{21}=c_{12}y'_{11}+c_{22}y'_{21}+\cdots+c_{n2}y'_{n1}; \ldots \eta'_{2n}=c_{12}y'_{1n}+c_{22}y'_{2n}+\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +c_{n2}y'_{nn} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \eta'_{n1}=c_{1n}y'_{11}+c_{2n}y'_{2n}+\cdots+c_{nn}y'_{n1}, \ldots \eta'_{nn}=c_{1n}y'_{1n}+c_{2n}y'_{2n}+\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +c_{nn}y'_{nn} \end{cases}$$

liefert, vermöge (4) die Gleichungen

$$(25)\begin{cases} \eta'_{11} = (c_{11}\alpha_{11} + c_{21}\alpha_{12} + \cdots + c_{n1}\alpha_{1n})y_{11} \\ \quad + (c_{11}\alpha_{21} + c_{21}\alpha_{22} + \cdots + c_{n1}\alpha_{2n})y_{21} + \cdots \\ \quad + (c_{11}\alpha_{n1} + c_{21}\alpha_{n2} + \cdots + c_{n1}\alpha_{nn})y_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta'_{n1} = (c_{1n}\alpha_{11} + c_{2n}\alpha_{12} + \cdots + c_{nn}\alpha_{1n})y_{11} \\ \quad + (c_{1n}\alpha_{21} + c_{2n}\alpha_{22} + \cdots + c_{nn}\alpha_{2n})y_{21} + \cdots \\ \quad + (c_{1n}\alpha_{n1} + c_{2n}\alpha_{n2} + \cdots + c_{nn}\alpha_{nn})y_{n1}. \end{cases}$$

Vergleicht man nun die Systeme (23) und (25), so folgt, weil zwischen den $y_{1k}, y_{2k}, \ldots y_{nk}$ keine homogene lineare Relation stattfinden darf, dass für $k = 1, 2, \ldots n$ die Beziehungen bestehen

$$(26)\begin{cases} c_{11}\alpha_{k1} + c_{21}\alpha_{k2} + \cdots + c_{n1}\alpha_{kn} = \beta_{11}c_{k1} + \beta_{21}c_{k2} + \cdots \\ \qquad + \beta_{n1}c_{kn} = \lambda_{1k} \\ c_{12}\alpha_{k1} + c_{22}\alpha_{k2} + \cdots + c_{n2}\alpha_{kn} = \beta_{12}c_{k1} + \beta_{22}c_{k2} + \cdots \\ \qquad + \beta_{n2}c_{kn} = \lambda_{2k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{1n}\alpha_{k1} + c_{2n}\alpha_{k2} + \cdots + c_{nn}\alpha_{kn} = \beta_{1n}c_{k1} + \beta_{n2}c_{k2} + \cdots \\ \qquad + \beta_{nn}c_{kn} = \lambda_{nk}, \end{cases}$$

und bildet man nun die beiden Determinantenproducte

$$C\,.\,S(\omega) \quad \text{und} \quad C\,.\,T(\omega),$$

so folgt aus dem bekannten Multiplicationsgesetz der Determinanten

$$(27)\qquad C\,.\,S(\omega) = C\,.\,T(\omega) =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} - c_{11}\omega & \lambda_{12} - c_{21}\omega & \ldots & \lambda_{1n} - c_{n1}\omega \\ \lambda_{21} - c_{12}\omega & \lambda_{22} - c_{22}\omega & \ldots & \lambda_{2n} - c_{n2}\omega \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1} - c_{1n}\omega & \lambda_{n2} - c_{2n}\omega & \ldots & \lambda_{nn} - c_{nn}\omega \end{vmatrix},$$

und *es haben somit die beiden Gleichungen* (14) *und* (20) *dieselben Lösungen, sind daher,* was bewiesen werden sollte, *identisch und unabhängig von dem simultanen Fundamentalsysteme von Integralen, von welchen man zur Herleitung der zum Punkte a gehörigen Fundamentalgleichung ausging.*

4. Nachdem der *invariante Charakter* der zu den singulären Punkten gehörigen Fundamentalgleichungen erwiesen ist, soll zuerst der Fall untersucht werden, *in welchem die Lösungen der Fundamentalgleichung* (14) *sämmtlich verschieden sind.*

Seien dieselben

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots \omega_n,$$

und die vermöge (13) und (6) dazugehörigen Integralsysteme

$$(28) \quad \begin{cases} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn}, \end{cases}$$

so ist zunächst leicht einzusehen, dass das Integralsystem (28) auch ein simultanes Fundamentalsystem von Integralen bildet; denn wäre dies nicht der Fall, bestünden also die Beziehungen

$$(29) \quad \begin{cases} k_1 u_{11} + k_2 u_{21} + \cdots + k_n u_{n1} = 0 \\ k_1 u_{12} + k_2 u_{22} + \cdots + k_n u_{n2} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ k_1 u_{1n} + k_2 u_{2n} + \cdots + k_n u_{nn} = 0, \end{cases}$$

worin $k_1, k_2, \ldots k_n$ Constanten bedeuten, so würde sich durch successive Umkreisung des Punktes a zur ϱ^{ten} Gleichung von (29) das Gleichungsystem ergeben

$$(30) \quad \begin{cases} k_1 u_{1\varrho} + k_2 u_{2\varrho} + \cdots + k_n u_{n\varrho} = 0 \\ k_1 \omega_1 u_{1\varrho} + k_2 \omega_2 u_{2\varrho} + \cdots + k_n \omega_n u_{n\varrho} = 0 \\ k_1 \omega_1^2 u_{1\varrho} + k_2 \omega_2^2 u_{2\varrho} + \cdots + k_n \omega_n^2 u_{n\varrho} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ k_1 \omega_1^{n-1} u_{1\varrho} + k_2 \omega_2^{n-1} u_{2\varrho} + \cdots + k_n \omega_n^{n-1} u_{n\varrho} = 0, \\ \qquad (\text{für } \varrho = 1, 2, \ldots n), \end{cases}$$

woraus

$$(31) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 \ldots & \omega_n \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 \ldots & \omega_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} \ldots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix} = (\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3) \ldots (\omega_{n-1} - \omega_n) = 0$$

folgen würde, was wegen der Verschiedenheit von ω_1, ω_2, $\ldots\omega_n$ unmöglich ist; *wenn somit die Lösungen der Gleichung* (14) *sämmtlich verschieden sind, so bilden die aus den Gleichungen* (13) *und* (6) *hervorgehenden Integralsysteme der u ein simultanes Fundamentalsystem.*

Setzt man nun

$$(32) \qquad \omega_1 = e^{2r_1\pi i}, \quad \omega_2 = e^{2r_2\pi i}, \quad \ldots \omega_n = e^{2r_n\pi i},$$

worin die Differenz je zweier der r weder Null noch eine ganze Zahl sein kann, da die ω sämmtlich verschieden sein sollten, so erhält man mit Hülfe der oben gemachten Bemerkung den folgenden Satz:

Zu jedem singulären Punkte a, dessen Fundamentalgleichung nur verschiedene Lösungen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ *besitzt, gehört ein simultanes Fundamentalsystem von Integralen*

$$\begin{array}{llll} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn}, \end{array}$$

dessen sämmtliche Elemente mit Potenzen von $x - a$ *multiplicirt in der Umgebung von a eindeutig werden, so dass, wenn*

$$(33) \quad \frac{1}{2\pi i}\log\omega_1 = r_1, \quad \frac{1}{2\pi i}\log\omega_2 = r_2, \quad \ldots \frac{1}{2\pi i}\log\omega_n = r_n$$

gesetzt wird,

$$(34) \begin{cases} u_{11} = (x-a)^{r_1}\varphi_{11} & u_{12} = (x-a)^{r_1}\varphi_{12} \ldots u_{1n} = (x-a)^{r_1}\varphi_{1n} \\ u_{21} = (x-a)^{r_2}\varphi_{21} & u_{22} = (x-a)^{r_2}\varphi_{22} \ldots u_{2n} = (x-a)^{r_2}\varphi_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ u_{n1} = (x-a)^{r_n}\varphi_{n1} & u_{n2} = (x-a)^{r_n}\varphi_{n2} \ldots u_{nn} = (x-a)^{r_n}\varphi_{nn} \end{cases}$$

ist, worin die $\varphi_{\alpha\beta}$ *in der Umgebung von a eindeutige Functionen darstellen, die sich also in eine nach positiven ganzen Potenzen von* $(x - a)$ *und* $(x - a)^{-1}$ *fortschreitende Reihe entwickeln lassen.*

5. *Seien nun die Lösungen der Fundamentalgleichung auch vielfache,* und sei z. B. ω_1 eine λ-fache Lösung, so giebt es also jedenfalls *ein* Integralsystem $u_1, u_2, \ldots u_n$, für welches

$$(35)\qquad u'_{11} = \omega_1 u_{11}\,,\quad u'_{12} = \omega_1 u_{12}\,,\quad \ldots\; u'_{1n} = \omega_1 u_{1n}$$

ist. Dann kann man aber in dem simultanen Fundamentalsystem (2) die erste Horizontalreihe durch $u_{11}, u_{12}, \ldots u_{1n}$ ersetzen, und es ist offenbar auch

$$(36)\qquad \begin{cases} u_{11} & u_{12} \;\ldots\; u_{1n} \\ y_{21} & y_{22} \;\ldots\; y_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} \;\ldots\; y_{nn} \end{cases}$$

ein simultanes Fundamentalsystem von Integralen; denn da man in den Gleichungen (13) den zu ω_1 gehörigen Werth von ξ_1 von Null verschieden wählen kann, so würde eine homogene lineare Relation von der Form

$$(37)\qquad k_1 u_{11} + k_2 y_{21} + \cdots + k_n y_{n1} = 0$$

zusammengestellt mit der ersten der Gleichungen (6)

$$u_{11} = \xi_1 y_{11} + \xi_2 y_{21} + \cdots \xi_n y_{n1}$$

die Relation

$$(38)\quad k_1 \xi_1 y_{11} + (k_1 \xi_2 + k_2) y_{21} + \cdots + (k_1 \xi_n + k_n) y_{n1} = 0\,,$$

also eine nicht identische homogene lineare Relation zwischen entsprechenden Elementen eines simultanen Fundamentalsystems liefern, was nicht sein darf. Lässt man nun das simultane Fundamentalsystem (36) sich um a bewegen, so folgt

$$(39)\begin{cases} u'_{11} = \omega_1 u_{11}\,,\; u'_{12} = \omega_1 u_{12}\,,\; \ldots\; u'_{1n} = \omega_1 u_{1n} \\ y'_{21} = \alpha_{12} u_{11} + \alpha_{22} y_{21} + \cdots + \alpha_{n2} y_{n1}\,, \ldots y'_{2n} = \alpha_{12} u_{1n} + \alpha_{22} y_{2n} + \cdots + \alpha_{n2} y_{nn} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y'_{n1} = \alpha_{1n} u_{11} + \alpha_{2n} y_{21} + \cdots + \alpha_{nn} y_{n1}\,, \ldots y'_{nn} = \alpha_{1n} u_{1n} + \alpha_{2n} y_{2n} + \cdots + \alpha_{nn} y_{nn}\,, \end{cases}$$

und somit die zugehörige Fundamentalgleichung

$$(40)\qquad \begin{vmatrix} \omega_1 - \omega & \alpha_{12} \;\ldots\ldots\; \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} - \omega \;\ldots\; \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{32} \;\ldots\ldots\; \alpha_{3n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & \alpha_{n2} \;\ldots\ldots\; \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0\,,$$

die nach dem oben bewiesenen Satze dieselben Lösungen haben muss wie die Fundamentalgleichung (14), und da (40) in $\omega_1 - \omega$ mal der Determinante

$$(41) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{22} - \omega & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} - \omega & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

zerlegbar ist, ausserdem (14) die Lösung ω_1 λ-fach enthalten sollte, so muss die Gleichung (41) die Lösung ω_1 noch $\lambda - 1$-mal besitzen; es lassen sich somit die linearen Gleichungen auflösen

$$(42) \qquad \begin{cases} \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3 + \dots + \alpha_{2n} X_n = \omega_1 X_2 \\ \alpha_{32} X_2 + \alpha_{33} X_3 + \dots + \alpha_{3n} X_n = \omega_1 X_3 \\ \dots \\ \alpha_{n2} X_2 + \alpha_{n3} X_3 + \dots + \alpha_{nn} X_n = \omega_1 X_n, \end{cases}$$

und wenn man daher setzt:

$$(43) \qquad \begin{aligned} u_{21} &= X_2 y_{21} + X_3 y_{31} + \dots + X_n y_{n1}, \\ &\dots \\ u_{2n} &= X_2 y_{2n} + X_3 y_{3n} + \dots + X_n y_{nn}, \end{aligned}$$

so wird für eine Umkreisung von a sich nach (39)

$$(44) \qquad \begin{aligned} u'_{2\varrho} = {} & X_2(\alpha_{12} u_{1\varrho} + \alpha_{22} y_{2\varrho} + \dots + \alpha_{n2} y_{n\varrho}) \\ & + X_3(\alpha_{13} u_{1\varrho} + \alpha_{23} y_{2\varrho} + \dots + \alpha_{n3} y_{n\varrho}) + \dots \\ & + X_n(\alpha_{1n} u_{1\varrho} + \alpha_{2n} y_{2\varrho} + \dots + \alpha_{nn} y_{n\varrho}), \end{aligned}$$

oder

$$(45) \qquad \begin{aligned} u'_{2\varrho} = {} & (\alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 + \dots + \alpha_{1n} X_n) u_{1\varrho} \\ & + (\alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3 + \dots + \alpha_{2n} X_n) y_{2\varrho} + \dots \\ & + (\alpha_{n2} X_2 + \alpha_{n3} X_3 + \alpha_{nn} X_n) y_{n\varrho}, \end{aligned}$$

oder nach (42)

$$\begin{aligned} u'_{2\varrho} = {} & (\alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 + \dots + \alpha_{1n} X_n) u_{1\varrho} \\ & + \omega_1 (X_2 y_{2\varrho} + X_3 y_{3\varrho} + \dots + X_n y_{n\varrho}) \end{aligned}$$

ergeben, und somit vermöge (43)

$$u'_{2\varrho} = (\alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 + \dots \alpha_{1n} X_n) u_{1\varrho} + \omega_1 u_{2\varrho}$$

oder

$$u'_{2\varrho} = \omega_{21} u_{1\varrho} + \omega_1 u_{2\varrho}$$

sein, worin ω_{21} eine Constante bedeutet, so dass das Integralsystem

$$u_{21} \quad u_{22} \; . \; . \; . \; u_{2n}$$

bei einer Umkreisung von a die Werthe annimmt:

$$(46) \quad u'_{21} = \omega_{21} u_{11} + \omega_1 u_{21}, \quad u'_{22} = \omega_{21} u_{12} + \omega_1 u_{22}, \; \ldots \; u'_{2n} = \omega_{21} u_{1n} + \omega_1 u_{2n},$$

und man sieht genau wie vorher, dass auch das Integralsystem

$$\begin{matrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & \ldots & y_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn} \end{matrix}$$

ein simultanes Fundamentalsystem von Integralen sein wird. Schliessen wir so weiter, so erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn ω_1 eine λ-fache Wurzel der zum Punkte a gehörigen Fundamentalgleichung ist, so existirt eine Gruppe von λ Integralsystemen

$$(47) \quad \begin{cases} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{\lambda 1} & u_{\lambda 2} & \ldots & u_{\lambda n}, \end{cases}$$

welche bei einer Umkreisung von a die Werthe annehmen

$$(48) \quad \begin{cases} u'_{1\varrho} = \omega_1 u_{1\varrho} \\ u'_{2\varrho} = \omega_{21} u_{1\varrho} + \omega_1 u_{2\varrho} \\ u'_{3\varrho} = \omega_{31} u_{1\varrho} + \omega_{32} u_{2\varrho} + \omega_1 u_{3\varrho} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u'_{\lambda\varrho} = \omega_{\lambda 1} u_{1\varrho} + \omega_{\lambda 2} u_{2\varrho} + \cdots + \omega_{\lambda\lambda-1} u_{\lambda-1\varrho} + \omega_1 u_{\lambda\varrho}; \end{cases}$$

wenn nun die m verschiedenen Wurzeln der Fundamentalgleichung mit $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ bezeichnet werden, und ω_1 λ_1-fach, ω_2 λ_2-fach, $\ldots$ ω_m λ_m-fach vorkommt, so wird man m solcher Integralgruppen (48) *bilden können, somit*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\mu = n$$

Integralsysteme erhalten, welche zusammen ein simultanes Fundamentalsystem von Integralen des vorgelegten linearen Differentialgleichungssystems bilden werden; wenn die Grössen ω_ϱ *nicht verschwinden, so darf man nach* (42) *willkürliche Werthe für dieselben annehmen.*

6. Daraus wird man aber leicht die Beschaffenheit der Integralsysteme in der Umgebung des singulären Punktes a für den Fall der vielfachen Lösungen ermitteln können.

Betrachten wir nämlich eine z. B. durch die Gleichungen (48) dargestellte Gruppe von Integralsystemen, so ist zunächst klar, dass, wenn

$$\omega_1 = e^{2r_1\pi i} \tag{49}$$

gesetzt wird, nach Früherem

$$u_{11} = (x-a)^{r_1}\varphi_{11}, \quad u_{12} = (x-a)^{r_1}\varphi_{12}, \quad \ldots u_{1n} = (x-a)^{r_1}\varphi_{1n} \tag{50}$$

ist, worin $\varphi_{11}, \ldots \varphi_{1n}$ nach ganzen positiven und negativen Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihen bedeuten.

Stellt man nun die Beziehungen

$$\begin{cases} u'_{2\varrho} = \omega_{21} u_{1\varrho} + \omega_1 u_{2\varrho} \\ u'_{1\varrho} = \omega_1 u_{1\varrho} \end{cases} \tag{51}$$

zusammen, so folgt

$$\left(\frac{u_{2\varrho}}{u_{1\varrho}}\right)' = \frac{\omega_{21}}{\omega_1} + \frac{u_{2\varrho}}{u_{1\varrho}}; \tag{52}$$

da aber die Function

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{\omega_{21}}{\omega_1}\log(x-a) \tag{53}$$

bei einer Umkreisung von a auch um

$$\frac{\omega_{21}}{\omega_1}$$

zunimmt, so wird die Function

$$\frac{u_{2\varrho}}{u_{1\varrho}} - \frac{1}{2\pi i}\frac{\omega_{21}}{\omega_1}\log(x-a) = f_\varrho \tag{54}$$

eine um a herum eindeutige Function vorstellen, also

$$u_{2\varrho} = (x-a)^{r_1}\varphi_{1\varrho} f_\varrho + \frac{1}{2\pi i}\frac{\omega_{21}}{\omega_1}(x-a)^{r_1}\varphi_{1\varrho}\log(x-a) \tag{55}$$

oder wenn

$$(56)\qquad \varphi_{1\varrho} f_{2\varrho} = \varphi_{2\varrho}, \quad \frac{1}{2\pi i}\frac{\omega_{21}}{\omega_1}\varphi_{1\varrho} = \varphi_{1\varrho}^{(1)}$$

gesetzt wird, *worin sich* $\varphi_{1\varrho}^{(1)}$ *von* $\varphi_{1\varrho}$ *nur um einen constanten Factor unterscheidet,*

$$(57)\qquad \begin{cases} u_{21} = (x-a)^{r_1}\left(\varphi_{21} + \varphi_{11}^{(1)}\log(x-a)\right) \\ u_{22} = (x-a)^{r_1}\left(\varphi_{22} + \varphi_{12}^{(1)}\log(x-a)\right) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_{2n} = (x-a)^{r_1}\left(\varphi_{2n} + \varphi_{1n}^{(1)}\log(x-a)\right) \end{cases}$$

sein, worin sämmtliche φ-Functionen wieder den früher angegebenen Charakter haben.

Stellen wir aus dem Systeme (48) die Gleichungen zusammen

$$(58)\qquad \begin{cases} u_{3\varrho}' = \omega_{31}u_{1\varrho} + \omega_{32}u_{2\varrho} + \omega_1 u_{3\varrho} \\ u_{1\varrho}' = \omega_1 u_{1\varrho}, \end{cases}$$

so folgt

$$(59)\qquad \left(\frac{u_{3\varrho}}{u_{1\varrho}}\right)' = \frac{\omega_{31}}{\omega_1} + \frac{\omega_{32}}{\omega_1}\frac{u_{2\varrho}}{u_{1\varrho}} + \frac{u_{3\varrho}}{u_{1\varrho}}$$

oder nach (54) und (56)

$$(60)\qquad \left(\frac{u_{3\varrho}}{u_{1\varrho}}\right)' = \frac{\omega_{31}}{\omega_1} + \frac{\omega_{32}\cdot\omega_{21}}{2\pi i\,.\,\omega_1^2}\log(x-a) + \frac{\omega_{32}}{\omega_1}\frac{\varphi_{2\varrho}}{\varphi_{1\varrho}} + \frac{u_{3\varrho}}{u_{1\varrho}};$$

bildet man aber die Function

$$(61)\qquad A_{3\varrho}[\log(x-a)]^2 + \psi_{3\varrho}\log(x-a) = F_{3\varrho},$$

worin $A_{3\varrho}$ eine zu bestimmende Constante, $\psi_{3\varrho}$ eine noch näher anzugebende, in der Umgebung des Punktes a eindeutige Function von x ist, so wird $F_{3\varrho}$ bei einer Umkreisung von a in

$$(62)\qquad A_{3\varrho}[\log(x-a) + 2\pi i]^2 + \psi_{3\varrho}[\log(x-a) + 2\pi i],$$

übergehen, also, wenn $F_{3\varrho}'$ die veränderte Function bedeutet,

$$(63)\qquad F_{3\varrho}' = -4\pi^2 A_{3\varrho} + 2\pi i\,\psi_{3\varrho} + 4\pi i A_{3\varrho}\log(x-a) + F_{3\varrho}$$

sein; wenn nun in der Gleichung (61) $A_{3\varrho}$ und $\psi_{3\varrho}$ so gewählt werden, dass

$$(64)\qquad \begin{cases} 4\pi i A_{3\varrho} = \dfrac{\omega_{32}\,\omega_{21}}{2\pi i\,\omega_1^{\,2}} \\ -4\pi^2 A_{3\varrho} + 2\pi i\,\psi_{3\varrho} = \dfrac{\omega_{31}}{\omega_1} + \dfrac{\omega_{32}}{\omega_1}\,\dfrac{\varphi_{2\varrho}}{\varphi_{1\varrho}} \end{cases}$$

oder

$$(65)\qquad \begin{cases} A_{3\varrho} = -\dfrac{\omega_{32}\,\omega_{21}}{8\pi^2\,\omega_1^{\,2}} \\ 2\pi i\,\psi_{3\varrho} = \dfrac{2\,\omega_{31}\,\omega_1 - \omega_{32}\,\omega_{21}}{2\,\omega_1^{\,2}} + \dfrac{\omega_{32}}{\omega_1}\,\dfrac{\varphi_{2\varrho}}{\varphi_{1\varrho}} \end{cases}$$

ist, so werden nach (60) und (63) die Functionen

$$\frac{u_{3\varrho}}{u_{1\varrho}} \text{ und } F_{3\varrho}$$

bei der Umkreisung des Punktes a dieselbe Veränderung erleiden, und somit

$$(66)\qquad \frac{u_{3\varrho}}{u_{1\varrho}} - F_{3\varrho} = \Phi_{3\varrho}$$

eine in $x = a$ eindeutige Function sein; es ist daher nach (61) und (63)

$$(67)\quad u_{3\varrho} = (x-a)^{r_1}\varphi_{1\varrho}\left\{\Phi_{3\varrho} + \left(\frac{2\,\omega_{31}\,\omega_1 - \omega_{32}\,\omega_{21}}{4\pi i\,\omega_1^{\,2}} + \frac{\omega_{32}}{2\pi i\,\omega_1}\,\frac{\varphi_{2\varrho}}{\varphi_{1\varrho}}\right)\log(x-a) - \frac{\omega_{32}\,\omega_{21}}{8\pi^2\omega_1^{\,2}}\,[\log(x-a)]^2\right\}$$

oder

$$(68)\quad u_{3\varrho} = (x-a)^{r_1}\left\{\varphi_{3\varrho} + \varphi_{2\varrho}^{(1)}\log(x-a) + \varphi_{1\varrho}^{(2)}[\log(x-a)]^2\right\},$$

worin

$$(69)\qquad \varphi_{2\varrho}^{(1)} = A\varphi_{1\varrho} + B\varphi_{2\varrho}, \quad \varphi_{1\varrho}^{(2)} = C\varphi_{1\varrho}$$

ist, wenn A, B, C Constanten bedeuten, *$\varphi_{1\varrho}^{(2)}$ sich somit von $\varphi_{1\varrho}$ nur um einen constanten Factor unterscheidet und $\varphi_{2\varrho}^{(1)}$ eine homogene lineare Function von $\varphi_{1\varrho}$ und $\varphi_{2\varrho}$ ist.*

Wir erhalten somit für die dritte Elementenreihe simultaner Integrale die Formen:

$$(70)\quad \begin{cases} u_{31} = (x-a)^{r_1}\left\{\varphi_{31} + \varphi_{21}^{(1)}\log(x-a) + \varphi_{11}^{(2)}[\log(x-a)]^2\right\} \\ u_{32} = (x-a)^{r_1}\left\{\varphi_{32} + \varphi_{22}^{(1)}\log(x-a) + \varphi_{12}^{(2)}[\log(x-a)]^2\right\} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ u_{3n} = (x-a)^{r_1}\left\{\varphi_{3n} + \varphi_{2n}^{(1)}\log(x-a) + \varphi_{1n}^{(2)}[\log(x-a)]^2\right\}. \end{cases}$$

Fahren wir in diesen Schlüssen fort, so erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn ω_1 *eine* λ*-fache Wurzel der Fundamentalgleichung ist, so wird eine Gruppe von* λ *Integralsystemen existiren, welche die durch die Gleichungen* (48) *ausgedrückten Eigenschaften besitzen und welche, wenn*

$$\omega_1 = e^{2r_1\pi i}$$

gesetzt wird, in die Form gebracht werden können

$$(71)\begin{cases} u_{1\varrho} = (x-a)^{r_1}\,\varphi_{1\varrho} \\ u_{2\varrho} = (x-a)^{r_1}\left\{\varphi_{2\varrho} + \varphi_{1\varrho}^{(1)}\log(x-a)\right\} \\ u_{3\varrho} = (x-a)^{r_1}\left\{\varphi_{3\varrho} + \varphi_{2\varrho}^{(1)}\log(x-a) + \varphi_{1\varrho}^{(2)}[\log(x-a)]^2\right\} \\ u_{4\varrho} = (x-a)^{r_1}\left\{\varphi_{4\varrho} + \varphi_{3\varrho}^{(1)}\log(x-a) + \varphi_{2\varrho}^{(2)}[\log(x-a)]\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \varphi_{1\varrho}^{(3)}[\log(x-a)]^3\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{\lambda\varrho} = (x-a)^{r_1}\left\{\varphi_{\lambda\varrho} + \varphi_{\lambda-1\varrho}^{(1)}\log(x-a)\right. \\ \qquad\qquad + \varphi_{\lambda-2\varrho}^{(2)}[\log(x-a)]^2 + \cdots \\ \qquad\qquad \left. + \varphi_{1\varrho}^{(\lambda-1)}[\log(x-a)]^{\lambda-1}\right\}, \end{cases}$$

worin sämmtliche φ*-Functionen in der Umgebung von* $x = a$ *eindeutige, nach ganzen positiven und negativen Potenzen von* $x - a$ *entwickelbare Reihen bedeuten, von denen jede der Functionen* $\varphi_{\alpha\varrho}^{(\gamma)}$ *eine homogene lineare Function der Grössen* $\varphi_{1\varrho}$, $\varphi_{2\varrho}, \ldots \varphi_{\alpha\varrho}$ *mit constanten Coefficienten ist, die Functionen* $\varphi_{1\varrho}^{(1)}, \varphi_{1\varrho}^{(2)}, \ldots \varphi_{1\varrho}^{(\lambda-1)}$ *sich nur um einen constanten Factor von* $\varphi_{1\varrho}$ *unterscheiden, und die Coefficienten der höchsten logarithmischen Glieder eines jeden Integralsystems wieder ein Integralsystem und zwar mit den Elementen* (50) *bilden. Zugleich zeigen die Beziehungen* (48), *dass die Integralelemente je einer Gruppe bei einer Umkreisung des singulären Punktes a in homogene lineare Functionen von Integralelementen übergehen, welche wieder nur Elemente eben dieser Gruppe bilden.*

Man kann nun noch die Gruppe der zu einer vielfachen Wurzel der Fundamentalgleichung gehörigen Integralsysteme (71) in Untergruppen sondern von der Eigenschaft, dass die Elemente einer jeden Untergruppe bei Umkreisung des singu-

lären Punktes nur in lineare homogene Functionen von einander und zwar genau von der Form (48) übergehen, so dass auch wieder die den Gleichungen (71) entsprechenden Integralformen für jede Untergruppe für sich existiren, während die Untergruppen mit einander in keinem Zusammenhange stehen, und die Relationen zwischen den Coefficienten der mit Logarithmen behafteten Glieder immer nur innerhalb der Functionen einer solchen Untergruppe stattfinden; *ist* ω_1 *die oben als* λ*-fache Lösung der Fundamentalgleichung bezeichnete Grösse, und sind sämmtliche Unterdeterminanten* $n - 1^{\text{ter}}$ *Ordnung durch* $(\omega - \omega_1)^{\mu-1}$, *sämmtliche Unterdeterminanten* $n - 2^{\text{ter}}$ *Ordnung durch* $(\omega - \omega_1)^{\mu-2}$, *u. s. w., endlich alle Unterdeterminanten* $n - \mu + 1^{\text{ter}}$ *Ordnung durch* $\omega - \omega_1$ *theilbar, während nicht alle Unterdeterminanten* $n - \mu^{\text{ter}}$ *Ordnung für* $\omega = \omega_1$ *verschwinden, so wird die eine zur* λ*-fachen Lösung* ω_1 *gehörige Untergruppe aus* μ *Elementen von Integralen der eben bezeichneten Art bestehen,* u. s. w. —

wir wollen jedoch auf diese angegebene Zerlegung in Untergruppen hier nicht näher eingehen.

Es mag endlich noch bemerkt werden, dass diese Resultate nicht erst für eine lineare homogene Differentialgleichung höherer Ordnung von der Form

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

besonders ausgesprochen zu werden brauchen, da sie sich durch Reduction dieser auf ein lineares Differentialgleichungssystem n^{ter} Klasse unmittelbar ergeben.

II. Ueber die regulären Integrale linearer Differentialgleichungssysteme.

Wir wollen uns im Folgenden mit derjenigen speciellen Gattung linearer Differentialgleichungssysteme beliebiger Klasse beschäftigen, deren Coefficienten in der ganzen Ebene eindeutige Functionen von x sind, und für welche alle Integrale für jeden singulären Punkt a die Eigenschaft haben, endlich zu werden, wenn sie mit einer passenden endlichen Potenz

von $x - a$ multiplicirt werden, und ebenso für $x = \infty$ nicht unendlich werden, wenn man sie mit einer bestimmten Potenz von $\frac{1}{x}$ multiplicirt.

1. *Wenn jedes zum singulären Punkte $x = a$ gehörige simultane Integralsystem die Eigenschaft hat, dass seine Elemente mit einer endlichen bestimmten Potenz von $x - a$ multiplicirt für $x = a$ endlich werden, so sollen die zu diesem Punkte gehörigen simultanen Fundamentalsysteme von Integralen in der Umgebung von $x = a$ regulär genannt werden.*

Ist der betrachtete Punkt der unendlich entfernte, so wird in dessen Umgebung der Bedingung der Regularität genügt, wenn eine passende Potenz von $\frac{1}{x}$ existirt, welche mit den Integralen multiplicirt dieselben endlich macht.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass, wenn für das lineare Differentialgleichungsystem

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}\, y_1 + A_{12}\, y_2 + \cdots + A_{1n}\, y_n \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}\, y_1 + A_{22}\, y_2 + \cdots + A_{2n}\, y_n \\[2ex] \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\[2ex] \dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1} y_1 + A_{n2}\, y_2 + \cdots + A_{nn}\, y_n\,, \end{cases}$$

in welchem die Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ zunächst nur in der Umgebung von $x = a$ eindeutige Functionen sein sollen, ein zu dem singulären Punkt a gehöriges simultanes Fundamentalsystem von Integralen ein *reguläres* sein soll, nothwendig die in den Gruppen von der Form

$$(2)\qquad \begin{cases} y_{1\varrho} = (x-a)^{r_1} \varphi_{1\varrho} \\ y_{2\varrho} = (x-a)^{r_1} \{ \varphi_{2\varrho} + \varphi_{1\varrho}^{(1)} \log(x-a) \} \\ y_{3\varrho} = (x-a)^{r_1} \{ \varphi_{3\varrho} + \varphi_{2\varrho}^{(1)} \log(x-a) + \varphi_{1\varrho}^{(2)} [\log(x-a)]^2 \} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{\mu\varrho} = (x-a)^{r_1} \{ \varphi_{\mu\varrho} + \varphi_{\mu-1\varrho}^{(1)} \log(x-a) \\ \qquad\qquad + \varphi_{\mu-2\varrho}^{(2)} [\log(x-a)]^2 + \cdots \\ \qquad\qquad + \varphi_{1\varrho}^{(\mu-1)} [\log(x-a)]^{\mu-1} \} \end{cases}$$

enthaltenen, nach positiven und negativen ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreitenden Reihen φ, nur eine *endliche* Anzahl negativer Potenzen von $x - a$ enthalten dürfen, und umgekehrt wird, wenn dies der Fall ist, das Integralsystem ein reguläres sein.

Es soll nun die Bedingung der Existenz in der Umgebung des Punktes a regulärer Integralsysteme durch die Coefficienten des Differentialgleichungsystems selbst ausgedrückt werden.

Sei

$$(3)\qquad \begin{cases} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{cases}$$

ein simultanes reguläres Integralsystem, so folgt aus der Gleichung (5) von II. 1. des dritten Kapitels, dass

$$(4)\quad A_{\alpha\beta} = (-1)^{\beta-1} \begin{vmatrix} \frac{dy_{1\alpha}}{dx} & y_{11} & \cdots & y_{1\beta-1} & y_{1\beta+1} & \cdots & y_{1n} \\ \frac{dy_{2\alpha}}{dx} & y_{21} & \cdots & y_{2\beta-1} & y_{2\beta+1} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dy_{n\alpha}}{dx} & y_{n1} & \cdots & y_{n\beta-1} & y_{n\beta+1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = B_{\alpha\beta} : D$$

ist, und das Differentialgleichungsystem (1) somit die Form annimmt:

$$(5)\qquad \begin{cases} D\frac{dy_1}{dx} = B_{11}y_1 + B_{12}y_2 + \cdots + B_{1n}y_n \\ D\frac{dy_2}{dx} = B_{21}y_1 + B_{22}y_2 + \cdots + B_{2n}y_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ D\frac{dy_n}{dx} = B_{n1}y_1 + B_{n2}y_2 + \cdots + B_{nn}y_n; \end{cases}$$

da nun die sämmtlichen Integralelemente, also auch ihre Ableitungen regulär sein sollen, so werden somit nach (4) sämmtliche Grössen $B_{\alpha\beta}$ des Differentialgleichungsystems (5) die Form haben

$$(6)\quad B_{\alpha\beta}=(x-a)^{r_1+r_2+\cdots+r_n-1}\{\varphi_0+\varphi_1\log(x-a)+\varphi_2[\log(x-a)]^2+\cdots + \varphi_k[\log(x-a)]^k\},$$

worin sämmtliche φ nur eine endliche Anzahl ganzer negativer Potenzen von $x-a$ enthalten, und einzelne der r-Grössen einander gleich sein können.

Lässt man nun x einen Umkreis um a beschreiben, so gehen die Integrale in lineare homogene Functionen der Fundamentalintegrale über, und diese Veränderungen mögen durch

$$(7)\quad \begin{cases} y_{11}: m_{11}y_{11}+m_{12}y_{21}+\cdots+m_{1n}y_{n1}; \\ y_{12}: m_{11}y_{12}+m_{12}y_{22}+\cdots+m_{1n}y_{n2};\ \ldots \\ y_{1n}: m_{11}y_{1n}+m_{12}y_{2n}+\cdots+m_{1n}y_{nn} \\ y_{21}: m_{21}y_{11}+m_{22}y_{21}+\cdots+m_{2n}y_{n1}; \\ y_{22}: m_{21}y_{12}+m_{22}y_{22}+\cdots+m_{2n}y_{n2};\ \ldots \\ y_{2n}: m_{21}y_{1n}+m_{22}y_{2n}+\cdots+m_{2n}y_{nn} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{n1}: m_{n1}y_{11}+m_{n2}y_{21}+\cdots+m_{nn}y_{n1}; \\ y_{n2}: m_{n1}y_{12}+m_{n2}y_{22}+\cdots+m_{nn}y_{n2};\ \ldots \\ y_{nn}: m_{n1}y_{1n}+m_{n2}y_{2n}+\cdots+m_{nn}y_{nn} \end{cases}$$

dargestellt sein; setzt man diese Werthe in die Ausdrücke (4) für $B_{\alpha\beta}$ ein, so sieht man sogleich, dass $B_{\alpha\beta}$ in sich selbst übergeht multiplicirt mit der Determinante der Substitution

$$(8)\quad \delta = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} \end{vmatrix},$$

welche aus früher angegebenen Gründen von Null verschieden ist. Wenn aber $B_{\alpha\beta}$, welches auch in der Form (6) dargestellt war, eben diese Eigenschaft haben soll, so wird,

weil, wenn x den Punkt a umkreist, $\log(x-a)$ um $2\pi i$ zunimmt, also z. B., da φ_k eindeutig ist,

$$\varphi_k [\log(x-a)]^k \text{ in } \varphi_k [\log(x-a)+2\pi i]^k$$

übergeht, und somit zu dem früheren Posten

$$\varphi_{k-1} [\log(x-a)]^{k-1},$$

der noch bestehen bleibt, den Posten

$$2\pi i . k . \varphi_k . [\log(x-a)]^{k-1}$$

hinzufügt, die Form von $B_{\alpha\beta}$, wie man leicht mit Hülfe schon früher für logarithmische Beziehungen angestellter Betrachtungen erkennt, von einem constanten Factor abgesehen nicht dieselbe bleiben können, und es folgt zunächst, dass $B_{\alpha\beta}$ gar keine Logarithmen enthalten darf, und also die Form haben muss

$$B_{\alpha\beta} = (x-a)^{r_1+r_2+\cdots+r_n-1} \varphi_0, \tag{9}$$

worin φ_0 um $x=a$ eindeutig, und nur eine endliche Anzahl ganzer negativer Potenzen von $x-a$ enthält, d. h. im Punkte a eine unwesentliche Discontinuität besitzt. Da aber ebenso, wie die $B_{\alpha\beta}$, auch die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{nn} \end{vmatrix} \tag{10}$$

bei einer Umkreisung von a ebenfalls in $\delta . D$ übergeht, so folgt, dass aus denselben Gründen

$$D = (x-a)^{r_1+r_2+\cdots+r_n} \Delta \tag{11}$$

sein muss, worin Δ ebenfalls um $x=a$ eindeutig und in a nur eine unwesentliche Discontinuität besitzt. Setzen wir die Werthe (9) und (11) in (4) ein, so folgt

$$A_{\alpha\beta} = \frac{\varphi_0}{(x-a)\Delta}, \tag{12}$$

oder

$$(13)\quad A_{\alpha\beta} = \frac{(x-a)^{-\nu}(a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots)}{(x-a)^{-\mu}(b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots)}$$

$$= (x-a)^{\mu-\nu}(c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots),$$

worin μ und ν ganze Zahlen bedeuten, und es ergiebt sich somit zunächst, *dass $A_{\alpha\beta}$ selbst nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen von $x - a$ besitzt, somit in a eindeutig und nur unwesentlich discontinuirlich ist.*

2. Aber man kann auch die Ordnung des Unendlichwerdens der Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ im Punkte a näher bestimmen, wenn man nur für das Differentialgleichungsystem (1), welches im Punkte a nur reguläre Integralsysteme haben sollte, gleich näher zu definirende Normalformen einführt.

Setzt man nämlich

$$(14)\begin{cases} Y_1 = \alpha_{11}(x-a)^{\varepsilon_{11}}y_1 + \alpha_{12}(x-a)^{\varepsilon_{12}}y_2 + \cdots + \alpha_{1n}(x-a)^{\varepsilon_{1n}}y_n \\ Y_2 = \alpha_{21}(x-a)^{\varepsilon_{21}}y_1 + \alpha_{22}(x-a)^{\varepsilon_{22}}y_2 + \cdots + \alpha_{2n}(x-a)^{\varepsilon_{2n}}y_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ Y_n = \alpha_{n1}(x-a)^{\varepsilon_{n1}}y_1 + \alpha_{n2}(x-a)^{\varepsilon_{n2}}y_2 + \cdots + \alpha_{nn}(x-a)^{\varepsilon_{nn}}y_n, \end{cases}$$

worin die ganzzahligen Exponenten $\varepsilon_{\gamma\delta}$ und die constanten Multiplicatoren $\alpha_{\gamma\delta}$ zunächst noch unbestimmt seien, so ist ersichtlich, dass das Differentialgleichungsystem (1) durch Einführung der neuen n abhängigen Variabeln $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ wiederum in ein lineares Differentialgleichungsystem der Form

$$(15)\quad\begin{cases} \dfrac{dY_1}{dx} = C_{11}Y_1 + C_{12}Y_2 + \cdots + C_{1n}Y_n \\ \dfrac{dY_2}{dx} = C_{21}Y_1 + C_{22}Y_2 + \cdots + C_{2n}Y_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{dY_n}{dx} = C_{n1}Y_1 + C_{n2}Y_2 + \cdots + C_{nn}Y_n \end{cases}$$

übergeht, dessen Coefficienten, so wie die $A_{\alpha\beta}$ es waren, im Punkte a eindeutig und unwesentlich discontinuirlich sind. Nun sieht man aber leicht, *dass man die Grössen $\varepsilon_{\gamma\delta}$ und $\alpha_{\gamma\delta}$ so bestimmen kann, dass die Ausdrücke der Integralsysteme*

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
Y_{\lambda 1} &= \alpha_{11}(x-a)^{\varepsilon_{11}} y_{\lambda 1} + \alpha_{12}(x-a)^{\varepsilon_{12}} y_{\lambda 2} + \cdots \\
&\qquad + \alpha_{1n}(x-a)^{\varepsilon_{1n}} y_{\lambda n} \\
Y_{\lambda 2} &= \alpha_{21}(x-a)^{\varepsilon_{21}} y_{\lambda 1} + \alpha_{22}(x-a)^{\varepsilon_{22}} y_{\lambda 2} + \cdots \\
&\qquad + \alpha_{2n}(x-a)^{\varepsilon_{2n}} y_{\lambda n} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_{\lambda n} &= \alpha_{n1}(x-a)^{\varepsilon_{n1}} y_{\lambda 1} + \alpha_{n2}(x-a)^{\varepsilon_{n2}} y_{\lambda 2} + \cdots \\
&\qquad + \alpha_{nn}(x-a)^{\varepsilon_{nn}} y_{\lambda n} \\
&\qquad (\text{für } \lambda = 1, 2, \ldots n)
\end{aligned}
\right.
$$

oder nach (2)

$$
\begin{aligned}
(17)\quad Y_{\lambda\varrho} &= \alpha_{\varrho 1}(x-a)^{r+\varepsilon_{\varrho 1}}\big(\varphi_{\lambda 1} + \varphi^{(1)}_{\lambda-1\,1}\log(x-a) + \cdots \\
&\qquad + \varphi^{(\lambda-1)}_{11}[\log(x-a)]^{\lambda-1}\big) \\
&+ \alpha_{\varrho 2}(x-a)^{r+\varepsilon_{\varrho 2}}\big(\varphi_{\lambda 2} + \varphi^{(1)}_{\lambda-1\,2}\log(x-a) + \cdots \\
&\qquad + \varphi^{(\lambda-1)}_{12}[\log(x-a)]^{\lambda-1}\big) \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \alpha_{\varrho n}(x-a)^{r+\varepsilon_{\varrho n}}\big(\varphi_{\lambda n} + \varphi^{(1)}_{\lambda-1\,n}\log(x-a) + \cdots \\
&\qquad + \varphi^{(\lambda-1)}_{1n}[\log(x-a)]^{\lambda-1}\big) \\
&= (x-a)^r \Big\{ \big[(x-a)^{\varepsilon_{\varrho 1}}\alpha_{\varrho 1}\varphi_{\lambda 1} + (x-a)^{\varepsilon_{\varrho 2}}\alpha_{\varrho 2}\varphi_{\lambda 2} + \cdots \\
&\qquad + (x-a)^{\varepsilon_{\varrho n}}\alpha_{\varrho n}\varphi_{\lambda n}\big] \\
&\qquad + \big[(x-a)^{\varepsilon_{\varrho 1}}\alpha_{\varrho 1}\varphi^{(1)}_{\lambda-1\,1} + (x-a)^{\varepsilon_{\varrho 2}}\alpha_{\varrho 2}\varphi^{(1)}_{\lambda-1\,2} + \cdots \\
&\qquad + (x-a)^{\varepsilon_{\varrho n}}\alpha_{\varrho n}\varphi^{(1)}_{\lambda-1\,n}\big]\log(x-a) \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \big[(x-a)^{\varepsilon_{\varrho 1}}\alpha_{\varrho 1}\varphi^{(\lambda-1)}_{11} + (x-a)^{\varepsilon_{\varrho 2}}\alpha_{\varrho 2}\varphi^{(\lambda-1)}_{12} + \cdots \\
&\qquad + (x-a)^{\varepsilon_{\varrho n}}\alpha_{\varrho n}\varphi^{(\lambda-1)}_{1n}\big][\log(x-a)]^{\lambda-1}\Big\}
\end{aligned}
$$

sich in die Form setzen lassen

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
Y_{\lambda 1} &= (x-a)^{r_\lambda+\gamma_1}\big\{\psi_{\lambda 1} + \psi^{(1)}_{\lambda-1\,1}\log(x-a) + \psi^{(2)}_{\lambda-2\,1}[\log(x-a)]^2 + \cdots \\
&\qquad + \psi^{(\lambda-1)}_{11}[\log(x-a)]^{\lambda-1}\big\} \\
Y_{\lambda 2} &= (x-a)^{r_\lambda+\gamma_2}\big\{\psi_{\lambda 2} + \psi^{(1)}_{\lambda-1\,2}\log(x-a) + \psi^{(2)}_{\lambda-2\,2}[\log(x-a)]^2 + \cdots \\
&\qquad + \psi^{(\lambda-1)}_{12}[\log(x-a)]^{\lambda-1}\big\} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_{\lambda n} &= (x-a)^{r_\lambda+\gamma_n}\big\{\psi_{\lambda n} + \psi^{(1)}_{\lambda-1\,n}\log(x-a) + \psi^{(2)}_{\lambda-2\,n}[\log(x-a)]^2 + \cdots \\
&\qquad + \psi^{(\lambda-1)}_{1n}[\log(x-a)]^{\lambda-1}\big\}.
\end{aligned}
\right.
$$

worin $\psi_{\lambda\varrho}$, $\psi^{(1)}_{\lambda-1\varrho}$, $\psi^{(2)}_{\lambda-2\varrho}$, $\ldots \psi^{(\lambda-1)}_{1\varrho}$ *in der Umgebung von* $x = a$ *stetige und eindeutige Functionen darstellen, die nicht sämmtlich für* $x = a$ *verschwinden,* $r_1, r_2, \ldots r_n$ *bestimmt angebbare Zahlen bedeuten,* $\gamma_1 = 0$ *gewählt werden kann, und* $\gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_n$ *ganze positive Zahlen oder Null und zwar unabhängig von dem Werthe des Index* λ *sind.*

Legt man aber ein lineares Differentialgleichungsystem (15) zu Grunde, das im Punkte $x = a$ nur reguläre Integralsysteme von der durch (18) angegebenen Form besitzt, so folgt aus (4), indem die y durch Y ersetzt werden,

$$C_{\alpha\beta} = \frac{B_{\alpha\beta}}{D} \tag{19}$$

und, wie man unmittelbar aus (9) und (11) sieht,

$$B_{\alpha\beta} = (x-a)^{r_1+r_2+\cdots+r_n+\gamma_2+\gamma_3+\cdots+\gamma_n-1} F_{\alpha\beta}(x) \tag{20}$$

und

$$D = (x-a)^{r_1+r_2+\cdots+r_n+\gamma_2+\gamma_3+\cdots+\gamma_n} F(x), \tag{21}$$

worin $F_{\alpha\beta}(x)$ und $F(x)$ um $x = a$ endliche, stetige und eindeutige Functionen bedeuten, von denen die letztere für $x = a$ von Null verschieden ist, so dass sich aus (19)

$$C_{\alpha\beta} = \frac{F_{\alpha\beta}(x)}{(x-a)\,F(x)}$$

oder

$$C_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta}}{x-a} \tag{22}$$

ergiebt, worin $a_{\alpha\beta}$ in der Umgebung von $x = a$ ebenfalls endlich, stetig und eindeutig ist.

Setzen wir die für $C_{\alpha\beta}$ durch (22) gegebenen Werthe in das Differentialgleichungsystem (15) ein und multipliciren alle so entstehenden Gleichungen mit $x - a$, so ergiebt sich, wenn man noch berücksichtigt, dass auch umgekehrt jedes lineare Differentialgleichungsystem, welches in der Umgebung von $x = a$ eindeutige Coefficienten und dort nur reguläre Integralsysteme besitzt, durch Substitutionen von der Form (14) wieder in ein lineares Differentialgleichungsystem von demselben Charakter übergeführt wird, mit Zusammenfassung der Auseinandersetzungen dieser Nummer der folgende Satz:

Jedes lineare Differentialgleichungsystem, welches im Punkte

$x = a$ eindeutige Coefficienten und in der Umgebung dieses Punktes nur reguläre Integralsysteme besitzt, ist nothwendig von der Form

$$(23)\quad \begin{cases} (x-a)\dfrac{dY_1}{dx} = a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \cdots + a_{1n}Y_n \\ (x-a)\dfrac{dY_2}{dx} = a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \cdots + a_{2n}Y_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (x-a)\dfrac{dY_n}{dx} = a_{n1}Y_1 + a_{n2}Y_2 + \cdots + a_{nn}Y_n, \end{cases}$$

worin $a_{11} \ldots a_{nn}$ in der Umgebung von $x = a$ endliche, stetige und eindeutige Functionen von x bedeuten, oder durch Substitutionen der Form

$$(24)\quad \begin{cases} Y_{\lambda 1} = \alpha_{11}(x-a)^{\varepsilon_{11}}y_{\lambda 1} + \alpha_{12}(x-a)^{\varepsilon_{12}}y_{\lambda 2} + \cdots \\ \qquad\qquad + \alpha_{1n}(x-a)^{\varepsilon_{1n}}y_{\lambda n} \\ Y_{\lambda 2} = \alpha_{21}(x-a)^{\varepsilon_{21}}y_{\lambda 1} + \alpha_{22}(x-a)^{\varepsilon_{22}}y_{\lambda 2} + \cdots \\ \qquad\qquad + \alpha_{2n}(x-a)^{\varepsilon_{2n}}y_{\lambda n} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ Y_{\lambda n} = \alpha_{n1}(x-a)^{\varepsilon_{n1}}y_{\lambda 1} + \alpha_{n2}(x-a)^{\varepsilon_{n2}}y_{\lambda 2} + \cdots \\ \qquad\qquad + \alpha_{nn}(x-a)^{\varepsilon_{nn}}y_{\lambda n}, \\ \qquad\qquad (\text{für } \lambda = 1, 2, \ldots n), \end{cases}$$

worin $\varepsilon_{\gamma\delta}$ ganze Zahlen und $\alpha_{\gamma\delta}$ constante Multiplicatoren sind, oder durch successive aus solchen zusammengesetzte aus einem Systeme von dieser Gestalt abgeleitet).*

Man sieht unmittelbar durch Reduction des Systemes (23) auf eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung,

*) Es mag bemerkt werden, dass man den eben ausgesprochenen Satz auch so beweisen kann, dass man mit Hülfe eines Integralsystems $y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1n}$ das lineare Differentialgleichungssystem durch die früher angegebenen Substitutionen

$$y_1 = y_{11}\eta_1, \quad y_2 = y_{12}\eta_2, \quad \ldots\; y_n = y_{1n}\eta_n$$

und

$$\eta_2 - \eta_1 = u_1, \quad \eta_3 - \eta_1 = u_2, \quad \ldots\; \eta_n - \eta_1 = u_{n-1}$$

auf ein lineares Differentialgleichungssystem einer um eine Einheit niedrigeren Klasse reducirt, und zeigt, dass, wenn die oben angegebene Gestalt für *alle* linearen Differentialgleichungssysteme $n-1^{\text{ter}}$ Klasse

dass jede homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, welche im Punkte $x = a$ eindeutige Coefficienten und in der Umgebung dieses Punktes nur reguläre Integrale besitzt, nothwendig von der Form ist

$$(x-a)^n \frac{d^n y}{dx^n} + (x-a)^{n-1} A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + (x-a)^{n-2} A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots$$
$$+ (x-a) A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0,$$

worin $A_1, A_2, \ldots A_n$ in der Umgebung des Punktes a endliche, eindeutige und stetige Functionen von x sind.

3. Ist der Punkt, in dessen Umgebung das lineare Differentialgleichungsystem nur reguläre Integralsysteme besitzen soll, der unendlich entfernte, so wird, wenn

$$x = \frac{1}{t} \tag{25}$$

gesetzt wird, die Form des Differentialgleichungsystems, wenn wir von den durch die angegebenen Substitutionen abgeleiteten zunächst absehen, nach (23) in der Umgebung des Werthes $t = 0$ durch

$$\left\{\begin{array}{l} t\dfrac{dY_1}{dt} = b_{11} Y_1 + b_{12} Y_2 + \cdots + b_{1n} Y_n \\ t\dfrac{dY_2}{dt} = b_{21} Y_1 + b_{22} Y_2 + \cdots + b_{2n} Y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t\dfrac{dY_n}{dt} = b_{n1} Y_1 + b_{n2} Y_2 + \cdots + b_{nn} Y_n \end{array}\right. \tag{26}$$

---

mit in a eindeutigen Coefficienten und dort nur regulären Integralsystemen feststeht, auch die Differentialgleichungsyteme n^{ter} Klasse von demselben Charakter eben diese Form haben müssen — und dieser Nachweis ergiebt sich unmittelbar aus der Bildungsweise der neuen Coefficienten. Führt man mit dieser Schlussweise bei der Reduction der Klasse der linearen Differentialgleichungsysteme fort, so bleibt die Gültigkeit des oben ausgesprochenen Satzes offenbar nur für lineare Differentialgleichungsysteme erster Klasse von der Form

$$\frac{dy}{dx} = Ay$$

zu erweisen übrig, für welche sie aber unmittelbar einleuchtet.

dargestellt sein, worin $b_{11}, \ldots b_{nn}$ in der Umgebung von $t = 0$ endliche, stetige und eindeutige Functionen von t, also Potenzreihen nach dieser Variabeln bedeuten. Beachtet man nun, dass nach (25)

$$\frac{d Y_\varrho}{dt} = -x^2 \frac{d Y_\varrho}{dx}$$

ist, ferner durch die Substitution (25) die Reihen $b_{11}, \ldots b_{nn}$ nach positiven ganzen steigenden Potenzen von x^{-1} fortschreiten, so folgt aus dem oben aufgestellten Satze,

dass jedes lineare Differentialgleichungsystem, welches im Punkte $x = \infty$ eindeutige Coefficienten und in der Umgebung dieses Punktes nur reguläre Integralsysteme besitzt, nothwendig von der Form ist:

$$(27)\quad \begin{cases} x \dfrac{d Y_1}{dx} = c_{11} Y_1 + c_{12} Y_2 + \cdots + c_{1n} Y_n \\ x \dfrac{d Y_2}{dx} = c_{21} Y_1 + c_{22} Y_2 + \cdots + c_{2n} Y_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x \dfrac{d Y_n}{dx} = c_{n1} Y_1 + c_{n2} Y_2 + \cdots + c_{nn} Y_n, \end{cases}$$

worin $c_{11}, \ldots c_{nn}$ in der Umgebung von $x = \infty$ endliche, stetige und eindeutige, also nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von x^{-1} entwickelbare Functionen bedeuten, oder durch Substitutionen der Form

$$(28)\quad \begin{cases} Y_{\lambda 1} = \alpha_{11} x^{-\varepsilon_{11}} y_{\lambda 1} + \alpha_{12} x^{-\varepsilon_{12}} y_{\lambda 2} + \cdots + \alpha_{1n} x^{-\varepsilon_{1n}} y_{\lambda n} \\ Y_{\lambda 2} = \alpha_{21} x^{-\varepsilon_{21}} y_{\lambda 1} + \alpha_{22} x^{-\varepsilon_{22}} y_{\lambda 2} + \cdots + \alpha_{2n} x^{-\varepsilon_{2n}} y_{\lambda n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_{\lambda n} = \alpha_{n1} x^{-\varepsilon_{n1}} y_{\lambda 1} + \alpha_{n2} x^{-\varepsilon_{n2}} y_{\lambda 2} + \cdots + \alpha_{nn} x^{-\varepsilon_{nn}} y_{\lambda n}, \\ \qquad (\text{für } \lambda = 1, 2, \ldots n), \end{cases}$$

worin $\varepsilon_{\gamma\delta}$ ganze Zahlen und $\alpha_{\gamma\delta}$ constante Multiplicatoren sind, oder durch successive aus solchen zusammengesetzte aus einem Systeme von dieser Gestalt abgeleitet.

4. Bevor wir nun zur Umkehrung dieser Sätze übergehen, wollen wir die Frage beantworten, welches die nothwendige Form eines linearen Differentialgleichungsystems

n^{ter} Klasse ist, das ausser dem unendlich entfernten Punkte nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ besitzt — die also sämmtliche Discontinuitäten der in der ganzen Ebene eindeutig vorausgesetzten Coefficienten des Differentialgleichungsystems anzeigen — und welches in der Umgebung eines jeden dieser Punkte nur reguläre Integralsysteme hat.

Fassen wir zunächst nur die im Endlichen gelegenen Punkte $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ auf, so folgt offenbar durch den successive für die einzelnen singulären Punkte angewandten Satz der Nummer 2. dieses Abschnittes,

dass jedes lineare Differentialgleichungsystem, welches in der ganzen unendlichen Ebene eindeutige Coefficienten und in den im Endlichen gelegenen Punkten $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$, *welches die alleinigen endlichen singulären Punkte sein sollen, nur reguläre Integralsysteme besitzt, nothwendig von der Form ist*

$$(29)\quad \begin{cases} (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\varrho)\dfrac{dY_1}{dx} = b_{11}Y_1 + b_{12}Y_2 + \cdots + b_{1n}Y_n \\ (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\varrho)\dfrac{dY_2}{dx} = b_{21}Y_1 + b_{22}Y_2 + \cdots + b_{2n}Y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\varrho)\dfrac{dY_n}{dx} = b_{n1}Y_1 + b_{n2}Y_2 + \cdots + b_{nn}Y_n, \end{cases}$$

worin $b_{11}, \ldots b_{nn}$ *in der ganzen endlichen Ebene endliche, stetige und eindeutige Functionen, also nach positiven steigenden ganzen Potenzen von* x *fortschreitende, in der ganzen Ebene gültige Reihen bedeuten, oder durch Substitutionen der Form*

$$(30)\quad \begin{cases} Y_{\lambda 1} = \alpha_{11}(x-a_1)^{\varepsilon_{11}^{(1)}}\cdots(x-a_\varrho)^{\varepsilon_{11}^{(\varrho)}}\, y_{\lambda 1} + \cdots \\ \qquad + \alpha_{1n}(x-a_1)^{\varepsilon_{1n}^{(1)}}\cdots(x-a_\varrho)^{\varepsilon_{1n}^{(\varrho)}}\, y_{\lambda n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_{\lambda n} = \alpha_{n1}(x-a_1)^{\varepsilon_{n1}^{(1)}}\cdots(x-a_\varrho)^{\varepsilon_{n1}^{(\varrho)}}\, y_{\lambda 1} + \cdots \\ \qquad + \alpha_{nn}(x-a_1)^{\varepsilon_{nn}^{(1)}}\cdots(x-a_\varrho)^{\varepsilon_{nn}^{(\varrho)}}\, y_{\lambda n}, \\ \qquad\qquad (\text{für } \lambda = 1, 2, \ldots n), \end{cases}$$

worin $\varepsilon_{\gamma\delta}^{(r)}$ *ganze Zahlen und* $\alpha_{\gamma\delta}$ *constante Multiplicatoren sind,*

oder durch successive aus solchen zusammengesetzte aus einem Systeme von dieser Gestalt abgeleitet.

Fügen wir endlich noch die Bedingung hinzu, dass auch der unendlich entfernte Punkt ein singulärer Punkt der Art sein soll, dass das Differentialgleichungsystem in seiner Umgebung nur reguläre Integralsysteme besitzt, so werden zunächst, wie beim Beginn der Untersuchung gezeigt worden, die Coefficienten der Differentialgleichungen für $x = \infty$ von einer endlichen Ordnung unendlich sein, und somit die Potenz-Reihen $b_{11}, \ldots b_{nn}$ in ganze Functionen übergehen müssen; ferner müssen aber nach der vorigen Nummer die Coefficienten

$$c_{\gamma\delta} = \frac{x b_{\gamma\delta}}{(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_\varrho)}$$

in der Umgebung von $x = \infty$ endlich, d. h. $b_{\gamma\delta}$ ganze Functionen höchstens vom $\varrho - 1^{\text{ten}}$ Grade sein, und berücksichtigt man noch die Form der Substitutionen (28), so ergiebt sich der nachfolgende Satz:

Jedes lineare homogene Differentialgleichungsystem n^{ter} Klasse mit in der ganzen unendlichen Ebene eindeutigen Coefficienten und einer endlichen Anzahl singulärer Punkte $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$, in deren Umgebung sowie in der Umgebung des unendlich entfernten Punktes das Differentialgleichungsystem nur reguläre Integralsysteme besitzen soll, ist nothwendig von der Form

$$(31)\quad \begin{cases} (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_\varrho)\dfrac{dY_1}{dx} = b_{11}Y_1 + b_{12}Y_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + b_{1n}Y_n \\ (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_\varrho)\dfrac{dY_2}{dx} = b_{21}Y_1 + b_{22}Y_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + b_{2n}Y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_\varrho)\dfrac{dY_n}{dx} = b_{n1}Y_1 + b_{n2}Y_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + b_{nn}Y_n, \end{cases}$$

worin $b_{11}, \ldots b_{nn}$ ganze Functionen von x von nicht höherem Grade als dem $\varrho - 1^{\text{ten}}$ bedeuten, oder durch Substitutionen der Form

$$(32)\quad \begin{cases} Y_{\lambda 1} = \alpha_{11} x^{-\varepsilon_{11}} (x-a_1)^{\varepsilon_{11}^{(1)}} \cdots (x-a_\varrho)^{\varepsilon_{11}^{(\varrho)}} y_{\lambda 1} + \cdots \\ \qquad + \alpha_{1n} x^{-\varepsilon_{1n}} (x-a_1)^{\varepsilon_{1n}^{(1)}} \cdots (x-a_\varrho)^{\varepsilon_{1n}^{(\varrho)}} y_{\lambda n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_{\lambda n} = \alpha_{n1} x^{-\varepsilon_{n1}} (x-a_1)^{\varepsilon_{n1}^{(1)}} \cdots (x-a_\varrho)^{\varepsilon_{n1}^{(\varrho)}} y_{\lambda 1} + \cdots \\ \qquad + \alpha_{nn} x^{-\varepsilon_{nn}} (x-a_1)^{\varepsilon_{nn}^{(1)}} \cdots (x-a_\varrho)^{\varepsilon_{nn}^{(\varrho)}} y_{\lambda n}, \end{cases}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots n),$$

worin $\varepsilon_{\gamma\delta}$ *und* $\varepsilon_{\gamma\delta}^{(r)}$ *ganze Zahlen,* $\alpha_{\gamma\delta}$ *constante Multiplicatoren sind, oder durch successive aus solchen zusammengesetzte aus einem Systeme von dieser Gestalt abgeleitet.*

Die Zurückführung des Systemes (31) auf eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung liefert wieder wie oben den folgenden Satz:

Jede lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} *Ordnung mit in der ganzen unendlichen Ebene eindeutigen Coefficienten und einer endlichen Anzahl singulärer Punkte* $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$, *in deren Umgebung sowie in der Umgebung des unendlich entfernten Punktes die Differentialgleichung nur reguläre Integrale besitzen soll, ist nothwendig von der Form*

$$(33)\quad \psi(x)^n \frac{d^n y}{dx^n} + \psi(x)^{n-1} A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \psi(x)^{n-2} A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + \psi(x) A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0,$$

worin

$$(34)\qquad \psi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho)$$

gesetzt ist, und die Grössen A_ν *ganze Functionen von* x *von nicht höherem Grade als dem* $\nu(\varrho-1)^{\text{ten}}$ *bedeuten.*

5. Um die Umkehrung des in Nummer 2. bewiesenen Satzes, also auch des allgemeinen Theorems der letzten Nummer festzustellen, d. h. nachzuweisen, dass alle in der Form (23) enthaltenen linearen Differentialgleichungsysteme in der Umgebung von $x = a$ nur reguläre Integralsysteme besitzen, wollen wir uns zunächst mit einer wichtigen algebraischen Gleichung beschäftigen, welche die Grundlage der Untersuchung regulärer linearer Differentialgleichungsysteme bilden wird.

Sei das in der Umgebung von $x = a$ nur reguläre

Integralsysteme besitzende System linearer Differentialgleichungen

$$(35)\quad \begin{cases} (x-a)\dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ (x-a)\dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x-a)\dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n, \end{cases}$$

in welchem $a_{11}, \ldots a_{nn}$ in der Umgebung von $x = a$ endliche, stetige und eindeutige Functionen von x sind, so giebt es jedenfalls ein reguläres Integralsystem der Form

$$(36)\quad y_{11} = (x-a)^r u_{11},\ y_{12} = (x-a)^r u_{12}, \ldots y_{1n} = (x-a)^r u_{1n},$$

worin $u_{11}, u_{12}, \ldots u_{1n}$ durch Potenzreihen von der Gestalt

$$(37)\quad \begin{cases} u_{11} = c_{01} + c_{11}(x-a) + c_{21}(x-a)^2 + \cdots \\ u_{12} = c_{02} + c_{12}(x-a) + c_{22}(x-a)^2 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{1n} = c_{0n} + c_{1n}(x-a) + c_{2n}(x-a)^2 + \cdots \end{cases}$$

definirt sind, in denen die Grössen $c_{01}, c_{02}, \ldots c_{0n}$ nicht sämmtlich verschwinden.

Substituirt man nun, wenn

$$(38)\quad a_{\alpha\beta}(a) = a^{0}_{\alpha\beta},\quad \left(\frac{d^k a_{\alpha\beta}}{dx^k}\right)_{x=a} = a^{(k)}_{\alpha\beta}$$

gesetzt werden, die Entwicklungen der Coefficienten

$$(39)\quad a_{\alpha\beta} = a^{(0)}_{\alpha\beta} + a^{(1)}_{\alpha\beta}(x-a) + \frac{a^{(2)}_{\alpha\beta}}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

und die der Integrale (36) in das Differentialgleichungssystem (35), so folgt durch Identificirung der von Potenzen von $x-a$ freien Glieder das System von Gleichungen

$$(40)\quad \begin{cases} \left(a^{(0)}_{11} - r\right)c_{01} + a^{(0)}_{12}c_{02} + \cdots\cdots + a^{(0)}_{1n}c_{0n} = 0 \\ a^{(0)}_{21}c_{01} + \left(a^{(0)}_{22} - r\right)c_{02} + \cdots + a^{(0)}_{2n}c_{0n} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^{(0)}_{n1}c_{01} + a^{(0)}_{n2}c_{02} + \cdots\cdots + \left(a^{(0)}_{nn} - r\right)c_{0n} = 0, \end{cases}$$

und daraus, da die Grössen $c_{01}, c_{02}, \ldots c_{0n}$ nicht sämmtlich Null waren,

$$(41)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} - r & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \ldots\ldots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} - r & a_{23}^{(0)} & \ldots\ldots & a_{2n}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} - r & \ldots & a_{3n}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & a_{n3}^{(0)} & \ldots\ldots & a_{nn}^{(0)} - r \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung n^{ten} *Grades in der Grösse* r *wird die zum singulären Punkte* a *gehörige determinirende Fundamentalgleichung genannt und hat zunächst zu einer ihrer Lösungen,* wie aus den Gleichungen (49) und (14) des vorigen Abschnittes zu ersehen, *den durch* $2\pi i$ *dividirten Logarithmus einer Lösung der dortigen zum Punkte* $x = a$ *gehörigen Fundamentalgleichung* (14).

6. Um nun die Umkehrung des in Nummer 2. gefundenen Satzes zu beweisen, stellen wir zunächst die folgende Behauptung auf:

Wenn $r_1, r_2, \ldots r_n$ *die* n *Wurzeln der zu* $x = a$ *gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung*

$$(42)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} - r & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} - r & a_{23}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & a_{n3}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} - r \end{vmatrix} = 0$$

bezeichnen, und es wird angenommen, dass sich dieselben in eine solche Ordnung haben bringen lassen, dass von den Differenzen

$$(43)\qquad r_2 - r_1,\ r_3 - r_1,\ \ldots r_n - r_1$$

keine einer von Null verschiedenen positiven ganzen Zahl gleich ist, so wird das Differentialgleichungssystem (35) *ein simultanes Integralsystem von der Form zulassen*

$$(44)\qquad y_1 = (x-a)^{r_1} u_1,\ \ y_2 = (x-a)^{r_1} u_2,\ \ldots y_n = (x-a)^{r_1} u_n,$$

worin $u_1, u_2, \ldots u_n$ *um* $x = a$ *herum eindeutige und endliche Functionen von* x *bedeuten, die nicht sämmtlich für* $x = a$ *verschwinden.*

Setzt man nämlich die Werthe (44) in die Differentialgleichungen (35) ein, so erhält man das Differentialgleichungsystem

$$(45)\quad \begin{cases} (x-a)\dfrac{du_1}{dx} = (a_{11}-r_1)u_1 + \quad a_{12}u_2 \quad + \cdots + \quad a_{1n}u_n \\ (x-a)\dfrac{du_2}{dx} = \quad a_{21}u_1 \quad + (a_{22}-r_1)u_2 + \cdots + \quad a_{2n}u_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x-a)\dfrac{du_n}{dx} = \quad a_{n1}u_1 \quad + \quad a_{n2}u_2 \quad + \cdots + (a_{nn}-r_1)u_n, \end{cases}$$

und es ist die Eindeutigkeit eines Integralsystems dieser Differentialgleichungen um $x = a$ herum zu erweisen, wenn die Integralelemente in diesem Punkte gleich näher anzugebende, endliche Werthe haben, die nicht sämmtlich Null sind.

Wenden wir nämlich die im III. Abschnitte des vorigen Kapitels angestellten Betrachtungen auf den Fall des Differentialgleichungsystems (45) an, so müssen wir dieses den dortigen Gleichungen (1) analog vermöge der Entwicklung der um $x = a$ endlichen und eindeutigen Functionen

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{(0)} + \frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{1!}(x-a) + \frac{a_{\alpha\beta}^{(2)}}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

auf die Form bringen

$$(46)\quad \begin{cases} (x-a)\dfrac{du_1}{dx} = (a_{11}^{(0)} - r_1)\,u_1 + a_{12}^{(0)}\,u_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + a_{1n}^{(0)}\,u_n + (x-a, u_1, u_2, \ldots u_n)^2 + \cdots \\ (x-a)\dfrac{du_2}{dx} = a_{21}^{(0)}\,u_1 + (a_{22}^{(0)} - r_1)\,u_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + a_{2n}^{(0)}\,u_n + (x-a, u_1, u_2, \ldots u_n)^2 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x-a)\dfrac{du_n}{dx} = a_{n1}^{(0)}\,u_1 + a_{n2}^{(0)}\,u_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + (a_{nn}^{(0)} - r_1)\,u_n + (x-a, u_1, u_2, \ldots u_n)^2 + \cdots, \end{cases}$$

worin die homogenen Functionen 2ten, 3ten Grades u. s. w. auf den rechten Seiten dieser Differentialgleichungen nur die Productverbindungen der ersten Potenzen von $u_1, u_2, \ldots u_n$ mit den verschiedenen Potenzen von $x - a$ enthalten, und es geht somit die dortige Determinante (6) in

$$(47)\quad \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} - r_1 - P & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} - r_1 - P & \dots & a_{2n}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} - r_1 - P \end{vmatrix} = 0$$

über. Wir setzen nun fest, dass dem $x = a$ für $u_1, u_2, \dots u_n$ die nicht sämmtlich verschwindenden Werthe $c_{01}, c_{02}, \dots c_{0n}$ entsprechen mögen, welche durch die Gleichungen

$$(48)\quad \begin{cases} (a_{11}^{(0)} - r_1)\, c_{01} + a_{12}^{(0)} c_{02} + \dots\dots + a_{1n}^{(0)} c_{0n} = 0 \\ a_{21}^{(0)} c_{01} + (a_{22}^{(0)} - r_1)\, c_{02} + \dots + a_{2n}^{(0)} c_{0n} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}^{(0)} c_{01} + a_{n2}^{(0)} c_{02} + \dots + (a_{nn}^{(0)} - r_1)\, c_{0n} = 0 \end{cases}$$

bestimmt sind, — eine Festsetzung, die erlaubt ist, weil die Determinante dieses linearen Gleichungsystems vermöge (42) verschwindet — und machen in das Differentialgleichungsystem (46) die Substitutionen

$$(49)\quad u_1 = c_{01} + v_1,\ u_2 = c_{02} + v_2,\ \dots u_n = c_{0n} + v_n,$$

so geht dasselbe vermöge der Beziehungen (48) in

$$(50)\quad \begin{cases} (x-a)\dfrac{dv_1}{dx} = (a_{11}^{(0)} - r_1)\, v_1 + a_{12}^{(0)} v_2 + \dots + a_{1n}^{(0)} v_n + A_1(x-a) \\ \qquad\qquad + (x-a, v_1, v_2, \dots v_n)^2 + \dots \\ (x-a)\dfrac{dv_2}{dx} = a_{21}^{(0)} v_1 + (a_{22}^{(0)} - r_1) v_2 + \dots + a_{2n}^{(0)} v_n + A_2(x-a) \\ \qquad\qquad + (x-a, v_1, v_2, \dots v_n)^2 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x-a)\dfrac{dv_n}{dx} = a_{n1}^{(0)} v_1 + a_{n2}^{(0)} v_2 + \dots + (a_{nn}^{(0)} - r_1) v_n + A_n(x-a) \\ \qquad\qquad + (x-a, v_1, v_2, \dots v_n)^2 + \dots \end{cases}$$

über, worin die homogenen Functionen von höherem Grade als dem ersten wieder nur die ersten Potenzen von $v_1, v_2, \dots v_n$ enthalten, und es bleibt somit nur noch für dieses Differentialgleichungsystem die Existenz eines um $x = a$ eindeutigen Integralsystems nachzuweisen, dessen Elemente in diesem Punkte sämmtlich verschwinden, ein Problem, das für die Differentialgleichungen (1) des angegebenen Abschnittes ebenfalls für in dem betrachteten singulären Punkte verschwin-

dende Integralelemente bereits behandelt war. Da nämlich nach der durch (43) gemachten Annahme der Gleichung (42) zufolge die n Lösungen der Gleichung (47) lauten

(51) $$0, \; r_2 - r_1, \; r_3 - r_1, \; \ldots r_n - r_1,$$

und diese sämmtlich nicht positive ganze Zahlen sind, so giebt es nach dem in Nummer 2. des angegebenen Abschnittes aufgestellten Satze ein für $x = a$ verschwindendes, in der Umgebung dieses Punktes eindeutiges Integralsystem für $v_1, v_2, \ldots v_n$, also auch *ein um $x = a$ eindeutiges Integralsystem der Differentialgleichungen* (46), *dessen Elemente die oben angegebenen, nicht sämmtlich der Null gleichen Werthe* $c_{01}, c_{02}, \ldots c_{0n}$ *annehmen, und somit ist die Existenz des Integralsystems* (44) *für das Differentialgleichungsystem* (35) *erwiesen.*

7. Nachdem wir nun unter der in 6. gemachten Voraussetzung, dass die n Wurzeln der determinirenden zu $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung sich so ordnen liessen, dass von den Differenzen

$$r_2 - r_1, \; r_3 - r_1, \; \ldots r_n - r_1$$

keine einer von Null verschiedenen positiven ganzen Zahl gleich ist, die Existenz eines Systems regulärer Integrale (44), die zum Exponenten r_1 gehören, nachgewiesen haben, wollen wir nunmehr, um die oben ausgesprochene Umkehrung des früher bewiesenen Satzes festzustellen, die beiden Fälle unterscheiden, in denen entweder unter den n Lösungen $r_1, r_2, \ldots r_n$ der determinirenden Fundamentalgleichung überhaupt nicht zwei vorhanden sind, deren Differenz Null oder eine ganze Zahl — positiv oder negativ — ist, oder für welche mindestens *eine* Differenz zweier Lösungen existirt, welche verschwindet oder einer ganzen Zahl gleich ist.

Seien

I. *die Lösungen der determinirenden Fundamentalgleichung* (42) *so beschaffen, dass unter ihnen überhaupt nicht zwei vorhanden sind, deren Differenz Null oder eine ganze Zahl ist,*

so wird, wenn wir irgend eine Lösung r_α herausgreifen, keine der Differenzen

$$r_1 - r_\alpha, \quad r_2 - r_\alpha, \; \ldots \; r_n - r_\alpha$$

einer von Null verschiedenen positiven ganzen Zahl gleich sein, und es wird somit nach dem in der letzten Nummer bewiesenen Satze ein Integralsystem der Form

$$(52) \quad y_1 = (x-a)^{r_\alpha} u_1, \; y_2 = (x-a)^{r_\alpha} u_2, \; \ldots y_n = (x-a)^{r_\alpha} u_n$$

existiren, worin $u_1, u_2, \ldots u_n$ in der Umgebung von $x = a$ endliche, stetige und eindeutige Functionen von x bedeuten. Da nun α der gemachten Annahme zufolge alle Werthe 1, 2, ... n annehmen darf, und die so sich ergebenden Integralsysteme offenbar aus wiederholt angegebenen Gründen ein Fundamentalsystem bilden, so ergiebt sich der Satz,

dass unter der ad I. *gemachten Annahme in der Umgebung des Punktes $x = a$ stets ein Fundamentalsystem von regulären Integralen von der Form existirt*

$$(53) \begin{cases} y_{11} = (x-a)^{r_1} u_{11} & y_{12} = (x-a)^{r_1} u_{12} \; \ldots \; y_{1n} = (x-a)^{r_1} u_{1n} \\ y_{21} = (x-a)^{r_2} u_{21} & y_{22} = (x-a)^{r_2} u_{22} \; \ldots \; y_{2n} = (x-a)^{r_2} u_{2n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \\ y_{n1} = (x-a)^{r_n} u_{n1} & y_{n2} = (x-a)^{r_n} u_{n2} \ldots y_{nn} = (x-a)^{r_n} u_{nn}, \end{cases}$$

worin $u_{\varrho 1}, u_{\varrho 2}, \ldots u_{\varrho n}$ in der Umgebung von $x = a$ endliche, stetige und eindeutige Functionen von x bedeuten, die nicht sämmtlich für $x = a$ verschwinden,

und man sieht zugleich unmittelbar,

dass dann die Lösungen $r_1, r_2, \ldots r_n$ der determinirenden Fundamentalgleichung die durch $2\pi i$ dividirten Logarithmen — in ihrer unendlichen durch ganze Zahlen verschiedenen Vieldeutigkeit genommen — der Lösungen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ der zu $x = a$ gehörigen Fundamentalgleichung (14) *des vorigen Abschnittes sind.*

Seien

II. *die Lösungen der determinirenden Fundamentalgleichung* (42) *von der Art, dass Differenzen zweier solcher Lösungen vorhanden sind, welche verschwinden oder einer ganzen Zahl gleich sind,*

so greife man irgend eine der Lösungen $r_1, r_2, \ldots r_n$ heraus, z. B. r_1, und vereinige mit dieser zu einer Gruppe

alle diejenigen anderen Lösungen, welche dieser entweder gleich sind oder sich von ihr nur um eine ganze Zahl unterscheiden, so dass $r_1, r_2, \dots r_\lambda$ eine solche Gruppe bilden mögen. Ordnet man diese λ Elemente einer Gruppe derart, dass die reellen Theile auf einander folgender Elemente nicht wachsen, und nimmt man an, dass die Elemente schon so geordnet die Folge

$$r_1, r_2, r_3, \dots r_\lambda$$

bilden, so wird zunächst keine der Differenzen

$$(54) \qquad r_2 - r_1, \quad r_3 - r_1, \quad \dots r_\lambda - r_1$$

einer von Null verschiedenen positiven ganzen Zahl gleich sein können, und somit auch in diesem Falle nach dem in Nummer 6. bewiesenen Satze *für jede Gruppe zunächst ein um $x = a$ reguläres Integralsystem von der Form existiren*

$$(55) \quad y_{11} = (x-a)^{r_1} u_{11}, \; y_{12} = (x-a)^{r_1} u_{12}, \; \dots y_{1n} = (x-a)^{r_1} u_{1n},$$

worin $u_{11}, u_{12}, \dots u_{1n}$ in der Umgebung von $x = a$ endliche, stetige und eindeutige Functionen von x bedeuten, welche nicht sämmtlich für $x = a$ verschwinden.

Setzt man nun zur Untersuchung der anderen, derselben Gruppe angehörigen Integralsysteme

$$(56) \qquad y_1 = y_{11}\eta_1, \; y_2 = y_{12}\eta_2, \; \dots y_n = y_{1n}\eta_n$$

in das Differentialgleichungsystem (35) ein, so ergiebt sich

$$(57) \quad \begin{cases} (x-a)\dfrac{d\eta_1}{dx} = \left(a_{11} - (x-a)\dfrac{y'_{11}}{y_{11}}\right)\eta_1 + a_{12}\dfrac{y_{12}}{y_{11}}\eta_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + a_{1n}\dfrac{y_{1n}}{y_{11}}\eta_n \\ (x-a)\dfrac{d\eta_2}{dx} = a_{21}\dfrac{y_{11}}{y_{12}}\eta_1 + \left(a_{22} - (x-a)\dfrac{y'_{12}}{y_{12}}\right)\eta_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + a_{2n}\dfrac{y_{1n}}{y_{12}}\eta_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x-a)\dfrac{d\eta_n}{dx} = a_{n1}\dfrac{y_{11}}{y_{1n}}\eta_1 + a_{n2}\dfrac{y_{12}}{y_{1n}}\eta_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + \left(a_{nn} - (x-a)\dfrac{y'_{1n}}{y_{1n}}\right)\eta_n, \end{cases}$$

oder da $y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1n}$ ein Integralsystem der Differentialgleichungen (35) bildeten, vermöge eben dieser Gleichungen

$$(58)\begin{cases}(x-a)\dfrac{d\eta_1}{dx}=a_{12}\dfrac{y_{12}}{y_{11}}(\eta_2-\eta_1)+a_{13}\dfrac{y_{13}}{y_{11}}(\eta_3-\eta_1)+\cdots\\ \qquad\qquad +a_{1n}\dfrac{y_{1n}}{y_{11}}(\eta_n-\eta_1)\\ (x-a)\dfrac{d\eta_2}{dx}=a_{21}\dfrac{y_{11}}{y_{12}}(\eta_1-\eta_2)+a_{23}\dfrac{y_{13}}{y_{12}}(\eta_3-\eta_2)+\cdots\\ \qquad\qquad +a_{2n}\dfrac{y_{1n}}{y_{12}}(\eta_n-\eta_2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (x-a)\dfrac{d\eta_n}{dx}=a_{n1}\dfrac{y_{11}}{y_{1n}}(\eta_1-\eta_n)+a_{n2}\dfrac{y_{12}}{y_{1n}}(\eta_2-\eta_n)+\cdots\\ \qquad\qquad +a_{nn-1}\dfrac{y_{1n-1}}{y_{1n}}(\eta_{n-1}-\eta_n),\end{cases}$$

und mit Hülfe der Substitutionen

$$(59)\qquad \eta_2-\eta_1=z_1,\quad \eta_3-\eta_1=z_2,\quad \ldots\ \eta_n-\eta_1=z_{n-1}$$

das lineare Differentialgleichungsystem $n-1^{\text{ter}}$ Klasse

$$(60)\begin{cases}(x-a)\dfrac{dz_1}{dx}=b_{11}z_1+b_{12}z_2+\cdots+b_{1n-1}z_{n-1}\\ (x-a)\dfrac{dz_2}{dx}=b_{21}z_1+b_{22}z_2+\cdots+b_{2n-1}z_{n-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (x-a)\dfrac{dz_{n-1}}{dx}=b_{n-11}z_1+b_{n-12}z_2+\cdots+b_{n-1\,n-1}z_{n-1},\end{cases}$$

worin, wie unmittelbar zu sehen,

$$(61)\qquad b_{\alpha\beta}=-a_{1\beta+1}\frac{y_{1\beta+1}}{y_{11}}+a_{\alpha+1\beta+1}\frac{y_{1\beta+1}}{y_{1\alpha+1}}\qquad (\alpha \gtrless \beta)$$

und

$$(62)\qquad b_{\alpha\alpha}=-a_{\alpha+11}\frac{y_{11}}{y_{1\alpha+1}}-a_{\alpha+12}\frac{y_{12}}{y_{1\alpha+1}}-\cdots$$
$$-a_{\alpha+1n}\frac{y_{1n}}{y_{1\alpha+1}}-a_{1\alpha+1}\frac{y_{1\alpha+1}}{y_{11}}$$

ist.

Wir dürfen zunächst annehmen*), dass die durch die

*) Ist dies nämlich nicht der Fall, sind vielmehr, wie aus den Gleichungen (37) ersichtlich, einige der Grössen $c_{01}, c_{02}, \ldots c_{0n}$,

Gleichungen (55) definirten Functionen $u_{11}, u_{12}, \ldots u_{1n}$ für $x = a$ sämmtlich von Null verschieden sind; es werden dann, wie man unmittelbar sieht, die Coefficienten $b_{\alpha\beta}$ und $b_{\alpha\alpha}$ nach (61) und (62) in der Umgebung von $x = a$ endliche, stetige und eindeutige Functionen von x sein, und das Differentialgleichungsystem (60) wird somit den Charakter des gegebenen Differentialgleichungsystems (35) haben.

Nun lautet aber die zum Punkte a gehörige determinirende Fundamentalgleichung des Differentialgleichungsystems (60)

$$(63) \qquad \begin{vmatrix} b_{11}^{(0)} - R & b_{12}^{(0)} \ldots\ldots\ldots & b_{1n-1}^{(0)} \\ b_{21}^{(0)} & b_{22}^{(0)} - R \ldots & b_{2n-1}^{(0)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ b_{n-11}^{(0)} & b_{n-12}^{(0)} \ldots\ldots & b_{n-1\,n-1}^{(0)} - R \end{vmatrix} = 0,$$

wenn $b_{\lambda\mu}^{(0)}$ den Werth von $b_{\lambda\mu}$ für $x = a$ bedeutet; setzt man aber

$$(64) \qquad u_{1\mu} = c_{0\mu} + c_{1\mu}(x - a) + c_{2\mu}(x - a)^2 + \cdots,$$

worin der Voraussetzung nach $c_{0\mu}$ von Null verschieden ist, so wird nach (55) und (64)

$$(65) \qquad \frac{y_{1\delta}^{(0)}}{y_{1\varepsilon}^{(0)}} = \frac{c_{0\delta}}{c_{0\varepsilon}},$$

und somit vermöge (61) und (62)

$$(66) \qquad b_{\alpha\beta}^{(0)} = - a_{1,\beta+1}^{(0)} \frac{c_{0,\beta+1}}{c_{01}} + a_{\alpha+1,\beta+1}^{(0)} \frac{c_{0,\beta+1}}{c_{0,\alpha+1}} \quad (\alpha \gtrless \beta)$$

und

---

welche durch das Gleichungsystem (40) bestimmt sind, gleich Null, so wird man durch unendlich kleine Veränderungen der Werthe $a_{\alpha\beta}^{0}$, d. h. der für $x = a$ angenommenen Werthe der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ des gegebenen Differentialgleichungsystems (35) das letztere in ein unendlich wenig von dem gegebenen verschiedenes umformen können, für welches die entsprechenden Gleichungen (40) lauter von Null verschiedene Grössen für die Anfangswerthe der neuen $u_{11}, u_{12}, \ldots u_{1n}$ ergeben, und für welche die weiteren oben gemachten Schlüsse gültig bleiben; nach erlangtem Resultate bleibt die Form der Integrale der oben reducirten Differentialgleichungsysteme unverändert, wenn man durch die entgegengesetzten unendlich kleinen Variationen zu dem ursprünglichen Differentialgleichungsysteme zurückkehrt.

$$(67)\qquad b_{\alpha\alpha}^{(0)} = - a_{\alpha+1\,1}^{(0)} \frac{c_{01}}{c_{0\,\alpha+1}} - a_{\alpha+1\,2}^{(0)} \frac{c_{02}}{c_{0\alpha+1}} - \cdots - a_{\alpha+1\,n}^{(n)} \frac{c_{0n}}{c_{0\alpha+1}} - a_{1\alpha+1}^{(0)} \frac{c_{0\alpha+1}}{c_{01}}$$

sein. Da aber nach den Gleichungen (48)

$$(68)\quad a_{\alpha+1\,1}^{(0)} c_{01} + a_{\alpha+1\,2}^{(0)} c_{02} + \cdots + \left(a_{\alpha+1\,\alpha+1}^{(0)} - r_1\right) c_{0\alpha+1} + \cdots + a_{\alpha+1\,n}^{(0)} c_{0n} = 0$$

ist, so folgt

$$(69)\qquad b_{\alpha\alpha}^{(0)} = a_{\alpha+1\,\alpha+1}^{(0)} - r_1 - a_{1\alpha+1}^{(0)} \frac{c_{0\alpha+1}}{c_{01}},$$

und es geht somit nach (66) und (69) die determinirende Fundamentalgleichung (63) des Differentialgleichungsystems (60) in

$$(70)\quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{22}^{(0)} - a_{12}^{(0)} \frac{c_{02}}{c_{01}} - (R + r_1) & - a_{13}^{(0)} \frac{c_{03}}{c_{01}} + a_{23}^{(0)} \frac{c_{03}}{c_{02}} & \cdots & - a_{1n}^{(0)} \frac{c_{0n}}{c_{01}} + a_{2n}^{(0)} \frac{c_{0n}}{c_{02}} \\ - a_{12}^{(0)} \frac{c_{02}}{c_{01}} + a_{32}^{(0)} \frac{c_{02}}{c_{03}} & a_{33}^{(0)} - a_{13}^{(0)} \frac{c_{03}}{c_{01}} - (R + r_1) & \cdots & - a_{1n}^{(0)} \frac{c_{0n}}{c_{01}} + a_{3n}^{(0)} \frac{c_{0n}}{c_{03}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - a_{12}^{(0)} \frac{c_{02}}{c_{01}} + a_{n2}^{(0)} \frac{c_{02}}{c_{0n}} & - a_{13}^{(0)} \frac{c_{03}}{c_{01}} + a_{n3}^{(0)} \frac{c_{03}}{c_{0n}} & \cdots & a_{nn}^{(0)} - a_{1n}^{(0)} \frac{c_{0n}}{c_{01}} - (R + r_1) \end{vmatrix} = 0$$

über. Multiplicirt man aber die einzelnen Horizontalreihen der determinirenden Fundamentalgleichung (42) mit den der Annahme nach von Null verschiedenen Grössen $c_{01}, c_{02}, \ldots c_{0n}$, zieht die erste Horizontalreihe von der zweiten, dritten, ... bis n^{ten} ab, setzt

$$(71)\qquad r = R + r_1,$$

und benutzt die zwischen den $a_{\alpha\beta}^{(0)}$ und $c_{0\lambda}$ stattfindenden Beziehungen (48), so findet man mit Hülfe bekannter Deter-

minanteneigenschaften, dass die determinirende Fundamentalgleichung (42) sich in die Form setzen lässt

$$(72) \qquad R \,.\, D_1 = 0,$$

und hieraus folgt, dass die Lösungen der Fundamentalgleichung (70), da diejenigen von (42) durch $r_1, r_2, \ldots r_\lambda, \ldots r_n$ bezeichnet wurden, durch

$$(73) \qquad r_2 - r_1, \quad r_3 - r_1, \ldots r_\lambda - r_1, \ldots r_n - r_1$$

dargestellt sind. Bildet man nun die Differenzen aller dieser Lösungen und der ersten in der bezeichneten Reihenfolge, so dass man

$$(74) \qquad r_3 - r_2, \quad r_4 - r_2, \quad \ldots r_n - r_2$$

erhält, so werden diese, da die r so geordnet waren, dass die reellen Theile auf einander folgender Elemente nicht wachsen, keiner von Null verschiedenen positiven ganzen Zahl gleich sein können, und somit den Bedingungen des Satzes in Nummer 6. genügen; es hat daher das lineare Differentialgleichungsystem $n-1^{\text{ter}}$ Klasse (60) ein reguläres Integralsystem von der Form

$$(75) \qquad z_1 = (x-a)^{r_2 - r_1} v_1, \quad z_2 = (x-a)^{r_3 - r_1} v_2, \ldots$$
$$z_{n-1} = (x-a)^{r_n - r_1} v_{n-1},$$

worin $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ um $x = a$ herum endliche, stetige und eindeutige Functionen von x bedeuten, die nicht sämmtlich für $x = a$ verschwinden. Beachtet man aber, dass die erste der Differentialgleichungen (58) in die Form gesetzt werden kann

$$(76) \quad (x-a)\frac{dv_n}{dx} = a_{12}\frac{y_{12}}{y_{11}} z_1 + a_{13}\frac{y_{13}}{y_{11}} z_2 + \cdots + a_{1n}\frac{y_{1n}}{y_{11}} z_{n-1},$$

so folgt mit Hülfe von (75)

$$(77) \qquad (x-a)\frac{dv_n}{dx} = (x-a)^{r_2 - r_1} U,$$

worin U von der Form

$$(78) \qquad U = U_0 + U_1(x-a) + U_2(x-a)^2 + \cdots$$

ist, und somit durch Integration, wenn man berücksichtigt, dass nach der für II. gemachten Annahme $r_2 - r_1$ entweder Null oder eine negative ganze Zahl ist, im Allgemeinen

$$(79) \quad \eta_1 = A \log(x-a) + A_{01}(x-a)^{-r_1} + A_{11}(x-a)^{-r_1+1} + A_{21}(x-a)^{-r_1+2} + \cdots,$$

und daher nach (59) und (75)

$$(80) \begin{cases} \eta_2 = A \log(x-a) + A_{02}(x-a)^{-r_2} + A_{12}(x-a)^{-r_2+1} + A_{22}(x-a)^{-r_2+2} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_n = A \log(x-a) + A_{0n}(x-a)^{-r_n} + A_{1n}(x-a)^{-r_n+1} + A_{2n}(x-a)^{-r_n+2} + \cdots, \end{cases}$$

woraus sich endlich vermöge (55) und (56) ein zweites Integralsystem der Differentialgleichungen (35) in der Form ergiebt

$$(81) \begin{cases} y_{21} = (x-a)^{r_1}\{u_{21} + Au_{11}\log(x-a)\} \\ y_{22} = (x-a)^{r_1}\{u_{22} + Au_{12}\log(x-a)\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{2n} = (x-a)^{r_1}\{u_{2n} + Au_{1n}\log(x-a)\}, \end{cases}$$

in welchem auch $A = 0$ sein kann, und welches, wie man unmittelbar sieht, wiederum regulär ist.

Geht man ebenso von dem linearen Differentialgleichungsystem $n-1^{\text{ter}}$ Klasse (60) durch analoge Substitutionen zu dem entsprechenden $n-2^{\text{ter}}$ Klasse über, so führen genau dieselben Schlüsse, da die Quadratur

$$\int \log(x-a)\frac{dx}{x-a} = \tfrac{1}{2}[\log(x-a)]^2$$

lautet, zu einem Integralsystem der Form

$$(82) \begin{cases} y_{31} = (x-a)^{r_1}\{v_{11} + w_{11}\log(x-a) + Bu_{11}[\log(x-a)]^2\} \\ y_{32} = (x-a)^{r_1}\{v_{12} + w_{12}\log(x-a) + Bu_{12}[\log(x-a)]^2\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{3n} = (x-a)^{r_1}\{v_{1n} + w_{1n}\log(x-a) + Bu_{1n}[\log(x-a)]^2\}, \end{cases}$$

das wiederum regulär ist, u. s. w., so *dass sich im Allgemeinen der Gruppe* $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ *der Annahme* II. *entsprechend die* λ *regulären Integralsysteme ergeben*

$$(83)\begin{cases} y_{1\varrho} = (x-a)^{r_1} u_{1\varrho} \\ y_{2\varrho} = (x-a)^{r_1} \{ u_{2\varrho}^{0} + u_{2\varrho}^{1} \log(x-a) \} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_{\lambda\varrho} = (x-a)^{r_1} \{ u_{\lambda\varrho}^{0} + u_{\lambda\varrho}^{1} \log(x-a) + \cdots \\ \qquad + u_{\lambda\varrho}^{\lambda-1} [\log(x-a)]^{\lambda-1} \}, \end{cases}$$

und es folgt zugleich, dass die um ganze Zahlen verschiedenen Werthe $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$, *welche Lösungen der zu* $x = a$ *gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung waren, auch den durch* $2\pi i$ *dividirten Logarithmen der Wurzeln* $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\lambda$ *der zu* $x = a$ *gehörigen Fundamentalgleichung* (14) *des vorigen Abschnittes entsprechen.*

Fassen wir die den Fällen I. und II. entsprechenden Resultate zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

Das lineare Differentialgleichungsystem

$$(x-a)\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n$$

$$(x-a)\frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$(x-a)\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n,$$

in welchem $a_{\alpha\beta}$ *in der Umgebung von* $x = a$ *endliche, stetige und eindeutige Functionen bedeuten, hat stets in der Umgebung dieses Punktes ein* r e g u l ä r e s *Fundamentalsystem von Integralen, und zwar wird, wenn man von den Lösungen der zum Punkte* $x = a$ *gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung*

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} - r & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} - r & \cdots & a_{2n}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} - r \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher $a_{\alpha\beta}^{(0)}$ *den Werth der Function* $a_{\alpha\beta}$ *im Punkte* $x = a$ *bezeichnet, alle diejenigen zu einer Gruppe verbindet, welche einander gleich oder sich um ganze Zahlen unterscheiden, und dieselben innerhalb einer Gruppe so ordnet, dass die Differenz eines folgenden und eines vorhergehenden Elementes nie eine positive ganze Zahl ist, das erste Element einer jeden Gruppe eine im vorigen Abschnitte definirte Gruppe von Integralsystemen und zwar regulären Fundamentalsystemen von Integralen nach sich ziehen, die, wie früher hervorgehoben, auch wieder in Untergruppen, deren erste Elemente keine logarithmischen Glieder besitzen, zerfallen können. Zugleich erkennt man, dass sämmtliche Lösungen* $r_1, r_2, \ldots r_n$ *der zu* $x = a$ *gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung die durch* $2\pi i$ *dividirten Logarithmen der Wurzeln* $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ *der zu* $x = a$ *gehörigen Fundamentalgleichung* (14) *des vorigen Abschnittes sind.*

8. Nachdem die Umkehrung des in Nummer 2. dieses Abschnittes ausgesprochenen Satzes erwiesen ist, wird auch die Gültigkeit der Umkehrung des allgemeinen Satzes der Nummer 4. festgestellt sein, und es wird sich somit das Resultat der Untersuchungen dieses Abschnittes folgendermassen zusammenfassen lassen:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein lineares homogenes Differentialgleichungsystem n^{ter} *Klasse mit in der ganzen unendlichen Ebene eindeutigen Coefficienten und einer endlichen Anzahl singulärer Punkte* $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ *in der Umgebung eben dieser sowie des unendlich entfernten Punktes nur reguläre Integralsysteme besitzt, ist die, dass dieselben von der Form* (31) *oder durch Substitutionen der Form* (32) *oder durch successive aus solchen zusammengesetzte abgeleitet sind,*

und für *eine* lineare Differentialgleichung höherer Ordnung specialisirt:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} *Ordnung mit in der ganzen unendlichen Ebene eindeutigen Coefficienten und einer endlichen Anzahl singulärer Punkte* $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ *in der Umgebung eben dieser sowie des unendlich entfernten Punktes nur reguläre Integrale besitzt, ist die, dass dieselbe von der Form* (33)

ist, worin die Grössen A_ν ganze Functionen von x von nicht höherem Grade als dem $\nu(\varrho-1)^{\text{ten}}$ bedeuten.

III. Ueber die Substitutionsgruppen linearer Differentialgleichungssysteme und deren Anwendung auf die Ermittlung algebraischer Integralsysteme.

1. Bilden für ein lineares Differentialgleichungssystem n^{ter} Klasse

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}\,y_1 + A_{12}\,y_2 + \cdots + A_{1n}\,y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}\,y_1 + A_{22}\,y_2 + \cdots + A_{2n}\,y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1}\,y_1 + A_{n2}\,y_2 + \cdots + A_{nn}\,y_n, \end{cases}$$

in welchem die Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ in der ganzen Ebene eindeutige Functionen darstellen, die Integrale

$$(\text{A})\qquad \begin{cases} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{cases}$$

ein simultanes Fundamentalsystem, so wird, wie im vorigen Kapitel gezeigt worden, für beliebige Umläufe der unabhängigen Variabeln x das System (A) stets wieder in ein Fundamentalsystem übergehen, welches für alle möglichen von einem Punkte ausgehenden geschlossenen Umläufe die verschiedenen Werthe

$$(A_1),\ (A_2),\ (A_3),\ \ldots$$

annehmen möge, deren Anzahl unendlich gross oder auch endlich sein kann.

Wir wollen die Uebergänge

$$(A)(A_1),\ (A)(A_2),\ (A)(A_3),\ \ldots$$

resp. mit

(a) $$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots$$

bezeichnen, dieselben Substitutionen, und die Zusammenstellung aller Substitutionen (a) *die Gruppe des Differentialgleichungssystems* (1) *nennen;*

es ist ersichtlich, dass sich alle Substitutionen successive aus denjenigen zusammensetzen lassen, welche aus der Umkreisung der einzelnen singulären Punkte des Differentialgleichungssystems hervorgehen.

2. Betrachtet man nur einen Theil der n simultanen Fundamentalsysteme von Integralen

(B) $$\begin{cases} y_{11} & y_{12} \ \cdots \ y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} \ \cdots \ y_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{m1} & y_{m2} \ \cdots \ y_{mn}, \end{cases}$$

so kann es vorkommen, dass alle geschlossenen Wege der unabhängigen Variabeln das System (B) immer nur in solche Integralsysteme

$$(B_1),\ (B_2),\ (B_3),\ \ldots$$

überführen, welche keine anderen Integralelemente als die in (B) vorkommenden enthalten, und *in diesem Falle werden wir sagen, das Differentialgleichungsystem* (1) *besitzt eine nicht primitive Gruppe.*

Es soll gezeigt werden,

dass, wenn ein lineares Differentialgleichungsystem n^{ter} Klasse mit in der ganzen Ebene eindeutigen Coefficienten eine nicht primitive Gruppe besitzt, welche aus m simultanen Integralsystemen besteht, dann dasselbe in dem früher angegebenen Sinne reductibel ist und zwar so, dass sämmtliche Integralsysteme eines gleichartigen linearen Differentialgleichungsystems m^{ter} Klasse auch Elemente von Integralsystemen des ursprünglichen Systems von Differentialgleichungen bilden; und umgekehrt, wenn dies

der Fall ist, so besitzt das Differentialgleichungssystem n^{ter} Klasse eine nicht primitive Gruppe.

Greift man nämlich das System von Integralelementen

$$(C)\qquad \begin{cases} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mm} \end{cases}$$

heraus, und bildet das lineare Differentialgleichungssystem m^{ter} Klasse

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx} & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ \frac{dy_{11}}{dx} & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dy_{m1}}{dx} & y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mm} \end{vmatrix} = 0$$

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dy_2}{dx} & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ \frac{dy_{12}}{dx} & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dy_{m2}}{dx} & y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mm} \end{vmatrix} = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dy_m}{dx} & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ \frac{dy_{1m}}{dx} & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dy_{mm}}{dx} & y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mm} \end{vmatrix} = 0,$$

so ist zunächst klar, dass dasselbe das System (C) zum simultanen Fundamentalsystem von Integralen hat; aber es ist auch leicht zu sehen, dass, wenn das Differentialgleichungssystem (2), (3), ... (4) in die Form

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = B_{11}y_1 + B_{12}y_2 + \cdots + B_{1m}y_m \\ \dfrac{dy_2}{dx} = B_{21}y_1 + B_{22}y_2 + \cdots + B_{2m}y_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_m}{dx} = B_{m1}y_1 + B_{m2}y_2 + \cdots + B_{mm}y_m \end{cases}$$

gesetzt wird, die Coefficienten $B_{\alpha\beta}$ gleichartig mit den Coefficienten des Differentialgleichungssystems (1), d. h. in der ganzen Ebene eindeutige Functionen von x sind. Denn, da der Voraussetzung nach für einen beliebigen geschlossenen Umlauf des x

$$(6)\quad \begin{cases} y_{\alpha 1} \text{ in } c_{\alpha 1}y_{11} + c_{\alpha 2}y_{21} + \cdots + c_{\alpha m}y_{m1} \\ y_{\alpha 2} \text{ in } c_{\alpha 1}y_{12} + c_{\alpha 2}y_{22} + \cdots + c_{\alpha m}y_{m2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{\alpha m} \text{ in } c_{\alpha 1}y_{1m} + c_{\alpha 2}y_{2m} + \cdots + c_{\alpha m}y_{mm} \end{cases}$$

übergehen, so wird nach II. 5. des dritten Kapitels

$$(7)\quad B_{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1\mu-1} & \dfrac{dy_{1\lambda}}{dx} & y_{1\mu+1} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2\mu-1} & \dfrac{dy_{2\lambda}}{dx} & y_{2\mu+1} & \cdots & y_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{m\mu-1} & \dfrac{dy_{m\lambda}}{dx} & y_{m\mu+1} & \cdots & y_{mm} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mm} \end{vmatrix},$$

weil jede der Determinanten für den betr. Umlauf des x ihren ursprünglichen Werth multiplicirt mit der Determinante

$$(8)\quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

annimmt, unverändert bleiben, also alle $B_{\alpha\beta}$ in der ganzen Ebene eindeutige Functionen von x sein, und es wäre somit der erste Theil des oben ausgesprochenen Satzes bewiesen. Umgekehrt ist aber auch einleuchtend, dass, wenn (C) ein simultanes Fundamentalsystem eines linearen Differentialgleichungssystems m^{ter} Klasse (5) bildet, sämmtliche Umläufe des x die Elemente von (C) immer nur in lineare Functionen eben dieser Elemente überführen werden, und daher das Differentialgleichungssystem (1) eine nicht primitive Gruppe besitzen wird.

3. Aber wir können diesen letzteren Theil des oben ausgesprochenen Satzes auch noch anders ausdrücken, wenn wir zunächst noch folgende Ueberlegung anstellen.

Wenn ein Theil der Elemente eines vollständigen Integralsystems

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots \eta_n \tag{9}$$

des Differentialgleichungssystems (1) z. B. $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\nu$, worin $\nu < n$, ein vollständiges Integralsystem eines gleichartigen linearen Differentialgleichungssystems ν^{ter} Klasse

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx} &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + \cdots + a_{1\nu} z_\nu \\
\frac{dz_2}{dx} &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + \cdots + a_{2\nu} z_\nu \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dz_\nu}{dx} &= a_{\nu 1} z_1 + a_{\nu 2} z_2 + \cdots + a_{\nu\nu} z_\nu
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

bildet, so folgt durch Vergleichung von (1) und (10) das Gleichungsystem

$$\left\{\begin{aligned}
A_{11}\eta_1 + A_{12}\eta_2 + \cdots + A_{1n}\eta_n &= a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \cdots + a_{1\nu}\eta_\nu \\
A_{21}\eta_1 + A_{22}\eta_2 + \cdots + A_{2n}\eta_n &= a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \cdots + a_{2\nu}\eta_\nu \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{\nu 1}\eta_1 + A_{\nu 2}\eta_2 + \cdots + A_{\nu n}\eta_n &= a_{\nu 1}\eta_1 + a_{\nu 2}\eta_2 + \cdots + a_{\nu\nu}\eta_\nu
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Sind nun alle diese Gleichungen in den η-Grössen identisch, so würde daraus folgen, dass die ersten ν Differentialgleichungen des Systemes (1) das Differentialgleichungsystem

(10) selbst bilden, und sämmtliche vollständige Integralsysteme des letzteren würden Theile von vollständigen Integralsystemen des ersteren bilden; sind die Gleichungen (11) aber nicht identisch, so ergäbe sich jedenfalls

$$\eta_n = p_1\eta_1 + p_2\eta_2 + \cdots + p_{n-1}\eta_{n-1}, \tag{12}$$

worin $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ linear aus den A und a zusammengesetzt sind, und substituirt man daher

$$y_n = p_1y_1 + p_2y_2 + \cdots + p_{n-1}y_{n-1} \tag{13}$$

in (1), so erhält man ein gleichartiges lineares Differentialgleichungsystem $n - 1^{\text{ter}}$ Klasse

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{dy_1}{dx} = B_{11}y_1 + B_{12}y_2 + \cdots + B_{1\,n-1}y_{n-1} \\
\frac{dy_2}{dx} = B_{21}y_1 + B_{22}y_2 + \cdots + B_{2\,n-1}y_{n-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dy_{n-1}}{dx} = B_{n-1\,1}y_1 + B_{n-1\,2}y_2 + \cdots + B_{n-1\,n-1}y_{n-1},
\end{array}\right. \tag{14}$$

welches von dem Integralsystem (9) die Elemente

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots \eta_{n-1} \tag{15}$$

als ein vollständiges Integralsystem hat. Stellt man jetzt wieder (14) mit (10) zusammen, so kann man ebenso wie vorher bei der Zusammenstellung von (1) mit (10) schliessen, und fährt man so fort, so kommt man jedenfalls zu einem linearen Differentialgleichungsystem ν^{ter} Klasse, das mit (1) die Integralelemente $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\nu$ gemein hat. Wird nun angenommen, dass nicht schon ein Theil dieser Elemente das vollständige Integralsystem eines linearen Differentialgleichungsystems noch niederer Klasse als der ν^{ten} bildet, so können die eben gemachten Schlüsse nicht weiter für das zuletzt erhaltene System ν^{ter} Klasse und das System (10) derselben Klasse fortgeführt werden, und es folgt somit, dass eben dieses System mit (10) identisch sein muss. Da aber dann das System (1) durch die successiven Substitutionen

$$\left\{\begin{array}{l}
y_n = p_1y_1 + p_2y_2 + \cdots + p_{n-1}y_{n-1} \\
y_{n-1} = q_1y_1 + q_2y_2 + \cdots + q_{n-2}y_{n-2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_{\nu+1} = r_1y_1 + r_2y_2 + \cdots + r_\nu y_\nu
\end{array}\right. \tag{16}$$

in das System (10) übergeht, so folgt, dass alle vollständigen Integralsysteme von (10) Theile von vollständigen Integralsystemen von (1) bilden, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Wenn ein Theil eines vollständigen Integralsystemes eines Systemes von n linearen Differentialgleichungen mit in der ganzen Ebene eindeutigen Coefficienten ein vollständiges System von Integralen eines gleichartigen linearen Differentialgleichungsystems ν^{ter} *Klasse, worin* $\nu < n$ *ist, bildet, und kein Theil desselben das vollständige System von Integralen eines gleichartigen linearen Differentialgleichungsystems von noch niederer Klasse ist, so werden sämmtliche Integralsysteme des Differentialgleichungsystems* ν^{ter} *Klasse Theile von vollständigen Systemen von Integralen des gegebenen linearen Differentialgleichungsystems* n^{ter} *Klasse bilden.*

Und stellen wir nunmehr diesen Hülfsatz mit dem vorher bewiesenen Satze zusammen, so folgt unmittelbar,

dass, wenn für ein lineares Differentialgleichungsystem n^{ter} *Klasse mit in der ganzen Ebene eindeutigen Coefficienten das vollständige Integralsystem eines gleichartigen Systems von* ν *linearen Differentialgleichungen, worin* $\nu < n$, *einen Theil eines vollständigen Integralsystems bildet, das Differentialgleichungsystem* n^{ter} *Klasse eine nicht primitive Gruppe besitzt.*

4. Habe nun das lineare Differentialgleichungsystem

$$
(17)\quad \begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \cdots + A_{1n}y_n \\
\dfrac{dy_2}{dx} = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2n}y_n \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\dfrac{dy_n}{dx} = A_{n1}y_1 + A_{n2}y_2 + \cdots + A_{nn}y_n,
\end{cases}
$$

dessen Coefficienten in der ganzen Ebene eindeutige Functionen sein sollen, m algebraische Integralsysteme,

$$
(18)\quad \begin{cases}
y_{11} \quad y_{12} \cdots y_{1n} \\
y_{21} \quad y_{22} \cdots y_{2n} \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
y_{m1} \quad y_{m2} \cdots y_{mn},
\end{cases}
$$

die nicht homogen linear mit constanten Coefficienten unter einander zusammenhängen, und nicht mehr solcher algebraischer Integralsysteme, so kann man, weil die algebraischen Integralelemente für beliebige Umläufe des x nur in einander übergehen, nach den obigen Auseinandersetzungen durch Bildung der m linearen Differentialgleichungen (2), (3), ..(4) ein lineares Differentialgleichungsystem m^{ter} Klasse bilden, welches offenbar ebenfalls in der ganzen Ebene eindeutige Coefficienten besitzen wird, und dessen simultane Fundamentalsysteme von Integralen sämmtlich algebraisch sind; da die Coefficienten, wie aus (7) hervorgeht, algebraische Functionen von x und zugleich eindeutig sind, so werden sie rationale Functionen von x sein. Ist das Differentialgleichungsystem (17) in dem oben angegebenen Sinne nicht reductibel, so muss $m = n$ sein, und es wird das System (2), (3), ... (4) offenbar mit dem Differentialgleichungsystem (17) zusammenfallen.

Nehmen wir nunmehr an, dass das lineare Differentialgleichungsystem (17) *nur algebraische Integrale habe, so werden die Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ also sämmtlich rationale Functionen von x sein.*

Aber wir können auch die Form dieser rationalen Coefficienten leicht angeben, indem die Existenz von nur algebraischen Integralen, da deren Entwicklung um die singulären Punkte herum nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthält, verlangt, dass das Differentialgleichungsystem nur reguläre Integralsysteme und zwar in endlicher Anzahl erfordert, und *es muss somit nach dem vorigen Abschnitte jedes lineare Differentialgleichungsystem n^{ter} Klasse mit nur algebraischen Integralsystemen mit Hülfe von dort näher angegebenen Substitutionen aus einem Differentialgleichungsystem n^{ter} Klasse von der Form abgeleitet sein*

$$(19)\quad \begin{cases} (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho)\dfrac{dy_1}{dx} = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n \\ (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho)\dfrac{dy_2}{dx} = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho)\dfrac{dy_n}{dx} = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n, \end{cases}$$

worin $b_{11}, \ldots b_{nn}$ ganze Functionen von x von nicht höherem Grade als dem $\varrho - 1^{\text{ten}}$ bedeuten.

Um nun die hinreichenden Bedingungen dafür zu finden, dass diese stets regulären Integrale auch sämmtlich algebraische seien, werde zunächst bemerkt, dass, weil für beliebige Umläufe der unabhängigen Variabeln die nur algebraischen Integrale eine endliche Anzahl von Transformationen erleiden können,

die Gruppe des Differentialgleichungsystems (19) *nothwendig nur eine endliche Anzahl von Substitutionen wird enthalten dürfen;*

aber es soll auch umgekehrt bewiesen werden,

dass jedes Differentialgleichungsystem (19), *welches, wie wir wissen, nur reguläre Integralsysteme besitzt, wenn dessen Gruppe nur eine endliche Anzahl von Substitutionen in sich schliesst, nur algebraische Integralsysteme enthält.*

Denn da die allgemeine Form der Integralsysteme in der Umgebung eines singulären Punktes a lautete

$$(20)\qquad y_{\lambda\varrho} = (x-a)^{r_1}\Big\{\varphi_{\lambda\varrho} + \varphi^{(1)}_{\lambda-1\varrho}\log(x-a) + \varphi^{(2)}_{\lambda-2\varrho}[\log(x-a)]^2 + \cdots + \varphi^{(\lambda-1)}_{1\varrho}[\log(x-a)]^{\lambda-1}\Big\}.$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots n)$$

so werden zunächst wegen der Regularität der Integrale die unendlichen, nach ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitenden Reihen nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten dürfen; ferner folgt unmittelbar aus der Annahme der endlichen Anzahl der Substitutionen der Gruppe des Differentialgleichungsystems (19), dass die Umkreisung des Punktes a nur eine endliche Anzahl verschiedener Integralsysteme liefern darf, also einerseits keine Logarithmen in (20) enthalten sein dürfen, andererseits r_1 eine rationale Zahl sein muss, und es werden somit in der Umgebung des willkürlichen Punktes a, er sei ein singulärer oder nicht, die Integralelemente eines simultanen Fundamentalsystems die Form haben

$$(21)\begin{cases} y_{11}=(x-a)^{r_1}\varphi_{11},\ y_{12}=(x-a)^{r_1}\varphi_{12},\ \dots y_{1n}=(x-a)^{r_1}\varphi_{1n} \\ y_{21}=(x-a)^{r_2}\varphi_{21},\ y_{22}=(x-a)^{r_2}\varphi_{22},\ \dots y_{2n}=(x-a)^{r_2}\varphi_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n1}=(x-a)^{r_n}\varphi_{n1},\ y_{n2}=(x-a)^{r_n}\varphi_{n2},\ \dots y_{nn}=(x-a)^{r_n}\varphi_{nn}, \end{cases}$$

worin $r_1, r_2, \dots r_n$ rationale Zahlen und $\varphi_{\alpha\beta}$ in der Umgebung von $x=a$ eindeutige Functionen von x bedeuten, welche nur eine endliche Anzahl ganzer negativer Potenzen von $x-a$ enthalten.

Sei nun

$$(22)\qquad r_1=\frac{m_1}{p_1},\ r_2=\frac{m_2}{p_2},\ \dots r_n=\frac{m_n}{p_n},$$

und p das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $p_1, p_2, \dots p_n$, so folgt, dass alle Integrale, da sie in der Form

$$(23)\begin{cases} y_1=c_1(x-a)^{r_1}\varphi_{11}+c_2(x-a)^{r_2}\varphi_{21}+\cdots+c_n(x-a)^{r_n}\varphi_{n1} \\ y_2=c_1(x-a)^{r_1}\varphi_{12}+c_2(x-a)^{r_2}\varphi_{22}+\cdots+c_n(x-a)^{r_n}\varphi_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n=c_1(x-a)^{r_1}\varphi_{1n}+c_2(x-a)^{r_2}\varphi_{2n}+\cdots+c_n(x-a)^{r_n}\varphi_{nn} \end{cases}$$

ausdrückbar sind, sich in der Umgebung des Punktes a in convergente Reihen entwickeln lassen, welche nach steigenden Potenzen von

$$(x-a)^{\frac{1}{p}}$$

fortschreiten und nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten.

Fassen wir nun z. B. das Integralelement y_1 auf, so wird dieses nach (23) für alle Umkreisungen des singulären Punktes a, also auch für alle Umkreisungen aller, wie oben hervorgehoben worden, nur in endlicher Anzahl vorhandenen singulären Punkte nur eine endliche Anzahl von Werthen

$$y_1^{(1)},\ y_1^{(2)},\ \dots\ y_1^{(\varepsilon)}$$

annehmen, und somit die Lösung der algebraischen Gleichung

$$(24)\quad y^\varepsilon-(y_1^{(1)}+y_1^{(2)}+\cdots+y_1^{(\varepsilon)})\,y^{\varepsilon-1}+\cdots\pm y_1^{(1)}y_1^{(2)}\dots y_1^{(\varepsilon)}=0$$

sein, welche in die Form

$$(25)\qquad y^\varepsilon+P_1y^{\varepsilon-1}+P_2y^{\varepsilon-2}+\cdots+P_\varepsilon=0$$

gebracht werden kann, in welcher $P_1, P_2, \ldots P_t$ offenbar in der ganzen Ebene eindeutige Functionen von x bedeuten. Da nun die Integrale, also auch die Coefficienten $P_1, P_2, \ldots P_t$ sowohl im Endlichen als auch im Unendlichen nur von einer endlichen Ordnung unendlich werden, so werden eben diese Coefficienten, da sie in der ganzen Ebene eindeutig waren, rationale Functionen von x sein, und somit *die Integrale selbst algebraische Functionen*, was gezeigt werden sollte. Die Aufstellung der linearen Differentialgleichungsysteme mit nur algebraischen Integralsystemen ist somit auf die Gruppenuntersuchung der in (19) enthaltenen regulären Differentialgleichungsysteme zurückgeführt.

IV. Discussion des hypergeometrischen Differentialgleichungssystems zweiter Klasse.

1. Um die allgemeinen für die linearen Differentialgleichungsysteme beliebiger Klasse angestellten Untersuchungen an einem Beispiele zu erläutern, wählen wir das lineare Differentialgleichungsystem zweiter Klasse mit nur regulären Fundamentalsystemen von Integralen in der Umgebung der einzigen singulären Punkte a, b und ∞:

$$(1)\quad \begin{cases} (x-a)(x-b)\dfrac{dy_1}{dx} = (k_{11}+l_{11}x)\,y_1 + (k_{12}+l_{12}x)\,y_2 \\ (x-a)(x-b)\dfrac{dy_2}{dx} = (k_{21}+l_{21}x)\,y_1 + (k_{22}+l_{22}x)\,y_2, \end{cases}$$

und zwar gleich die durch algebraische Substitutionen leicht herstellbare Form, in welcher

$$(2)\quad \begin{cases} a = 0, \quad b = 1, \\ k_{11} = \dfrac{\alpha(\gamma-\beta)}{\alpha-\beta+1},\ l_{11} = -\alpha,\ k_{12} = \dfrac{\alpha(1-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma+1)}{(\alpha-\beta+1)^2}, \\ l_{12} = 0, \\ k_{21} = 1, \qquad l_{21} = 0, \qquad k_{22} = \dfrac{(1-\beta)(\beta-\gamma)}{\alpha-\beta+1}, \\ l_{22} = 1-\beta \end{cases}$$

ist, so dass das Differentialgleichungsystem (1) die Form annimmt:

$$(3)\begin{cases} x(1-x)\dfrac{dy_1}{dx}=\left[\dfrac{\alpha(\beta-\gamma)}{\alpha-\beta+1}+\alpha x\right]y_1+\dfrac{\alpha(1-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma+1)}{(\alpha-\beta+1)^2}y_2 \\ x(1-x)\dfrac{dy_2}{dx}=y_1+\left[\dfrac{(1-\beta)(\alpha-\gamma+1)}{\alpha-\beta+1}+(\beta-1)x\right]y_2; \end{cases}$$

durch Differentiation der ersten Gleichung erhält man mit Benutzung der zweiten für y_1 die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(4)\qquad x(1-x)\frac{d^2y_1}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy_1}{dx}-\alpha\beta y_1=0,$$

und ebenso durch Differentiation der zweiten für y_2 die Differentialgleichung

$$(5)\quad x(1-x)\frac{d^2y_2}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy_2}{dx}-(1+\alpha)(\beta-1)y_2=0.$$

Aus der Form der Differentialgleichungen (3) erkennt man unmittelbar, dass im Endlichen nur die Werthe $x=0$ und $x=1$ singuläre Punkte definiren, und ebenso sieht man vermöge der Substitution

$$(6)\qquad x=\frac{1}{t},$$

dass $t=0$ oder $x=\infty$ ein solcher singulärer Punkt ist.

Während sich also in der Umgebung aller anderen Punkte a ausser $x=0, 1, \infty$ die Integrale des Differentialgleichungssystems (3) nach positiven steigenden ganzen Potenzen von $x-a$ in convergente Reihen entwickeln lassen, wird zur Untersuchung des Charakters der Integrale in der Umgebung der singulären Punkte die zu diesen gehörige determinirende Fundamentalgleichung aufzustellen sein, wobei jedoch schon nach den Untersuchungen des zweiten Abschnittes aus der Form des Differentialgleichungssystems ersichtlich ist, dass zu den drei singulären Punkten jedenfalls reguläre Fundamentalsysteme von Integralen gehören.

2. Was zunächst die zum Punkte $x=0$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\alpha(\beta-\gamma)}{\alpha-\beta+1}-r & \dfrac{\alpha(1-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma+1)}{(\alpha-\beta+1)^2} \\ 1 & \dfrac{(1-\beta)(\alpha-\gamma+1)}{\alpha-\beta+1}-r \end{vmatrix}=0$$

betrifft, so sind deren Lösungen, wie unmittelbar zu sehen,

$$(8) \qquad r_1 = 0, \quad r_2 = 1 - \gamma;$$

sind nun die beiden Lösungen derart, dass $r_2 - r_1$ weder Null noch eine positive ganze Zahl ist, also γ *weder der positiven Einheit, noch der Null noch einer negativen ganzen Zahl gleich ist*, so hat nach früheren Auseinandersetzungen das Differentialgleichungsystem jedenfalls um $x = 0$ herum ein Integralelement der Form

$$(9) \qquad y_1 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots,$$

und man findet die Werthe der Coefficienten dieser Reihe leicht, indem man y_1 und dessen Differentialquotienten aus (9) entwickelt, in die Gleichung (4) einsetzt und die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x identificirt; es ergiebt sich leicht

$$(10) \quad y_{11} = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot \beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \cdots,$$

eine Reihe, welche die *hypergeometrische* genannt und mit

$$(11) \qquad y_{11} = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

bezeichnet wird; da der nächste singuläre Punkt $x = 1$ ist, so ist ihr Convergenzbereich der Einheitskreis. Da ferner die Differentialgleichung (4) in (5) übergeht, wenn

$$y_1, \alpha, \beta \text{ durch } y_2, \beta - 1, 1 + \alpha$$

ersetzt werden, so wird das zweite Element des zugehörigen Integralsystems, wie unmittelbar aus der ersten Gleichung des Systems (3) zu ersehen, durch

$$(12) \qquad y_{12} = \frac{\alpha - \beta + 1}{(\beta - 1)(\alpha - \gamma + 1)} F(\beta - 1, 1 + \alpha, \gamma, x)$$

dargestellt sein.

Um nun die zweiten in der Umgebung von $x = 0$ gültigen Integralelemente des regulären Fundamentalsystems zu finden, welche zu $r_2 = 1 - \gamma$ gehören, setze man

$$(13) \qquad y_1 = x^{1-\gamma} u_1, \quad y_2 = x^{1-\gamma} u_2$$

in das Differentialgleichungsystem (3) ein, und erhält sodann

$$(14)\begin{cases} x(1-x)\dfrac{du_1}{dx} = \left[\dfrac{(\alpha+1-\gamma)(\beta-1)}{\alpha-\beta+1} + (\alpha+1-\gamma)x\right]u_1 \\ \qquad\qquad + \dfrac{\alpha(1-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma+1)}{(\alpha-\beta+1)^2}u_2 \\ x(1-x)\dfrac{du_2}{dx} = u_1 + \left[\dfrac{\alpha(\gamma-\beta)}{\alpha-\beta+1} + (\beta-\gamma)x\right]u_2; \end{cases}$$

beachtet man nun, dass dieses Differentialgleichungsystem aus (3) entsteht, wenn dort α, β, γ durch $\alpha+1-\gamma$, $\beta+1-\gamma$, $2-\gamma$ ersetzt werden, so ergiebt sich ein particuläres Integralsystem

$$(15)\quad \begin{aligned} u_1 &= F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x), \\ u_2 &= \frac{\alpha+1-\beta}{\alpha(\beta-\gamma)} F(\beta-\gamma, \alpha+2-\gamma, 2-\gamma, x), \end{aligned}$$

also

$$(16)\quad \begin{aligned} y_{21} &= x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x), \\ y_{22} &= \frac{\alpha+1-\beta}{\alpha(\beta-\gamma)} x^{1-\gamma} F(\beta-\gamma, \alpha+2-\gamma, 2-\gamma, x), \end{aligned}$$

vorausgesetzt, *dass $2-\gamma$ weder der positiven Einheit, noch der Null, noch einer negativen ganzen Zahl gleich ist.*

Wir finden somit durch Zusammenfassung dieser Resultate,

dass, wenn γ nicht eine ganze Zahl bedeutet, das allgemeine Integralsystem der Differentialgleichungen (3) *in der Umgebung des Punktes $x = 0$ durch*

$$(17)\begin{cases} y_1 = c_1 F(\alpha, \beta, \gamma, x) + c_2 x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) \\ y_2 = c_1 \dfrac{\alpha-\beta+1}{(\beta-1)(\alpha-\gamma+1)} F(\beta-1, 1+\alpha, \gamma, x) \\ \qquad + c_2 \dfrac{\alpha-\beta+1}{\alpha(\beta-\gamma)} x^{1-\gamma} F(\beta-\gamma, \alpha+2-\gamma, 2-\gamma, x) \end{cases}.$$

dargestellt wird.

3. Gehen wir zu dem singulären Punkte $x = 1$ über, so können wir, ohne auf die zugehörige Fundamentalgleichung zurückzugehen, durch die Substitution

$$(18)\qquad x = 1 - \xi$$

das Differentialgleichungsystem (3), wenn y_1 durch $-y_1$ ersetzt wird, in

$$(19)\quad\begin{cases} \xi(1-\xi)\dfrac{dy_1}{d\xi} = \left[\dfrac{\alpha(\gamma-\alpha-1)}{\alpha-\beta+1} + \alpha\xi\right] y_1 \\ \qquad\qquad\qquad + \dfrac{\alpha(1-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma+1)}{(\alpha-\beta+1)^2}\, y_2 \\ \xi(1-\xi)\dfrac{dy_2}{d\xi} = y_1 + \left[\dfrac{(1-\beta)(\gamma-\beta)}{\alpha-\beta+1} + (\beta-1)\xi\right] y_2 \end{cases}$$

überführen, und die Vergleichung mit (1) und (3) zeigt, dass das letztere in (19) übergeht durch Substitution von $\alpha + \beta + 1 - \gamma$ statt γ,

so dass, wenn $\alpha + \beta + 1 - \gamma$ nicht eine ganze Zahl darstellt, das allgemeine Integralsystem der Differentialgleichungen (3) in der Umgebung des Punktes $x = 1$ in der Form gegeben ist

$$(20)\quad\begin{cases} y_1 = c_1 F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) \\ \qquad + c_2 x^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta, 1-x) \\ y_2 = c_1 \dfrac{\alpha-\beta+1}{(\beta-1)(\gamma-\beta)} F(\beta-1, 1+\alpha, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) \\ \qquad + c_2 \dfrac{\alpha-\beta+1}{\alpha(\gamma-\alpha-1)} x^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha-1, \gamma-\beta+1, 1+\gamma-\alpha-\beta, 1-x). \end{cases}$$

4. Wenn γ oder $\gamma - \alpha - \beta$ ganze Zahlen sind, so werden nach den Auseinandersetzungen der früheren Abschnitte die simultanen Fundamentalsysteme von Integralen in der Umgebung der singulären Punkte 0 oder 1 Logarithmen enthalten können. Betrachten wir z. B. den Fall $\gamma = 1$, in welchem die beiden Lösungen (8) der zu $x = 0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung einander gleich sind, so werden die beiden zu dem Integralsysteme (11) und (12)

$$(21)\quad y_{11} = F(\alpha, \beta, 1, x),\quad y_{12} = \frac{\alpha-\beta+1}{\alpha(\beta-1)} F(\beta-1, \alpha+1, 1, x)$$

gehörigen Integrale eines simultanen Fundamentalsystems, wie früher gezeigt worden, lauten

$$(22)\quad \begin{aligned} y_{21} &= \varphi_1 + F(\alpha, \beta, 1, x)\log x, \\ y_{22} &= \varphi_2 + \frac{\alpha-\beta+1}{\alpha(\beta-1)} F(\beta-1, \alpha+1, 1, x)\log x, \end{aligned}$$

worin φ_1 und φ_2 in der Umgebung von $x = 0$ endliche,

stetige und eindeutige Functionen darstellen, und es erübrigt φ_1 und φ_2 zu bestimmen.

Setzen wir die Werthe von y_{21} und y_{22} aus (22) in das Differentialgleichungsystem (3) ein, so ergiebt sich mit Rücksicht darauf, dass $\gamma = 1$ und die Ausdrücke (21), oder die Factoren von $\log x$ in (22) ein Integralsystem eben dieses Systemes darstellen, für φ_1 und φ_2 das Differentialgleichungsystem:

$$(23)\begin{cases} x(1-x)\dfrac{d\varphi_1}{dx} = \left(\dfrac{\alpha(\beta-1)}{\alpha-\beta+1} + \alpha x\right)\varphi_1 - \dfrac{\alpha^2(1-\beta)^2}{(\alpha-\beta+1)^2}\varphi_2 \\ \qquad\qquad - (1-x)F(\alpha,\beta,1,x) \\ x(1-x)\dfrac{d\varphi_2}{dx} = \varphi_1 + \left(\dfrac{\alpha(1-\beta)}{\alpha-\beta+1} + (\beta-1)x\right)\varphi_2 \\ \qquad\qquad - (1-x)\dfrac{\alpha-\beta+1}{\alpha(\beta-1)}F(\beta-1,\alpha+1,1,x), \end{cases}$$

und durch Elimination von φ_2 die lineare nicht homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ_1

$$(24)\quad x(1-x)\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \left[1-(\alpha+\beta+1)x\right]\frac{d\varphi_1}{dx} - \alpha\beta\varphi_1$$
$$= 2(x-1)\frac{dF(\alpha,\beta,1,x)}{dx} + (\alpha+\beta)F(\alpha,\beta,1,x),$$

welche nach dem Obigen in der Umgebung von $x = 0$ ein nach positiven steigenden ganzen Potenzen von x entwickelbares Integral besitzen wird.

Da nach der Entwicklung (10)

$$(25)\quad F(\alpha,\beta,1,x) = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots$$

ist, worin

$$(26)\quad A_k = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{1^2 . 2^2 \ldots k^2},$$

so erhält man, wenn

$$(27)\qquad \varphi_1 = A_1 a_1 x + A_2 a_2 x^2 + \cdots$$

und die Reihen (25) und (27) in die Differentialgleichung (24) eingesetzt werden, zur Bestimmung der Coefficienten a_k durch Identificirung der Coefficienten der Potenzen von x die Beziehung

$$(\alpha + k)(\beta + k) A_k a_k - (k + 1)^2 A_{k+1} a_{k+1}$$
$$+ (\alpha + \beta + 2k) A_k - 2(k + 1) A_k + 1 = 0$$

oder nach (26)

$$a_{k+1} - a_k = - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{\alpha + k} + \frac{1}{\beta + k}, \tag{28}$$

woraus sich

$$a_k = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + 1} + \cdots + \frac{1}{\alpha + k - 1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta + 1} + \cdots \tag{29}$$
$$+ \frac{1}{\beta + k - 1} - 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right)$$

ergiebt, und ähnlich bestimmt man die Coefficienten der Potenzreihe für φ_2, so dass damit das zweite Integralsystem (22) gefunden ist, welches mit (21) zusammen in der Umgebung des Punktes $x = 0$ für $\gamma = 1$ ein Fundamentalsystem von Integralen für das Differentialgleichungssystem (3) bildet.

Verbesserungen.

S. V Z. 4 v. u. hinzuzufügen: *Grünfeld:* Ueber Systeme homogener linearer Differentialgleichungen. (Denkschr. d. Wiener Akad. B. LIV.)

S. 2 Z. 8 v. u. ϑ_{m_n} statt ϑ_{mn}.

S. 5 Z. 6 v. o. (3) statt (4).

S. 5 Z. 7 v. o. (3) statt (4).

S. 12 Z. 1 v. o. ∂t_α statt $d t_\alpha$.

S. 12 Z. 10 v. u. $Y_2{}^4 = x$ statt $Y_1{}^4 = x$.

S. 13 Z. 13 und 16 v. u. t_ν statt t_μ.

S. 31 Z. 2 v. o. hinter „annimmt" hinzuzufügen: „in welcher Richtung man auch in den Punkt $x = \xi$ eintritt".

S. 41 Z. 11 v. u. hinter „Differentialgleichung" hinzuzufügen: „in der angegebenen Weise".

S. 79 Z. 6 v. o. $\bar{z}_{\nu+1}, \ldots \bar{z}_m$ statt $\bar{z}_{\nu+1}, \bar{z}_m$.

S. 80 Z. 9 v. o. „irreductible" zu streichen.

S. 97 Z. 12 v. o. bedeutet; statt bedeutet

S. 117 Z. 8 v. o. dx^{n-1} statt dx^{n-2}.

S. 125 Z. 1 v. o. des statt der.

S. 128 Z. 2 v. o. k_n statt k.

S. 171 Z. 1 v. u. $\frac{1}{2}$ statt $\frac{1}{2}$.

S. 224 Z. 3 v. o. $f_k($ statt $f_k, ($

S. 254 Z. 7 v. u. Differentialgleichung- statt Integral-.

S. 258 Z. 3 v. u. $F_2(w, a, b, c, \ldots)$ statt $F_2(a, b, c, \ldots)$.

S. 272 Z. 5 v. o. $\lambda - \lambda'$ statt $\lambda - \lambda$.

S. 276 Z. 10 v. u. $F(x, y, t_1)$ statt $F(x, y, t)$.

S. 301 Z. 8 v. u. waren, statt waren.

S. 317 Z. 1 v. o. $d^n y$ statt dy^n.

S. 328 Z. 5 v. u. $\frac{n}{2}$ statt $\frac{n}{2}$.

S. 358 Z. 6 v. u. $(v_2{}^0 + \zeta_2)^{\varrho_2'}$ statt $(v_2{}^0 + \zeta_2)^{\varrho_2}$.

S. 379 Z. 9 v. o. $\eta_n{}^2$ statt η^{n^2}.

S. 386 Z. 4 v. o. Z_n statt Z^n.

S. 388 Z. 12 v. u. $A_{n\varepsilon}(\lambda_{nn} - \lambda_\varepsilon)$ statt $A_{n\varepsilon}\lambda_{nn}$.

S. 388 Z. 4 v. u. Y_n statt Y^n.

S. 398 Z. 4 v. u. $c^{(r)}_{00\ldots0}$ statt $c^{r}_{00\ldots0}$.

S. 403 Z. 13 v. u. „sich" fortzulassen.

S. 405 Z. 6 v. o. v_{kk+1} statt v^{kk+1}.

S. 411 Z. 18 v. o. η_{m-1} statt η_{m-}.

S. 427 Z. 16 v. o. ξ_n statt ξ.

S. 440 Z. 12 v. o. $[\log(x-a)]^2$ statt $[\log(x-a)]$.

S. 442 Z. 1 v. u. $[\log(x-a)]^{\mu-1}$ statt $[\log(x-a)]_{\mu-1}$.







